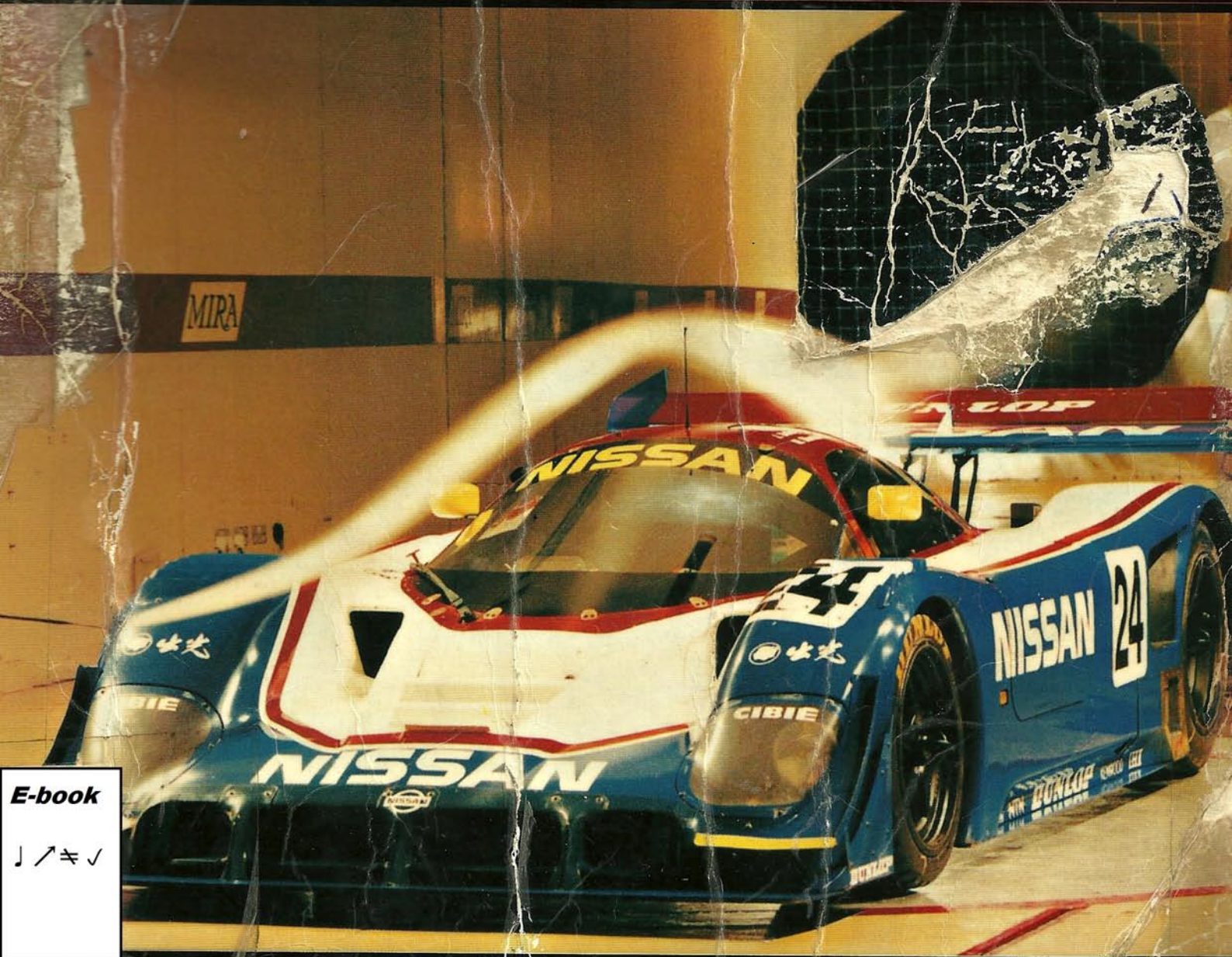
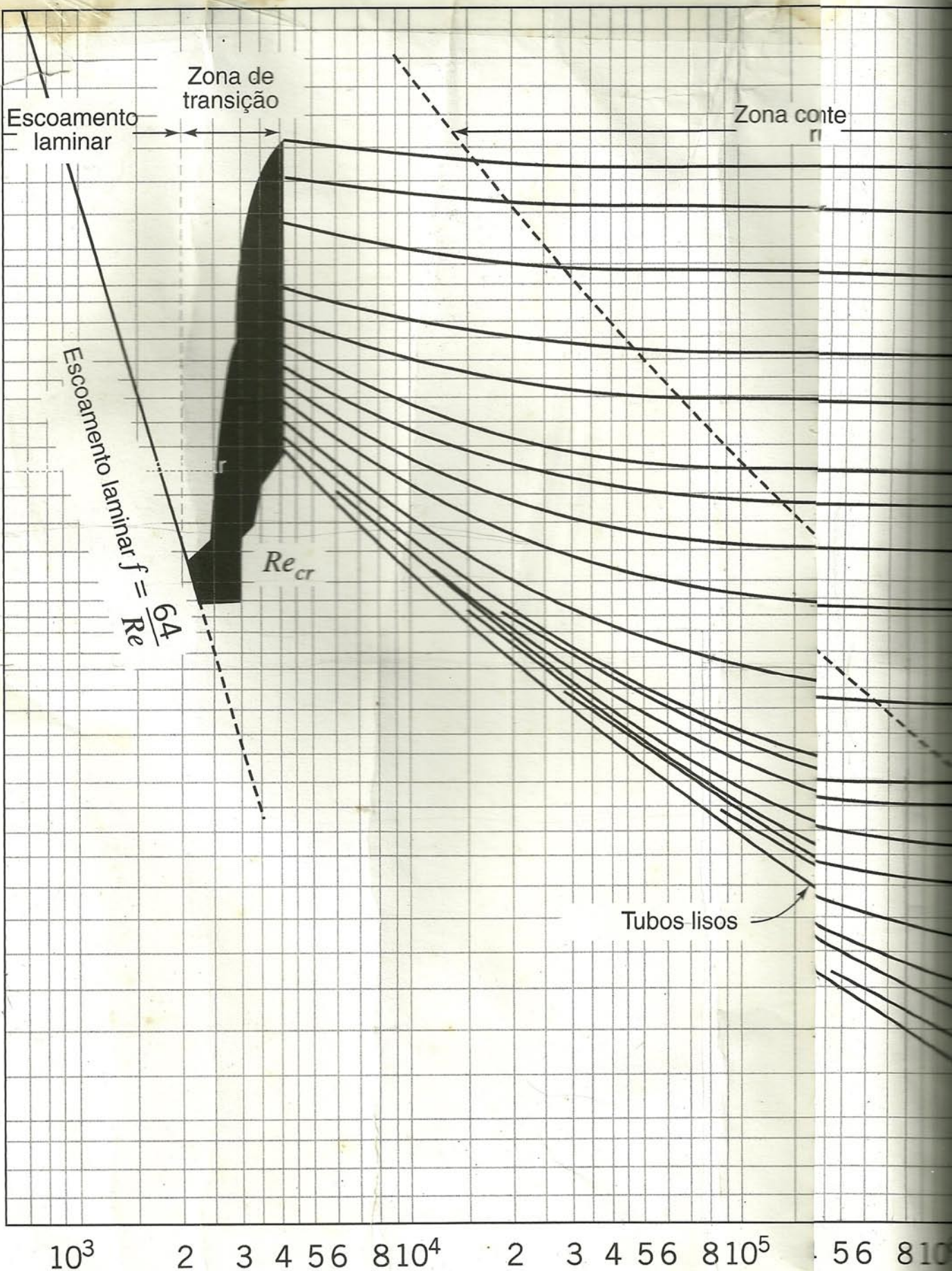
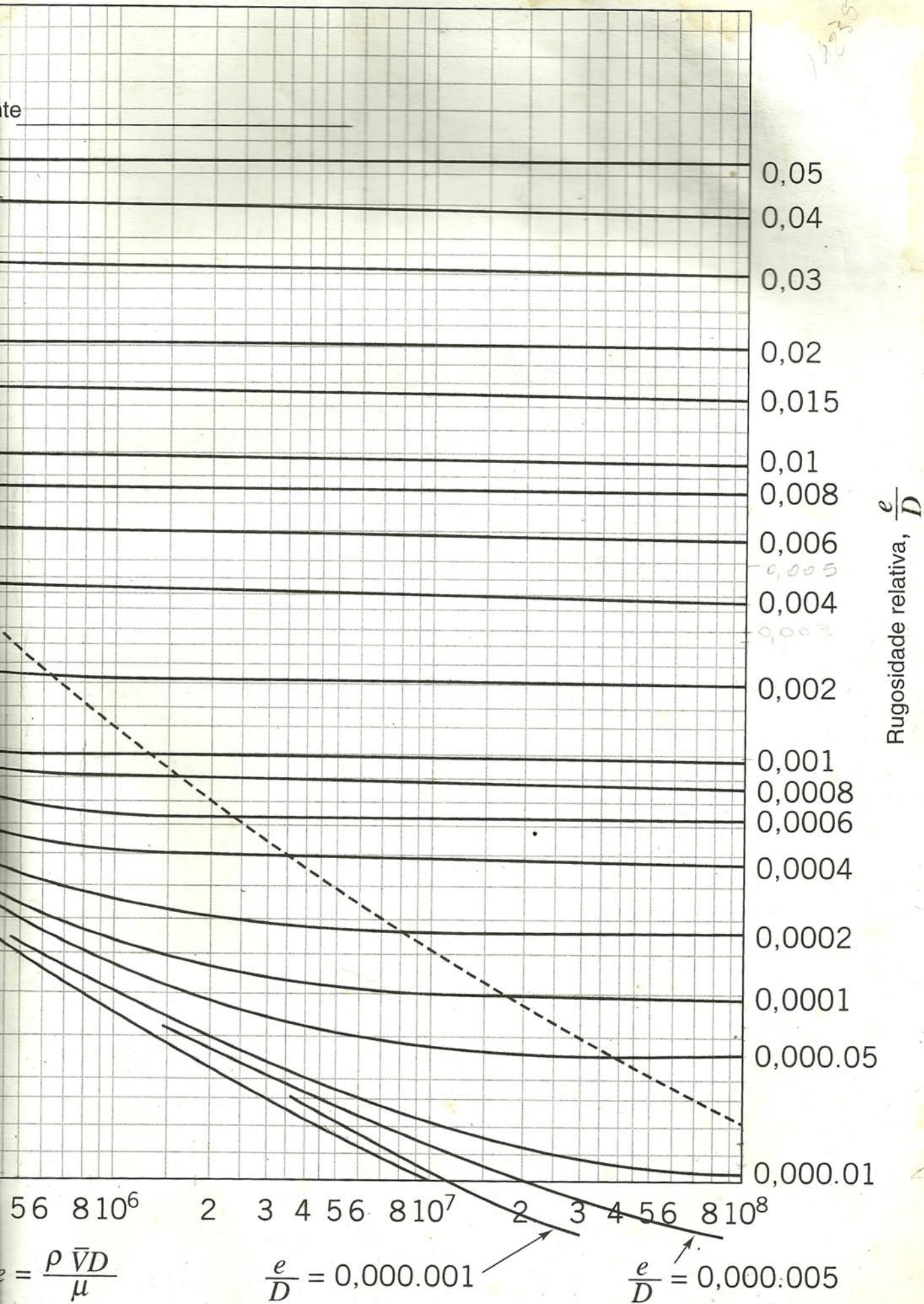
QUINTA EDIÇÃO
Introdução à Mecânica dos Fluidos
MIRA
NISSAN
24
CIBIE
NISSAN
E-book
Fox & McDonald

te
0,05
0,04
0,03
0,02
0,015
0,01
0,008
0,006
0,005
0,004
0,003
0,002
0,001
0,0008
0,0006
0,0004
0,0002
0,0001
0,000.05
0,000.01
Rugosidade relativa, $\frac{e}{D}$
5 6 8 10^6 2 3 4 5 6 8 10^7 2 3 4 5 6 8 10^8
$= \frac{\rho \bar{V} D}{\mu}$
$\frac{e}{D}$ = 0,000.001
$\frac{e}{D}$ = 0,000.005

INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS FLUIDOS

QUINTA EDIÇÃO

Robert W. Fox
Alan T. McDonald
School of Mechanical Engineering
Purdue University

Tradução

Ricardo Nicolau Nassar Koury
Geraldo Augusto Campolina França
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Minas Gerais

Capa: *Um Automóvel em Escala Real sob Teste em um Túnel de Vento.*

A foto da capa, de um carro de corrida da Nissan, é cortesia da MIRA, The Motor Industry Research Association, Reino Unido.

A foto de capa mostra um carro esporte de corrida sendo testado em um túnel de vento na The Motor Industry Research Association (MIRA) em Warwickshire, Inglaterra; vê-se claramente uma linha de emissão de fumaça. Essa seção de testes do túnel tem 7,9 m de largura, 4,4 m de altura e 15,2 m de comprimento. A velocidade máxima do escoamento é de 35 m/s. O túnel é capaz de medir forças aerodinâmicas nas três direções das coordenadas ortogonais e os momentos de rotação correspondentes (guinada, arfagem e rolamento). O uso típico do túnel em escala real é no desenvolvimento aerodinâmico para a produção de veículos, na avaliação do escoamento de ar de resfriamento ao redor de motores, freios e outros componentes sensíveis ao calor, e na preparação aerodinâmica de carros esportivos e de corrida, desde *karts* até carros de Fórmula 1.

As instalações da MIRA incluem também um túnel para modelos em escala. O túnel de modelo tem o piso móvel para direcionar corretamente o escoamento por baixo do veículo modelo.

As instalações de apoio disponíveis na MIRA incluem sistemas completos de aquisição de dados e um dinamômetro para carregar o motor e medir a potência liberada pelo veículo na estrada.

(Reproduzido com a permissão da MIRA.)

Título do original em inglês
Introduction to Fluid Mechanics

Copyright © 1998 John Wiley & Sons, Inc.

All Rights Reserved. Authorized translation from the English language edition
published by John Wiley & Sons, Inc.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa
Copyright © 2001 by
LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21-221-9621
Fax: 21-221-3202

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação
ou reprodução deste volume, no todo ou em parte,
sob quaisquer formas ou por quaisquer meios
(eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia,
distribuição na Web ou outros),
sem permissão expressa da Editora.

PREFÁCIO

Este texto foi escrito para um curso de introdução à mecânica dos fluidos. O nosso enfoque no assunto enfatiza os conceitos físicos da mecânica dos fluidos e os métodos de análise que se iniciam a partir dos princípios básicos. O objetivo principal deste livro é auxiliar os estudantes a desenvolver uma metodologia ordenada para a solução de problemas. Começamos assim com as equações básicas, declaramos com clareza as hipóteses assumidas e tentamos relacionar os resultados com o comportamento físico esperado.

Esse enfoque é ilustrado por 109 problemas-exemplo no texto. As soluções para esses problemas-exemplo demonstram boas técnicas de solução e explicam pontos da teoria causadores de dificuldades. Os problemas-exemplo aparecem em formato destacado na seqüência do texto e, por isso, são fáceis de identificar e acompanhar.

As unidades do Sistema Internacional (SI) são utilizadas em aproximadamente 70% dos problemas-exemplo e nos problemas de final de capítulo. Unidades inglesas de engenharia são mantidas em alguns problemas para prover experiência com esse sistema tradicional e para realçar conversões entre sistemas de unidades que podem ser deduzidas dos fundamentos.

Explicações completas apresentadas no texto, juntamente com exemplos numerosos e detalhados, tornam este livro compreensível para estudantes. Isto dá liberdade ao professor para afastar-se dos métodos tradicionais de ensino do tipo conferência. O tempo em sala de aula pode ser utilizado para apresentar material complementar, aprofundar em tópicos especiais (tais como escoamento não-newtoniano, escoamento em camada limite, sustentação e arrasto, ou métodos experimentais), resolver problemas ou explicar pontos difíceis dos trabalhos propostos “para casa”. Cada período de aula pode ser utilizado mais apropriadamente para atender às necessidades dos alunos.

O material deste livro foi selecionado cuidadosamente e uma ampla faixa de tópicos adequados para um curso de um ou dois semestres em mecânica dos fluidos em nível introdutório ou mais avançado está incluída. Cursos introdutórios em dinâmica dos corpos rígidos e matemática, incluindo equações diferenciais, são pré-requisitos necessários. Uma base em termodinâmica é desejável para o estudo de escoamento compressível unidimensional.

A apresentação foi organizada em áreas de tópicos abrangentes:

- Conceitos introdutórios, objetivos da mecânica dos fluidos e estática dos fluidos (Caps. 1, 2 e 3).
- Desenvolvimento e aplicação de formas de volume de controle de equações básicas (Cap. 4).
- Desenvolvimento e aplicação de formas diferenciais de equações básicas (Caps. 5 e 6).
- Análise dimensional e correlação de dados experimentais (Cap. 7).
- Aplicações para escoamentos viscosos incompressíveis internos (Cap. 8).
- Aplicações para escoamentos viscosos incompressíveis externos (Cap. 9).
- Análise e aplicações de máquinas de fluxo (Cap.10).
- Análise e aplicações do escoamento compressível unidimensional (Caps. 11 e 12).

A lista dos Resumos dos Objetivos no final de cada capítulo indica a terminologia e os conceitos que devem ser entendidos e as tarefas que os estudantes devem estar aptos a completar após estudar o material do texto.

O Cap. 4 trata de análises usando volumes de controles finitos e diferenciais. A equação de Bernoulli é deduzida (na Seção opcional 4.4.1) como um exemplo da aplicação das equações básicas a um volume de controle diferencial. Com a equação de Bernoulli disponível para uso, o Cap. 4 cria a oportunidade de incluir problemas mais desafiadores lidando com a equação de quantidade de movimento para volumes de controle finitos.

Outra dedução da equação de Bernoulli é apresentada no Cap. 6, onde ela é obtida pela integração das equações de Euler ao longo de uma linha de corrente. Caso um professor prefira tardar a introdução da equação de Bernoulli, os problemas desafiadores do Cap. 4 poderão ser resolvidos durante o estudo do Cap. 6.

Fizemos um esforço muito grande para melhorar a clareza do texto nesta quinta edição. Fomos ajudados por uma revisão mais abrangente e detalhada preparada pelo Dr. Albert L. Hale, outrora dos Laboratórios Bell, e somos gratos por sua importante contribuição. Modificações e melhoramentos sutis em todo o texto facilitam o ensinamento do material e enfatizam suas aplicações práticas.

Os problemas de final de capítulo na quinta edição foram reduzidos em número para cerca de 1250. Entretanto, muitos problemas foram combinados e contêm múltiplas partes. A maioria deles foi estruturada de forma tal que nem todas as partes necessitam ser resolvidas de uma só vez, e muitas partições foram elaboradas para explorar questões do tipo “O que resultaria se?”.

Aproximadamente 350 problemas são novos ou modificados, e muitos deles incluem um componente melhor adequado para análise usando uma planilha ou programa de computador. Estes problemas são identificados por um ícone de um computador em sua margem. Muitos destes problemas “de computador” foram elaborados com o intuito de que este componente proporcione uma pesquisa paramétrica de uma solução singular. Onde apropriado, os problemas são interligados com o programa de computador *FM Software Supplement* que pode ser adquirido a partir do *web site* da John Wiley & Sons, Inc. (www.wiley.com/college/fox). Repetindo, partições dos problemas podem ser resolvidas como se fossem problemas individuais.

Incluímos quase 100 novos problemas de final de capítulo. Eles podem conter questões de estímulo ao raciocínio com a intenção de testar a compreensão de conceitos fundamentais, ou podem requerer pensamentos criativos, síntese e/ou discussão narrativa.

Onde apropriado, nós começamos usando *problemas de projeto* no lugar dos tradicionais experimentos de laboratório. Problemas de projeto incentivam os estudantes a despender mais tempo explorando aplicações dos princípios de mecânica dos fluidos para o projeto de componentes e sistemas. Na quinta edição, problemas de projeto são incluídos juntamente com os problemas de final de capítulo.

A apresentação de dados de propriedades dos fluidos no Apêndice A foi expandida para incluir tabelas de propriedades detalhadas para ar e água em várias temperaturas. Dados de viscosidade para água e ar em várias temperaturas podem ser obtidos com precisão a partir das novas Tabelas A.7 até A.10, em vez de serem estimadas dos gráficos das Figs. A.2 e A.3. Entretanto, os gráficos foram mantidos para mostrar as tendências de dependência da temperatura para líquidos e gases, as viscosidades aproximadas para fluidos menos comuns, e a magnitude relativa das viscosidades de líquidos e gases. Equações para cálculo de valores de propriedades do ar e da água são incluídas para utilização em programas de computador.

Muitos filmes valiosos estão disponíveis para clarear e demonstrar os princípios básicos da mecânica dos fluidos. Esses filmes são referenciados no texto onde a sua utilização seria apropriada e são também identificados por fornecedor no Apêndice C.

O programa de computador *Software Supplement* é projetado para permitir aos estudantes variar os parâmetros da solução de um problema de forma a explorar o comportamento da solução. Esse programa inclui dados de propriedades dos fluidos e da atmosfera padrão e possui módulos para analisar volumes de controle em aceleração, perda de pressão no escoamento em tubos e escoamento compressível unidimensional. (O programa também fornece o diagrama *Ts* para cada problema de escoamento compressível.) Como o programa de computador está prontamente disponível, as tabelas para cálculo de escoamento compressível (Apêndice E) foram condensadas. Em vez de encorajarmos os estudantes a usá-las, nós os incentivamos a programar as equações de cálculo como funções do número de Mach em uma planilha ou em uma calculadora para uso na solução de problemas. Gráficos foram adicionados para mostrar tendências nas razões de propriedades em função do número de Mach.

Ao término deste curso, esperamos que os estudantes sejam capazes de aplicar as equações básicas a uma variedade de problemas, incluindo problemas que eles não encontraram anteriormente. Damos ênfase aos conceitos físicos ao longo de todo o texto, a fim de ajudar os estudantes a modelar os vários fenômenos que ocorrem em situações reais de escoamentos de fluidos. Minimizamos o uso de "fórmulas mágicas" ou "receitas de bolo" e enfatizamos uma abordagem sistemática e fundamentada para resolução dos problemas. Seguindo este formato, nós acreditamos que os estudantes desenvolvam confiança em suas habilidades para aplicar o material e para encontrar soluções para problemas desafiadores.

Este livro é bem adequado para estudos independentes por estudantes ou engenheiros formados. Sua linguagem fácil e exemplos claros ajudam a construir confiança. Os Resumos dos Objetivos, ao final de cada capítulo, são úteis para a revisão da matéria ou para avaliar se as metas educacionais foram atingidas.

Nós reconhecemos que nenhum enfoque isolado pode satisfazer a todas as necessidades e somos gratos a muitos estudantes e faculdades que, com seus comentários, têm nos ajudado a aprimorar desde a primeira edição deste livro. Agradecemos especialmente os nossos revisores desta quinta edição: Richard Gardner da Washington University (St. Louis), Craig Hoff da Lawrence Technological University, Deane Kihara da University of Hawaii em Manoa, Cesar Mendoza-Cabrales da Columbia University, Charles Meneveau da Johns Hopkins University e M. Erol Ulucakli do Lafayette College.

Agradecemos também as nossas esposas, Beryl e Tania, pelo apoio incondicional. Nos bastidores, elas suportaram as longas horas consumidas neste esforço.

Críticas e sugestões oriundas de leitores e usuários interessados neste livro são bem-vindas.

Robert W. Fox
Alan T. McDonald
West Lafayette, Indiana
Agosto de 1998

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O objetivo deste texto é proporcionar uma introdução clara e concisa à mecânica dos fluidos. Ao iniciar o estudo de qualquer assunto, um certo número de indagações pode vir à mente. Os estudantes, no primeiro curso de mecânica dos fluidos, podem perguntar:

De que trata a mecânica dos fluidos?
Por que devo estudá-la?
Por que desejaria estudá-la?
Como ela se relaciona com áreas com as quais já estou familiarizado?

Neste capítulo, tentaremos apresentar pelo menos respostas qualitativas a estas e outras questões similares. Isso deve servir para estabelecer uma base e uma perspectiva para o nosso estudo da mecânica dos fluidos. Antes de prosseguir com a definição de um fluido, faremos alguns comentários dirigidos aos estudantes.

1.1 NOTA AOS ESTUDANTES

Ao escrevermos este livro, escolhemos você, estudante, como nosso destinatário principal; o livro foi escrito para você. É nossa opinião que o tempo em sala de aula não deveria ser dedicado à regurgitação do material do livro-texto pelo professor. Ao contrário, o tempo deveria ser empregado para discutir o assunto exposto no livro e para aplicar os princípios básicos na resolução de problemas. As condições necessárias para atingir esse objetivo são: (1) uma apresentação clara e concisa dos fundamentos para que você, estudante, possa compreendê-los, e (2) o interesse do estudante em ler o material do livro antes de se dirigir para a sala de aula. Assumimos a responsabilidade de satisfazer a primeira condição. Você deve assumir a responsabilidade de satisfazer a segunda. Haverá ocasiões, provavelmente, em que não cumpriremos a contento as nossas metas. Se assim acontecer, gostaríamos de tomar conhecimento dessas deficiências, seja diretamente ou através do seu professor.

É desnecessário dizer que um texto introdutório não é completo. O seu professor, sem dúvida, ampliará o material apresentado, sugerirá enfoques alternativos aos tópicos e adicionará novos materiais. Estimulamos você a consultar os muitos outros livros e referências sobre mecânica dos fluidos disponíveis na biblioteca; quando um outro texto apresentar discussão particularmente boa de certo tópico, nós o mencionaremos diretamente. Procure aprender, também, com seus colegas e com os assistentes designados para o curso, assim como com seu professor. Pressupomos que você tenha tido um curso introdutório de termodinâmica (seja num curso básico de física ou num curso introdutório de termodinâmica), além de cursos anteriores sobre estática, dinâmica e cálculo diferencial e integral. Nenhuma tentativa de expor novamente estes assuntos será feita; contudo, os aspectos pertinentes destes estudos anteriores serão revistos quando necessário.

Acreditamos firmemente que se aprende melhor *fazendo*. Isto é verdade, seja o assunto estudado mecânica dos fluidos, termodinâmica ou golfe. Os fundamentos em qualquer um destes casos são poucos, e o domínio deles vem com a prática. *Então, é extremamente importante, na verdade essencial, que você resolva problemas*. O grande número deles, incluídos ao final de cada capítulo, oferece a oportunidade de praticar a aplicação dos fundamentos na resolução de problemas. Você deve evitar a tentação de adotar métodos demasiadamente simplificados nessas resoluções, pois eles podem simplesmente não funcionar. Recomendamos que você proceda utilizando os seguintes passos lógicos:

1. Declare de maneira breve e concisa (com suas próprias palavras) a informação dada.
2. Defina a informação desejada.
3. Faça um desenho esquemático do sistema ou do volume de controle a ser usado na análise. Certifique-se de assinalar as fronteiras do sistema ou do volume de controle e as direções apropriadas das coordenadas.
4. Apresente a formulação matemática das leis básicas que você considera necessária para resolver o problema.
5. Relacione as hipóteses simplificadoras que você considera apropriadas ao problema.
6. Complete a análise algebricamente, antes de introduzir valores numéricos.
7. Introduza os valores numéricos (usando um sistema consistente de unidades) a fim de obter uma resposta numérica.
   a. Referencie a fonte de valores para as propriedades físicas.
   b. Certifique-se de que os algarismos significativos da resposta são compatíveis com os dados fornecidos.
8. Verifique a resposta e reveja as hipóteses da solução a fim de assegurar que são razoáveis.
9. Assinale a resposta.

Nos trabalhos iniciais, essa formatação do problema pode parecer desnecessária. Contudo, tal metodologia ordenada para a solução de problemas reduzirá erros, economizará tempo e permitirá um entendimento mais claro das limitações de uma solução particular. Ela o preparará, também, para a comunicação dos seus métodos de solução e dos seus resultados a terceiros, como será freqüentemente necessário na sua carreira. Essa formatação é empregada em todos os problemas-exemplos des-

te texto; as respostas dos problemas são dadas com três algarismos significativos.

A maioria dos cálculos de engenharia envolve valores obtidos por medição ou dados de propriedades físicas. A cada valor medido está associada uma incerteza experimental. Esta pode ser reduzida pelo cuidado na sua obtenção e pela aplicação de técnicas de medição mais precisas, mas o custo e o tempo despendidos na obtenção de dados crescem acentuadamente com o aumento da precisão das medições. Em conseqüência, poucos dados de engenharia são suficientemente precisos para justificar mais de três algarismos significativos.

Os princípios da especificação das incertezas experimentais de uma medição e da estimativa da incerteza de um resultado calculado são revistos no Apêndice F. Eles deverão ser perfeitamente compreendidos por qualquer um que realize trabalho de laboratório. Sugerimos que você dedique tempo à revisão do Apêndice F antes de executar trabalhos de laboratório ou de resolver os problemas ao final deste capítulo.

1.2 DEFINIÇÃO DE UM FLUIDO

A mecânica dos fluidos lida com o comportamento dos fluidos em repouso e em movimento. É lógico começar com uma definição de *fluido*: um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial), não importa quão pequena ela possa ser.

Assim, os fluidos compreendem as fases líquida e gasosa (ou de vapor) das formas físicas nas quais a matéria existe. A distinção entre um fluido e o estado sólido da matéria é clara quando você compara os seus comportamentos. Um sólido deforma-se quando uma tensão de cisalhamento lhe é aplicada, mas não continuamente.

Na Fig. 1.1, os comportamentos de um sólido (Fig. 1.1a) e de um fluido (Fig 1.1*b*), sob a ação de uma força de cisalhamento constante, são comparados. Na Fig. 1.1*a*, a força de cisalhamento é aplicada sobre o sólido através da placa superior à qual ele está ligado. Quando a força cisalhante é aplicada na placa superior, o bloco deforma-se conforme mostrado. Do nosso estudo anterior da mecânica, sabemos que, desde que o limite elástico do material sólido não seja ultrapassado, a deformação é proporcional à tensão de cisalhamento aplicada, $\tau = F / A$, onde A é a área da superfície em contato com a placa.

Para repetir a experiência com um fluido entre as placas, delimitaremos um elemento fluido, conforme mostrado pelas linhas cheias na Fig. 1.1*b*. Enquanto a força F estiver aplicada na placa superior, a deformação do elemento fluido aumenta continuamente. O fluido em contato direto com a fronteira sólida tem a velocidade da própria fronteira; não há deslizamento. Este é um fato experimental baseado em numerosas observações do comportamento dos fluidos.[1] A forma do elemento fluido em instantes sucessivos $t_0 < t_1 < t_2$, é mostrada (Fig. 1.1*b*) pelas linhas tracejadas. Como o movimento do fluido continua sob a aplicação de uma tensão cisalhante, podemos, alternativamente, definir um fluido como uma substância incapaz de suportar tensão de cisalhamento quando em repouso.

1.3 ESCOPO DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

Tendo definido um fluido e assinalado as características que o distinguem de um sólido, podemos fazer a indagação: "Por que estudar mecânica dos fluidos?"

O conhecimento e a compreensão dos princípios básicos e dos conceitos da mecânica dos fluidos são essenciais para qualquer sistema no qual um fluido é o meio operante. O projeto de, virtualmente, todos os meios de transporte, requer aplicação dos princípios da mecânica dos fluidos. Aí se incluem aeronaves para vôos subsônico e supersônico, máquinas terrestres, *hovercraft*, aeronaves de decolagem e aterrissagem verticais que requerem pistas de comprimento mínimo, navios, submarinos e automóveis. Nos últimos anos, os fabricantes de automóveis têm dado maior importância ao projeto aerodinâmico. Isto já era aplicado tempos atrás pelos projetistas de carros e de barcos de competição. O projeto de sistemas de propulsão para vôos espaciais, assim como para foguetes de brinquedo, baseia-se nos princípios da mecânica dos fluidos. O colapso da ponte de Tacoma Narrows, em 1940, é uma evidência do que pode acontecer ao se negligenciarem os princípios básicos da mecânica dos fluidos.[2] É comum, hoje em dia, realizarem-se estudos com modelos a fim de determinar as forças aerodinâmicas que atuam sobre edifícios e estruturas e os campos de escoamento em torno deles. Isso inclui o estudo de arranha-céus, estádios desportivos, chaminés e grandes *shoppings*.

O projeto de todos os tipos de máquinas de fluxo, incluindo bombas, ventiladores, compressores e turbinas, requer claramente o conhecimento dos princípios básicos da mecânica dos fluidos. A lubrificação é uma aplicação de considerável importância da mecânica dos fluidos. Os sistemas de aquecimento e ventilação de residências, de grandes edifícios comerciais, de túneis subterrâneos, assim como o projeto de sistemas de tubulações, são exemplos adicionais de áreas técnicas específicas que exigem o conhecimento da mecânica dos fluidos. O sistema circulatório do corpo humano é, basicamente, um sistema fluido. Não causa

[1] A condição de não-deslizamento é demonstrada no filme da NCFMF, *Fundamentals of Boundary Layers*. Uma lista completa de títulos de filmes e de fontes sobre mecânica dos fluidos é apresentada no Apêndice C.

[2] Para uma evidência veemente das forças aerodinâmicas em ação, veja o curta-metragem *Collapse of the Tacoma Narrows Bridge*.

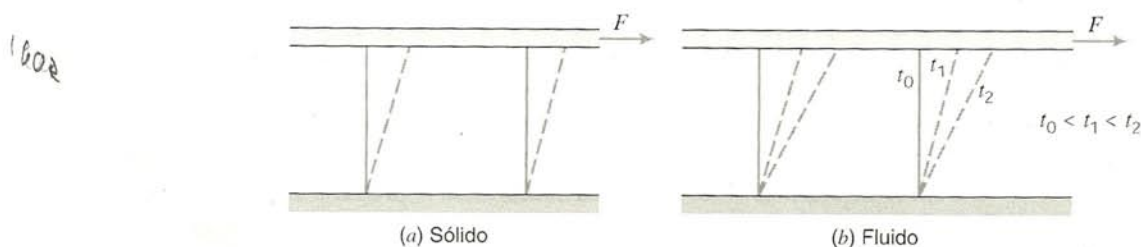



Fig. 1.1 Comportamento de um sólido e de um fluido sob a ação de uma tensão de cisalhamento constante.

surpresa que os projetos de substitutos do sangue, de corações e pulmões artificiais, de auxiliares mecânicos da respiração e de outros dispositivos do gênero baseiem-se nos princípios da mecânica dos fluidos.

Mesmo algumas das nossas atividades de lazer são diretamente relacionadas com a mecânica dos fluidos. O "efeito" e a trajetória em gancho das bolas de golfe podem ser explicados pela mecânica dos fluidos (embora só um profissional habilidoso possa corrigi-los!).

A lista de aplicações dos princípios da mecânica dos fluidos poderia ser consideravelmente ampliada. O nosso objetivo principal é chamar a atenção para o fato de a mecânica dos fluidos não ser estudada por interesse puramente acadêmico; ao contrário, é um assunto de larga importância tanto nas nossas experiências diárias quanto na moderna tecnologia.

Claramente, não esperamos considerar em detalhes sequer uma pequena percentagem desses e de outros problemas específicos da mecânica dos fluidos. Em vez disso, o objetivo deste texto é apresentar as leis básicas e os conceitos físicos associados que fornecem os fundamentos, ou o ponto de partida, na análise de qualquer problema de mecânica dos fluidos.

1.4 EQUAÇÕES BÁSICAS

A análise de qualquer problema em mecânica dos fluidos começa, necessariamente, seja de modo direto ou indireto, com declarações das leis básicas que regem o movimento do fluido. As leis básicas, aplicáveis a qualquer fluido, são:

1. A conservação da massa.
2. A segunda lei de Newton para o movimento.
3. O princípio da quantidade de movimento angular.
4. A primeira lei da termodinâmica.
5. A segunda lei da termodinâmica.

Obviamente, nem todas as leis básicas são necessárias para resolver qualquer problema. Por outro lado, em muitos deles é necessário trazer à análise relações adicionais, na forma de equações de estado ou outras de caráter constitutivo, que descrevam o comportamento das propriedades físicas dos fluidos sob determinadas condições.

Você provavelmente se recorda do estudo das propriedades dos gases na física básica ou na termodinâmica. A equação de estado do gás ideal

$$p = \rho RT \tag{1.1}$$

é um modelo que relaciona a massa específica com a pressão e a temperatura para muitos gases, para cálculos de precisão de engenharia, sob condições normais. Na Eq. 1.1, R é a constante do gás. Os seus valores são dados no Apêndice A para diversos gases comuns; p e T na Eq. 1.1 são a pressão e a temperatura absolutas, respectivamente; ρ é a densidade (massa por unidade de volume). O Problema-Exemplo 1.1 ilustra o emprego da equação de estado do gás ideal.

É óbvio que as leis básicas com as quais lidaremos são as mesmas usadas na mecânica e na termodinâmica. A nossa tarefa será formular essas leis de modo adequado para resolver problemas de escoamento de fluidos e aplicá-las a uma variedade de problemas.

Devemos enfatizar que existem, conforme veremos, muitos problemas aparentemente simples na mecânica dos fluidos que não podem ser resolvidos de forma analítica. Em tais casos, devemos recorrer a soluções numéricas mais complicadas e/ou a resultados de testes experimentais.

Nem todas as medições podem ser feitas com o mesmo grau de precisão e nem todos os dados são igualmente bons; a validade dos dados deve ser documentada antes de se utilizar os resultados dos testes em um projeto. O estabelecimento da incerteza provável dos dados é uma parte importante de um relatório claro e completo dos resultados experimentais. A análise de incertezas também é útil durante o projeto experimental. Estudos cuidadosos podem indicar fontes potenciais de erros inaceitáveis e sugerir métodos aperfeiçoados de medição.

1.5 MÉTODOS DE ANÁLISE

O primeiro passo na resolução de um problema é definir o sistema que você está tentando analisar. Na mecânica básica, fez-se uso intenso do diagrama de corpo livre. Na termodinâmica, consideraram-se os sistemas fechado ou aberto. Neste texto, empregamos os termos *sistema* e *volume de controle*. A importância de definir o sistema ou o volume de controle antes de aplicar as equações básicas na análise de um problema não pode ser superestimada. Neste ponto, reveremos as definições de sistema e de volume de controle.

1.5.1 Sistema e Volume de Controle

Um sistema é definido como uma quantidade de massa fixa e identificável; as fronteiras do sistema separam-no do ambiente. As fronteiras do sistema podem ser fixas ou móveis; contudo, não há transferência de massa através das mesmas.

No conjunto familiar pistão-cilindro da termodinâmica, Fig. 1.2, o gás no cilindro é o sistema. Se uma fonte de alta temperatura for posta em contato com a extremidade esquerda do cilindro, o pistão mover-se-á para a direita; a fronteira do sistema, por conseguinte, irá se mover. Calor e trabalho poderão cruzar as fronteiras do sistema, mas a quantidade de matéria dentro delas permanecerá constante. Nenhuma massa cruza as fronteiras do sistema.

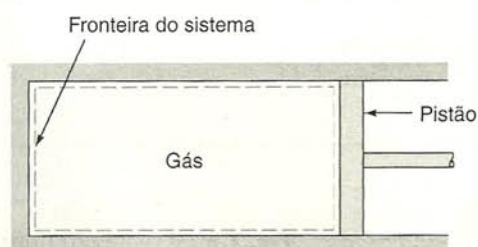



Fig. 1.2 Conjunto pistão-cilindro.

EXEMPLO 1.1 — Aplicação da Primeira Lei ao Sistema Fechado

Um dispositivo pistão-cilindro contém 0,95 kg de oxigênio a uma temperatura de 27°C e a uma pressão de 150 kPa (abs). Calor é adicionado ao gás, e ele expande-se a pressão constante, a uma temperatura de 627°C. Determine a quantidade de calor adicionado durante o processo.

PROBLEMA-EXEMPLO 1.1

DADOS: Pistão-cilindro contendo O_2, $m = 0{,}95$ kg.
$T_1 = 27°C$ $\quad T_2 = 627°C$
p = constante = 150 kPa (abs.)

DETERMINAR: $Q_{1\to 2}$.

SOLUÇÃO:

Estamos lidando com um sistema, $m = 0{,}95$ kg.

Equação básica: a primeira lei para o sistema, $Q_{12} - W_{12} = E_2 - E_1$

Considerações: (1) $E = U$, visto que o sistema é estacionário
(2) Gás ideal com calores específicos constantes

Com as considerações acima,

$$E_2 - E_1 = U_2 - U_1 = m(u_2 - u_1) = mc_v(T_2 - T_1)$$

O trabalho realizado durante o processo é o da fronteira em movimento

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = p(V_2 - V_1)$$

Para um gás ideal, $pV = mRT$. Por conseguinte, $W_{12} = mR(T_2 - T_1)$. Então, da equação da primeira lei,

$$Q_{12} = E_2 - E_1 + W_{12} = mc_v(T_2 - T_1) + mR(T_2 - T_1)$$

$$Q_{12} = m(T_2 - T_1)(c_v + R)$$

$$Q_{12} = mc_p(T_2 - T_1) \qquad \{R = c_p - c_v\}$$

Do Apêndice, Tabela A.6, para O_2, $c_p = 909{,}4$ J/(kg·K). Resolvendo para Q_{12} obtemos

$$Q_{12} = 0{,}95\ \text{kg} \times 909\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 600\ \text{K} = 518\ \text{kJ} \longleftarrow Q_{12}$$

{ O propósito deste problema foi revisar o emprego de:
(i) a primeira lei da termodinâmica para um sistema, e
(ii) a equação de estado para um gás ideal. }

Nos cursos de mecânica, você empregou bastante o diagrama de corpo livre (método do sistema). Isso era lógico, pois você lidava com um corpo rígido facilmente identificável. Entretanto, na mecânica dos fluidos, em geral nos preocupamos com o escoamento de fluidos através de dispositivos como compressores, turbinas, tubulações, bocais etc. Nestes casos, é difícil focalizar a atenção numa quantidade de massa fixa identificável. É muito mais conveniente, para a análise, fazê-lo num volume do espaço através do qual o fluido escoa. Conseqüentemente, usamos o método do volume de controle.

Um volume de controle é um volume arbitrário no espaço através do qual o fluido escoa. A fronteira geométrica do volume de controle é chamada superfície de controle. Esta pode ser real ou imaginária; pode estar em repouso ou em movimento. A Fig. 1.3 mostra uma possível superfície de controle para a análise do escoamento através de um tubo. Ali, a superfície interna do tubo, uma fronteira física real, faz parte da superfície de controle. Entretanto, as porções verticais da superfície de controle são imaginárias. Não há superfície física correspondente; essas fronteiras imaginárias são selecionadas arbitrariamente para fins de cálculos. Como a localização da superfície de controle afeta

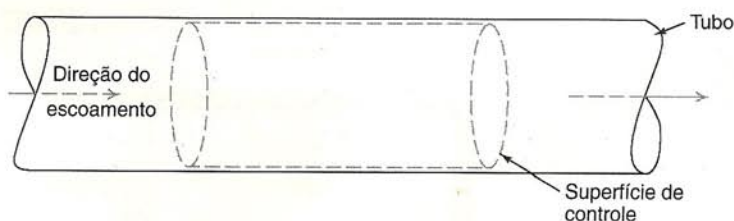



Fig. 1.3 Escoamento num tubo.

diretamente o procedimento de cálculo na aplicação das leis básicas, é muito importante que ela seja escolhida com cuidado e claramente definida, antes de se iniciar qualquer análise.

1.5.2 Enfoque Diferencial *versus* Enfoque Integral

As leis básicas que aplicamos ao nosso estudo da mecânica dos fluidos podem ser formuladas em termos de sistemas e de volumes de controle infinitesimais ou finitos. Como você poderia supor, as equações parecerão diferentes em cada caso. Ambos os enfoques são importantes no estudo da mecânica dos fluidos, e os dois serão desenvolvidos no decorrer do nosso trabalho.

No primeiro caso, as equações resultantes são equações diferenciais. A solução das equações diferenciais do movimento provê um meio de determinar o comportamento detalhado (ponto a ponto) do fluido.

Freqüentemente, nos problemas em estudo, a informação procurada não requer conhecimento detalhado do escoamento. Muitas vezes estamos interessados, *grosso modo*, no comportamento de um dispositivo; nestes casos, é mais apropriado empregar a formulação integral das leis básicas. Formulações integrais, usando sistemas ou volumes de controle finitos, são geralmente mais fáceis de serem tratadas analiticamente. As leis básicas da mecânica e da termodinâmica, formuladas em termos de sistemas finitos, são a base para a dedução das equações do volume de controle do Cap. 4.

1.5.3 Métodos de Descrição

A mecânica lida quase que exclusivamente com sistemas; você fez uso intensivo das equações básicas aplicadas a uma quantidade de massa identificável e fixa. Ao tentar analisar dispositivos termodinâmicos, muitas vezes você considerou necessário utilizar um volume de controle (sistema aberto). Claramente, o tipo de análise depende do problema.

Quando for fácil acompanhar elementos de massa identificáveis (por exemplo, na mecânica da partícula), utilizaremos um método de descrição que segue a partícula. Isso, às vezes, é mencionado como método de descrição *lagrangeano*.

Considere, por exemplo, a aplicação da segunda lei de Newton a uma partícula de massa fixa m. Matematicamente, podemos escrever a segunda lei de Newton para um sistema de massa m, como

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1.2}$$

Na Eq. 1.2, $\Sigma \vec{F}$ é soma de todas as forças externas atuantes sobre o sistema, $\vec{a}$ e $\vec{V}$ são respectivamente a aceleração e a velocidade do centro de massa do sistema e $\vec{r}$ é o vetor posição do mesmo em relação a um sistema fixo de coordenadas.

EXEMPLO 1.2 — Queda Livre de uma Bola no Ar

A resistência do ar sobre uma bola de 200 g em queda livre, dada por $F_D = 2 \times 10^{-4}\, V^2$, onde F_D é dada em newtons e V em metros por segundo. Se a bola for largada do repouso 500 m acima do solo, determine a velocidade com que atinge o solo. Esta velocidade representa que porcentagem da velocidade terminal máxima?

PROBLEMA-EXEMPLO 1.2

DADOS: Bola, $m = 0{,}2$ kg, largada do repouso a $y_0 = 500$ m

Resistência do ar, $F_D = kV^2$, onde $k = 2 \times 10^{-4}$ N·s²/m²

Unidades: F_D(N), V(m/s)

DETERMINAR: (a) A velocidade com a qual a bola atinge o solo.
(b) A razão entre a velocidade final real e a velocidade terminal.

SOLUÇÃO:

Equação básica: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

Consideração: (1) Despreze a força de flutuação. O movimento da bola é governado pela equação

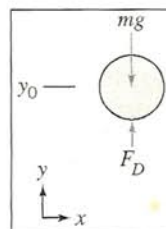
$$\sum F_y = ma_y = m\frac{dV}{dt}$$

Como $V = V(y)$, escrevemos $\sum F_y = m\frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = mV\frac{dV}{dy}$. Então,

$$\sum F_y = F_D - mg = kV^2 - mg = mV\frac{dV}{dy}$$

Separando as variáveis e integrando,

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^V \frac{mV\,dV}{kV^2 - mg}$$

$$y - y_0 = \left[\frac{m}{2k}\ln(kV^2 - mg)\right]_0^V = \frac{m}{2k}\ln\frac{kV^2 - mg}{-mg}$$

Tomando antilogaritmos, obtemos

$$kV^2 - mg = -mg\, e^{\left[\frac{2k}{m}(y-y_0)\right]}$$

Resolvendo para V, obtemos

$$V = \left\{ \frac{mg}{k}\left(1 - e^{\left[\frac{2k}{m}(y-y_0)\right]}\right)\right\}^{1/2}$$

Substituindo valores numéricos com $y = 0$, resulta

$$V = \left\{ 0{,}2\,\text{kg} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{\text{m}^2}{2 \times 10^{-4}\,\text{N}\cdot\text{s}^2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}\left(1 - e^{\left[\frac{2\times2\times10^{-4}}{0{,}2}(-500)\right]}\right)\right\}^{1/2}$$

$$V = 78{,}7\ \text{m/s}$$

V

Na velocidade terminal, $a_y = 0$ e $\sum F_y = 0 = kV_t^2 - mg$

Então,

$$V_t = \left[\frac{mg}{k}\right]^{1/2} = \left[0{,}2\,\text{kg} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{\text{m}^2}{2 \times 10^{-4}\,\text{N}\cdot\text{s}^2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}\right]^{1/2} = 99{,}0\ \text{m/s}.$$

A relação entre a velocidade final real e a velocidade terminal é

$$\frac{V}{V_t} = \frac{78{,}7}{99{,}0} = 0{,}795 \text{ ou } 79{,}5\%$$

$\frac{V}{V_t}$

{ Este problema foi incluído para relembrar o método de descrição usado na mecânica da partícula e para introduzir a variável aerodinâmica força de arrasto. }

Podemos considerar um fluido como composto de grande número de partículas cujo movimento deve ser descrito; acompanhar o movimento de cada partícula fluida separadamente tornar-se-ia um enorme quebra-cabeça. Conseqüentemente, a descrição de uma partícula é impraticável. Achamos muitas vezes conveniente utilizar um tipo diferente de descrição. Particularmente, com a análise de volume de controle, convém usar o método de descrição de campo, ou *euleriano*, que focaliza a atenção sobre as propriedades de um escoamento num determinado ponto do espaço como função do tempo. No método de descrição euleriano, as propriedades do campo de escoamento são descritas como funções das coordenadas espaciais e do tempo. Veremos no Cap. 2 que esse método de descrição é um desenvolvimento lógico da hipótese de que os fluidos podem ser tratados como meios contínuos.

1.6 DIMENSÕES E UNIDADES

Os problemas de engenharia são solucionados para responder a questões específicas. Não é necessário dizer que a resposta deve incluir as unidades. (Faz diferença se o diâmetro requerido de um tubo é de 1 metro ou de 1 pé!) Conseqüentemente, é apropriado apresentar uma breve revisão de dimensões e unidades. Dizemos "revisão" porque o tópico é familiar aos seus estudos anteriores de mecânica.

Referimo-nos a quantidades físicas — comprimento, tempo, massa e temperatura — como *dimensões*. Em termos de um sistema particular de dimensões, todas as quantidades mensuráveis podem ser subdivididas em dois grupos: quantidades primárias (ou básicas) e secundárias (ou derivadas). Referimo-nos a um pequeno grupo de dimensões do qual todos os outros podem ser formados como quantidades primárias. As quantidades primárias são aquelas para as quais estabelecemos escalas arbitrárias de medida; as secundárias são aquelas cujas dimensões são expressas em termos das dimensões das quantidades primárias.

Unidades são os nomes arbitrários (e magnitudes) consignados às dimensões primárias adotadas como padrões de medidas. Por exemplo, a dimensão primária de comprimento pode ser medida em unidades de metros, pés, jardas ou milhas. Cada unidade de comprimento é relacionada à outra por fatores de conversão de unidades (1 milha = 5.280 pés = 1.609 metros).

1.6.1 Sistemas de Dimensões

Qualquer equação válida que relacione quantidades físicas deve ser dimensionalmente homogênea; cada termo da equação deve ter as mesmas dimensões. Reconhecemos que a segunda lei de

Newton ($\vec{F} \propto m\vec{a}$) relaciona as quatro dimensões, F, M, L, e t. Então, força e massa não podem ser selecionadas como dimensões primárias sem introduzir uma constante de proporcionalidade que tenha dimensões (e unidades).

O comprimento e o tempo são dimensões primárias em todos os sistemas dimensionais de uso corrente. Em alguns deles, a massa é tomada como uma dimensão primária. Noutros, a força é selecionada como tal; um terceiro sistema escolhe tanto a força quanto a massa. Temos, assim, três sistemas básicos de dimensões correspondendo aos diferentes modos de especificar as dimensões primárias.

a. Massa $[M]$, comprimento $[L]$, tempo $[t]$, temperatura $[T]$.
b. Força $[F]$, comprimento $[L]$, tempo $[t]$, temperatura $[T]$.
c. Força $[F]$, massa $[M]$, comprimento $[L]$, tempo $[t]$, temperatura $[T]$.

No sistema a, a força $[F]$ é uma dimensão secundária, e a constante de proporcionalidade na segunda lei de Newton é adimensional. No sistema b, a massa $[M]$ é uma dimensão secundária, e mais uma vez a constante de proporcionalidade na segunda lei de Newton é adimensional. No sistema c, tanto a força $[F]$ quanto a massa $[M]$ foram selecionadas como dimensões primárias. Neste caso, a constante de proporcionalidade g_c, na segunda lei de Newton (escrita como $\vec{F} = m\vec{a}/g_c$), não é adimensional. As dimensões de g_c devem, de fato, ser $[ML/Ft^2]$ para que a equação seja dimensionalmente homogênea. O valor numérico da constante de proporcionalidade depende das unidades de medida escolhidas para cada uma das quantidades primárias.

1.6.2 Sistemas de Unidades

Há mais de uma maneira de selecionar a unidade de medida para cada dimensão primária. Apresentaremos apenas os sistemas de unidades mais comuns na engenharia para cada um dos sistemas básicos de dimensões.

a. MLtT

O SI, que é a abreviatura oficial em todas as línguas do Système International d'Unités,[3] é uma extensão e refinamento do sistema métrico tradicional. Mais de 30 países declararam o SI como único sistema legalmente aceito.

No sistema de unidades SI, a unidade de massa é o quilograma (kg), a unidade de comprimento, o metro (m), a unidade de tempo, o segundo (s), e a unidade de temperatura, o kelvin (K). A força é uma dimensão secundária, e a sua unidade, o newton (N), é definida da segunda lei de Newton como

$$1\ \text{N} \equiv 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$

No sistema de unidades Métrico Absoluto, a unidade de massa é o grama, a unidade de comprimento, o centímetro, a unidade de tempo, o segundo, e a unidade de temperatura, o kelvin. Uma vez que a força é uma dimensão secundária, a sua unidade, o dina, é definida em termos da segunda lei de Newton como

$$1\ \text{dina} \equiv 1\ \text{g}\cdot\text{cm/s}^2$$

[3] American Society for Testing and Materials, *ASTM Standard for Metric Practice*, E380-97. Conshohocken, PA: ASTM, 1997.

b. FLtT

No sistema de unidades Gravitacional britânico, a unidade de força é a libra força (lbf), a unidade de comprimento é o pé (pé), a de tempo, o segundo, e a de temperatura, o Rankine (°R). Como a massa é uma dimensão secundária, a sua unidade, o slug, é definida em termos da segunda lei de Newton como

$$1\ \text{slug} \equiv 1\ \text{lbf}\cdot\text{s}^2/\text{pé}$$

c. FMLtT

No sistema de unidades inglês Técnico ou de Engenharia, a unidade de força é a libra força (lbf), a unidade de massa, a libra massa (lbm), a unidade de comprimento, o pé, a unidade de tempo, o segundo, e a de temperatura, o Rankine. Uma vez que tanto a força quanto a massa são escolhidas como unidades primárias, a segunda lei de Newton é escrita como

$$\vec{F} = \frac{m\vec{a}}{g_c}$$

Uma libra força (1 lbf) é a força que imprime à massa de uma libra massa (1 lbm) uma aceleração igual à aceleração padrão da gravidade na Terra, 32,2 pé/s². Da segunda lei de Newton, concluímos que

$$1\ \text{lbf} \equiv \frac{1\ \text{lbm} \times 32{,}2\ \text{pé/s}^2}{g_c}$$

ou

$$g_c \equiv 32{,}2\ \text{pé}\cdot\text{lbm}/(\text{lbf}\cdot\text{s}^2)$$

A constante de proporcionalidade, g_c, tem dimensões e unidades. As dimensões surgiram porque escolhemos a força e a massa como dimensões primárias; as unidades (e o valor numérico) são uma conseqüência de nossas escolhas para os padrões de medição.

Uma vez que uma força de 1 lbf acelera 1 lbm a 32,2 pé/s², aceleraria 32,2 lbm a 1 pé/s². Um slug é também acelerado a 1 pé/s² por uma força de 1 lbf. Portanto,

$$1\ \text{slug} \equiv 32{,}2\ \text{lbm}$$

1.6.3 Sistemas de Unidades Preferenciais

Neste texto usaremos tanto o SI quanto o sistema Gravitacional britânico. Em qualquer dos casos, a constante de proporcionalidade na segunda lei de Newton é adimensional, e tem o valor da unidade. Em conseqüência, a segunda lei de Newton é escrita como $\vec{F} = m\vec{a}$. Nesses sistemas, resulta que a força gravitacional (o "peso"[4]) sobre um objeto de massa m é dada por $W = mg$.

As unidades e prefixos do SI, assim como outras unidades definidas e fatores de conversão úteis, encontram-se resumidos no Apêndice G.

[4] Note que no sistema inglês de Engenharia, o peso de um objeto é dado por $W = mg/g_c$.

1.7 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o estudo do Cap. 1, você deverá ser capaz de:

1. Dar definições operacionais de:
   - fluido
   - condição de não-deslizamento
   - sistema
   - volume de controle
   - método de descrição lagrangeano
   - método de descrição euleriano
   - dimensões
   - unidades
   - homogeneidade dimensional
   - peso
2. Dar exemplos que mostrem a importância da mecânica dos fluidos na compreensão de fenômenos da vida cotidiana e da moderna tecnologia.
3. Listar as cinco leis básicas que regem o movimento dos fluidos.
4. Estabelecer os três sistemas básicos de dimensões.
5. Dar as unidades típicas de quantidades físicas nos sistemas de unidades SI, Gravitacional britânico e inglês Técnico ou de Engenharia.
6. Resolver os problemas ao final do capítulo que se relacionam com o material que você estudou.

PROBLEMAS

1.1 Algumas substâncias comuns são:

Alcatrão — Areia
Massa de calafetar — Gelatina
Argila para modelar — Pasta dental
Cera — Creme de barbear

Alguns desses materiais apresentam características de comportamento sólido e fluido sob condições diferentes. Explique e dê exemplos.

1.2 Um tanque de oxigênio comprimido para corte à chama deve conter 10 kg de oxigênio à pressão de 14 MPa (a temperatura é de 35°C). Qual deve ser o volume do tanque? Qual o diâmetro de uma esfera com esse volume?

1.3 Um tanque contendo nitrogênio comprimido para uso em processos industriais é um cilindro com 150 mm de diâmetro e 1.300 mm de comprimento. A pressão do gás é de 204 atmosferas (manométrica). Calcule a massa de nitrogênio contida no tanque.

1.4 Declare com suas palavras cada uma das cinco leis básicas da conservação apresentadas na Seção 1.4, aplicadas a um sistema.

1.5 Discuta a física do ricochete de uma pedra na superfície de um lago. Compare estes mecanismos com aqueles de uma pedra saltando após ser atirada ao longo de uma rodovia.

1.6 O cilindro da bomba de pneu de bicicleta fica quente durante o uso. Explique os mecanismos responsáveis pelo aquecimento.

1.7 Calcular a massa específica do ar padrão a partir da equação de estado do gás ideal. Estimar a incerteza experimental na massa específica calculada para condições-padrão (760 mm de mercúrio e 15°C) se a incerteza na medida da altura do barômetro é ± 2,5 mm de mercúrio e a incerteza na medida da temperatura é ± 0,3°C. (Note que 760 mm de H_g correspondem a 101,3 kPa (abs.).)

1.8 Repita o cálculo da incerteza descrito no Problema 1.7 para o ar num congelador. Considere que a altura medida no barômetro é 759 ± 1 mm de mercúrio e a temperatura é −20 ± 0,5°C. [Note que 759 mm de mercúrio correspondem a 101 kPa (abs.).]

1.9 A vazão em massa de um escoamento de água, determinado pela coleta da descarga num dado intervalo de tempo, é 0,3 kg/s. A escala usada na medição permite leituras de 0,05 kg, e a precisão do cronômetro é de 0,2 s. Estimar a precisão com a qual a vazão pode ser calculada para intervalos de tempo de (a) 10 s e (b) 1 min.

1.10 Uma lata de ração para cães tem as seguintes dimensões internas: altura de 102 mm e diâmetro de 73 mm (cada uma com ± 1 mm, com grau de certeza de 20 para 1). O rótulo indica a massa do conteúdo como 397 g. Avalie a magnitude da massa específica do alimento e sua incerteza estimada, considerando que o valor da massa é preciso a ± 1 g com o mesmo grau de certeza.

1.11 A massa da bola de golfe oficial americana é 1,62 ± 0,01 oz, e o seu diâmetro médio é 1,68 ± 0,01 pol. Determine a massa específica e a densidade relativa da bola de golfe americana. Estime as incertezas dos valores calculados.

1.12 A massa da bola de golfe oficial britânica é 45,9 ± 0,3 g e o seu diâmetro médio é 41,1 ± 0,3 mm. Determine a massa específica e a densidade relativa da bola de golfe britânica. Estime as incertezas nos valores calculados.

1.13 As dimensões estimadas de uma lata de refrigerante são $D = 66{,}0 \pm 0{,}5$ mm e $H = 110 \pm 0{,}5$ mm. Meça a massa de uma lata cheia e de uma vazia, utilizando uma balança de cozinha ou de correio. Estime o volume de refrigerante contido na lata. De suas medições, estime até que profundidade a lata é enchida e a incerteza da estimativa. Suponha que o valor da densidade relativa é 1,055, conforme fornecido pelo engarrafador.

1.14 A vazão em massa de água em um tubo é medida usando-se um recipiente para coletar água durante um intervalo de tempo cronometrado. A vazão em massa nominal é de 100 g/s. Suponha que a massa é medida com uma balança com precisão de 1 g e capacidade máxima de 1 kg, e que a contagem mínima do cronômetro é 0,1 s. Estime os intervalos de tempo e as incertezas na vazão medida que resultariam da utilização de recipientes de 100, 500 e 1000 ml. Haveria alguma vantagem em se usar o recipiente maior? Considere que a massa do recipiente de 1000 ml, vazio, é de 500 g.

1.15 Uma revista especializada publica dados dos seus testes de estrada sobre a capacidade de aceleração lateral de carros. As medições são feitas utilizando-se uma pista de 200 pés de diâmetro. Suponha que a trajetória do veículo desvia-se do círculo por ± 2 pés e que a velocidade do veículo é medida por um dispositivo medidor com quinta roda, com a precisão de ± 0,5 mph. Estime a incerteza experimental numa aceleração lateral anotada como 0,823 *g*. Como você melhoraria o procedimento experimental a fim de reduzir a incerteza?

1.16 Usando as dimensões nominais da lata de refrigerante do Problema 1.13, determine a precisão com que o diâmetro e a altura devem ser medidos a fim de estimar o volume da lata dentro de uma incerteza de ± 0,5 por cento.

1.17 Uma bola de golfe americana é descrita no Problema 1.11. Considerando a massa medida e sua incerteza conforme dado, determine a precisão com que o diâmetro da bola deve ser medido, de modo que sua massa específica possa ser estimada dentro de uma incerteza de ± 1 por cento.

1.18 A altura de um edifício pode ser estimada medindo-se a distância horizontal até um ponto no solo e o ângulo deste ponto ao topo do edifício. Supondo que essas medições são $L = 30 \pm 0{,}2$ m e $\theta = 30 \pm 0{,}2$ graus, estime a altura do edifício e a incerteza na estimativa. Para a mesma altura de edifício e mesmas incertezas de medição, determine o ângulo (e a correspondente distância do edifício) com o qual as medições deveriam ser feitas para minimizar a incerteza na estimativa da altura. Avalie e trace um gráfico do ângulo de medição ótimo como função da altura do edifício para $15 \leq H \leq 300$ m.

1.19 No projeto de um instrumento médico, deseja-se injetar 1 milímetro cúbico de líquido usando-se uma seringa do tipo pistão-cilindro feita em plástico moldado. A operação de moldagem produz peças de plástico com incertezas dimensionais estimadas em ± 0,05 mm. Calcule a incerteza no volume injetado que resulta das incertezas nas dimensões do dispositivo. Determine a razão entre o curso do pistão e o diâmetro interno do cilindro que dê um projeto com

incerteza mínima no volume útil da seringa. O resultado é influenciado pela magnitude da incerteza dimensional?

1.20 Partículas muito pequenas movendo-se em fluidos experimentam uma força de arrasto proporcional à velocidade. Considere uma partícula de peso líquido W largada num fluido. A partícula é submetida a uma força de arrasto, $F_D = kV$, onde V é a velocidade da partícula. Determine o tempo requerido para a partícula acelerar do repouso até 95 por cento da sua velocidade terminal, V_t, em termos de k, W e g.

1.21 Considere novamente a pequena partícula do Problema 1.20. Exprima a distância requerida para atingir 95 por cento da sua velocidade terminal em termos de g, k e W.

1.22 Um pára-quedista com massa de 75 kg salta de um avião. A força de arrasto aerodinâmico atuante no pára-quedista é dada por $F_D = kV^2$, onde $k = 0{,}228$ N.s²/m². Determine a velocidade máxima de queda livre do pára-quedista e a velocidade atingida após 100 m de queda. Plote a velocidade do pára-quedista como função do tempo e como função da distância de queda.

1.23 Os ingleses aperfeiçoaram o arco-e-flecha como arma após o período medieval. Nas mãos de um arqueiro hábil, a arma era considerada precisa a distâncias até 100 metros ou mais. Se a altitude máxima de uma flecha for inferior a $h = 10$ m, no trajeto para um alvo a 100 m de distância do arqueiro, e desprezando a resistência do ar, estime a velocidade e o ângulo com que a flecha deve deixar o arco. Plote a velocidade e o ângulo de disparo como função da altura h.

1.24 Um pára-quedista, com massa $m = 80$ kg, salta de um avião que voa a baixa velocidade, e cai diretamente na vertical. A força de arrasto aerodinâmico atuando sobre o pára-quedista é $F_D = kV^2$, onde $k = 0{,}27$ N·s²/m², e V é a velocidade relativa ao ar. Avalie a velocidade terminal do pára-quedista. Compare com o caso em que a resistência do ar é desprezada. Avalie a distância vertical requerida para que ele atinja 95 por cento da velocidade terminal. Compare com a distância necessária para atingir a mesma velocidade, caso a resistência do ar fosse desprezada. Plote a velocidade do pára-quedista em função do tempo e em função da distância de queda.

1.25 Para cada quantidade relacionada, indique as dimensões usando o sistema *MLtT* de dimensões e dê unidades típicas SI e inglesas:
(a) Potência
(b) Pressão
(c) Módulo de elasticidade
(d) Velocidade angular
(e) Energia
(f) Quantidade de movimento
(g) Tensão de cisalhamento
(h) Calor específico
(i) Coeficiente de expansão térmica

1.26 Para cada quantidade relacionada, indique as dimensões usando o sistema *FLtT* de dimensões e dê unidades típicas SI e inglesas:
(a) Potência
(b) Pressão
(c) Módulo de elasticidade
(d) Velocidade angular
(e) Energia
(f) Momento de uma força
(g) Quantidade de movimento
(h) Tensão de cisalhamento
(i) Deformação

1.27 Deduza os seguintes fatores de conversão:
(a) Converta uma pressão de 1 Pa para lbf/pol².
(b) Converta o volume de 1 galão para litros.
(c) Converta uma viscosidade de 1 N·s/m² para lbf·s/pé².

1.28 Deduza os seguintes fatores de conversão:
(a) Converta uma tensão de 1 N/m² para lbf/pol².
(b) Converta 1 HP para N·m/s.
(c) Converta 1 BTU/lbm para N·m/kg.

1.29 A massa específica do mercúrio é dada como 26,3 slug/pé³. Calcule a densidade relativa do mercúrio e o seu volume específico em m³/kg. Calcule o peso específico em lbf/pé³ na Terra e na Lua. A aceleração da gravidade na Lua é 5,47 pé/s².

1.30 Deduza os seguintes fatores de conversão:
(a) Converta uma vazão volumétrica de metros cúbicos por segundo para pés cúbicos por segundo.
(b) Converta uma vazão volumétrica de água de pés cúbicos por segundo para galões por minuto.
(c) Converta uma vazão volumétrica de água de galões por hora para litros por segundo.
(d) Converta uma vazão volumétrica de ar de pés cúbicos padrão por minuto para metros cúbicos por hora. Um pé cúbico padrão de gás ocupa um pé cúbico na temperatura e pressão padrão ($T = 15$°C e $p = 101{,}3$ kPa absolutos).

1.31 O quilograma força é normalmente usado na Europa como unidade de força. (Assim como no sistema normalmente utilizado nos EUA, em que 1 lbf é a força exercida por uma massa de 1 lbm na gravidade padrão, 1 kgf é a força exercida por uma massa de 1 kg na gravidade padrão.) Pressões moderadas, tais como aquelas utilizadas para calibrar pneus de automóveis e de caminhões, são expressas em kgf/cm². Converta 32 psig para estas unidades.

1.32 Numa instituição conhecida por suas proezas no basquetebol, um novo conjunto de unidades físicas foi sugerido. A unidade básica de comprimento seria o "lançamento", igual a 21 pés; a unidade básica do tempo seria o "tiro", igual a 45 s; a unidade básica da força seria o "basquetebol", igual a 21 oz. Determine os fatores de conversão entre essas unidades e seus equivalentes SI. Como ficariam as unidades de massa nos dois sistemas?

1.33 Numa instituição conhecida por suas proezas no beisebol, foi sugerido que força, velocidade e comprimento fossem considerados dimensões básicas. A unidade básica de força é o "beisebol", igual a 5,1 oz; a unidade básica de velocidade é a "rebatida", igual a 90 mph; a unidade básica de comprimento é a "retirada", igual a 385 pés. Determine os fatores de conversão entre essas unidades e seus equivalentes SI. Qual é a unidade de massa do novo sistema? Qual é o fator de conversão entre esta unidade de massa e a unidade no SI?

1.34 Um recipiente pesa 2,9 lbf quando vazio. Quando cheio com água a 90°F, a massa do recipiente e do seu conteúdo é de 1,95 slug. Determine o peso de água no recipiente e seu volume em pés cúbicos, usando dados do Apêndice A.

Capítulo 2

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

No Cap. 1, indicamos que o nosso estudo de mecânica dos fluidos teria como alicerce conhecimentos anteriores de mecânica e termodinâmica. A fim de desenvolver uma abordagem unificada, iremos rever alguns tópicos familiares e introduzir novos conceitos e definições. O objetivo deste capítulo é desenvolver estes conceitos fundamentais.

2.1 O FLUIDO COMO UM CONTÍNUO

Na nossa definição de fluido, nenhuma menção foi feita à estrutura molecular da matéria. Todos os fluidos são compostos de moléculas em constante movimento. Contudo, na maioria das aplicações de engenharia, estamos interessados nos efeitos médios ou macroscópicos de muitas moléculas. São esses efeitos macroscópicos que geralmente percebemos e medimos. Tratamos, assim, um fluido como uma substância infinitamente divisível, um *contínuo*, e deixamos de lado o comportamento das moléculas individuais.

O conceito de um contínuo é a base da mecânica dos fluidos clássica. A hipótese é válida no tratamento do comportamento dos fluidos sob condições normais. Entretanto, ela passa a ser falha sempre que a trajetória média livre das moléculas[1] se torna da mesma ordem de grandeza da menor dimensão característica significativa do problema. Em casos como o escoamento de um gás rarefeito (como encontrado, por exemplo, em vôos nas camadas superiores da atmosfera), devemos abandonar o conceito de contínuo em favor dos pontos de vista microscópico e estatístico.

Em conseqüência da hipótese do contínuo, cada propriedade do fluido é considerada como tendo um valor definido em cada ponto do espaço. Dessa forma, as propriedades dos fluidos como massa específica, temperatura, velocidade etc. são consideradas funções contínuas da posição e do tempo.

Para ilustrar o conceito de uma propriedade num ponto, considere a maneira pela qual determinamos a massa específica num ponto. Uma região de fluido é mostrada na Fig. 2.1. Estamos interessados em determinar a massa específica no ponto C, cujas coordenadas são x_0, y_0 e z_0. A massa específica é definida como massa por unidade de volume. Então, a massa específica média dentro do volume $\forall$ será dada por $\rho = m/\forall$. Em geral, isso não será igual ao valor da massa específica no ponto C. Para determinar a massa específica em C, devemos selecionar um pequeno volume $\delta\forall$, ao redor do ponto C e determinar a razão $\delta m/\delta\forall$. A questão é: quão pequeno deve ser o volume $\delta\forall$? Responderemos esta questão, marcando num gráfico os valores da razão, $\delta m/\delta\forall$, e permitindo que o volume $\delta\forall$ encolha continuamente. Considerando que o volume $\delta\forall$ é relativamente grande no início (porém ainda pequeno comparado ao volume $\forall$), um gráfico típico de $\delta m/\delta\forall$ deverá ter o aspecto mostrado na Fig. 2.1*b*. Em outras palavras, $\delta\forall$ deve ser suficientemente grande para fornecer um valor significativo e reproduzível da massa específica num local e ainda pequeno o suficiente para poder detectar variações espaciais da massa específica. A massa específica média tende a aproximar-se de um valor assintótico à medida que o volume é reduzido, encerrando apenas fluido homogêneo na vizinhança imediata do ponto C. Quando $\delta\forall$ fica tão pequeno que passa a conter apenas um pequeno número de moléculas, torna-se impossível fixar um valor definido para $\delta m/\delta\forall$; o valor irá variar imprevisivelmente enquanto moléculas cruzam para dentro e para fora do volume. Há, por conseguinte, um valor limite inferior para $\delta\forall$, designado $\delta\forall'$ na Fig. 2.1*b*, permissível para uso na definição de massa específica num ponto.[2] A massa específica num "ponto" é então definida como

$$\rho \equiv \lim_{\delta\forall \to \delta\forall'} \frac{\delta m}{\delta\forall} \tag{2.1}$$

Uma vez que o ponto C foi arbitrário, a massa específica em qualquer ponto do fluido poderia ser determinada de modo semelhante. Se determinações de massa específica fossem feitas simultaneamente em um número infinito de pontos do fluido, obteríamos uma expressão para a distribuição de massa específica como função das coordenadas espaciais, $\rho = \rho(x, y, z)$, no instante de tempo dado.

Obviamente, a massa específica em qualquer ponto pode variar com o tempo como resultado de trabalho realizado sobre o fluido, ou por ele, ou de transferência de calor para o mesmo. Então, a representação completa da massa específica (a representação de *campo*) é dada por

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \tag{2.2}$$

---

[1] Aproximadamente 6×10^{-8} m à CNTP (condição normal de temperatura e pressão) para moléculas de gás que se comportam como um gás perfeito [1]. CNTP para o ar corresponde a 15°C (59°F) e 101,3 kPa absolutos (14,696 psia), respectivamente.

[2] O tamanho de $\delta\forall$ é extremamente pequeno. Por exemplo, 1 m^3 de ar na CNTP contém aproximadamente $2{,}5 \times 10^{25}$ moléculas. Assim, o número de moléculas num volume de 10^{-12} m^3 (aproximadamente o tamanho de um grão de areia) seria $2{,}5 \times 10^{13}$. Este número é certamente grande o suficiente para assegurar que a massa média dentro de $\delta\forall$ será constante.

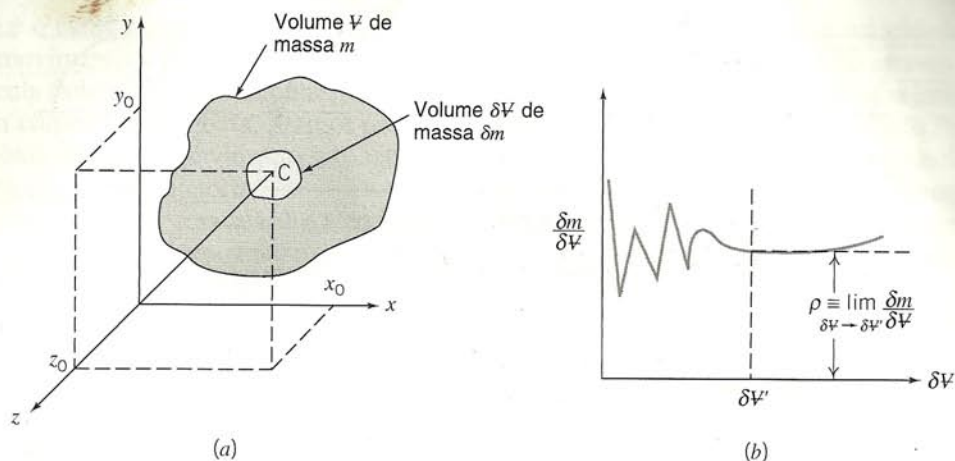



Fig. 2.1 Definição de massa específica num ponto.

Como a massa específica é uma quantidade escalar, exigindo apenas a especificação de uma magnitude para descrição completa, o campo representado pela Eq. 2.2 é escalar.

A massa específica de um líquido ou de um sólido pode também ser expressa na forma adimensional a partir da *gravidade específica*, SG, ou densidade relativa, definida como sendo a razão entre a massa específica do material e a máxima massa específica da água, que é 1000 kg/m³ a 4°C (1,94 slug/pé³ a 39°F). O Apêndice A contém dados de gravidade específica de materiais selecionados para a engenharia. A gravidade específica de líquidos é uma função da temperatura; para a maioria dos líquidos a gravidade específica decresce com o aumento da temperatura.

O *peso específico*, γ, é definido como sendo o peso por unidade de volume; peso é massa vezes aceleração da gravidade, e massa específica é massa por unidade de volume, portanto $\gamma \equiv \rho g$.

2.2 CAMPO DE VELOCIDADE

Na seção anterior, vimos que a hipótese do contínuo levou diretamente à noção do campo de massa específica. Outras propriedades dos fluidos também podem ser descritas por meio de campos.

Ao lidarmos com fluidos em movimento, estaremos necessariamente preocupados com a descrição de um campo de velocidade. Volte novamente à Fig. 2.1*a*. Defina a velocidade do fluido no ponto *C* como a velocidade instantânea no centro de gravidade do volume, $\delta\mathcal{V}'$, que instantaneamente envolve o ponto *C*. Se definirmos uma *partícula fluida* como uma pequena massa do fluido, de identidade fixa, de volume $\delta\mathcal{V}'$, segue-se que a velocidade no ponto *C* é definida como a velocidade instantânea da partícula fluida que, num dado instante, está passando pelo ponto *C*. A velocidade em qualquer ponto do campo de escoamento é definida de modo similar. Num dado instante, o campo de velocidade, $\vec{V}$, é uma função das coordenadas espaciais *x*, *y*, *z*. A velocidade em qualquer ponto do campo de escoamento pode variar de um instante a outro. Então, a representação completa da velocidade (o campo de velocidade) é dada por

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \tag{2.3}$$

Velocidade é uma quantidade vetorial, exigindo uma magnitude e uma direção para uma completa descrição; por conseguinte, o campo de velocidade (Eq. 2.3) é um campo vetorial.

O vetor velocidade, $\vec{V}$, pode também ser escrito em termos dos seus três componentes escalares. Denotando os componentes nas direções *x*, *y*, *z* por *u*, *v*, *w*, então

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \tag{2.4}$$

Em geral, cada componente, *u*, *v* e *w*, será uma função de *x*, *y*, *z* e *t*.

Se as propriedades em cada ponto de um campo de escoamento não mudam com o tempo, o escoamento é denominado *permanente*. Matematicamente, a definição de escoamento permanente é

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

onde η representa qualquer propriedade do fluido. Para o escoamento permanente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho = \rho(x, y, z)$$

e

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$$

Dessa forma, no escoamento permanente, qualquer propriedade pode variar de ponto a ponto no campo, mas todas as propriedades permanecerão constantes com o tempo, em cada ponto.

2.2.1 Escoamentos Uni, Bi e Tridimensionais

Um escoamento é classificado como uni, bi ou tridimensional em função do número de coordenadas espaciais necessárias para se especificar o campo de velocidade.[3] A Eq. 2.3 indica que o campo de velocidade pode ser uma função de três coordenadas espaciais e do tempo. Tal campo de escoamento é denominado *tridimensional* (ele é também *transiente*), porque a velocidade

[3] Alguns autores preferem classificar um escoamento como uni, bi ou tridimensional em função do número de coordenadas espaciais necessárias para se especificar todas as propriedades do fluido. Neste texto, a classificação dos campos de escoamento será baseada apenas no número de coordenadas espaciais requeridas para se especificar o campo de velocidade.

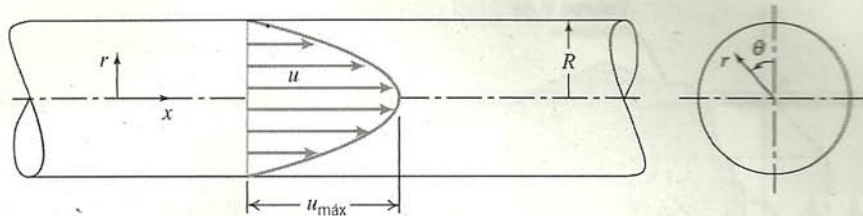



Fig. 2.2 Exemplo de escoamento unidimensional.

em qualquer um de seus pontos depende das três coordenadas requeridas para se localizar o ponto no espaço.

Embora a maioria dos campos de escoamento seja intrinsecamente tridimensional, a análise baseada numa quantidade menor de dimensões é, com freqüência, significativa. Considere, por exemplo, o escoamento permanente através de um longo tubo retilíneo de seção constante. Longe da entrada do tubo, a distribuição de velocidade pode ser descrita por

$$u = u_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{2.5}$$

Esse perfil é mostrado na Fig. 2.2, onde coordenadas cilíndricas, r, θ, x, são empregadas para localizar qualquer ponto no campo de escoamento. O campo de velocidade é uma função de r apenas; é independente das coordenadas x e θ. Este é, portanto, um escoamento unidimensional.

Um exemplo de escoamento bidimensional é ilustrado na Fig. 2.3; a distribuição de velocidades é mostrada para um escoamento entre paredes retas divergentes, imaginadas como infinitas em extensão (na direção z). Como o canal é considerado infinito na direção z, o campo de velocidade será idêntico em todos os planos perpendiculares ao eixo dos z. Conseqüentemente, o campo de velocidade é uma função das coordenadas espaciais x e y, apenas; o campo de escoamento é classificado como bidimensional.

Como você pode imaginar, a complexidade da análise cresce consideravelmente com o número de dimensões do campo de escoamento. Para muitos problemas encontrados na engenharia, uma análise unidimensional é adequada para fornecer soluções aproximadas, com a precisão requerida na prática.

Como todos os fluidos que satisfazem a hipótese do contínuo devem ter velocidade relativa nula numa superfície sólida (para atender à condição de não deslizamento), a maioria dos escoamentos é intrinsecamente bi ou tridimensional. Para fins de análise, muitas vezes é conveniente introduzir a noção de *escoamento uniforme* em uma dada seção reta. Num escoamento que é uniforme numa dada seção reta, a velocidade é constante através de qualquer seção normal ao escoamento. Com esta consideração,[4] o escoamento bidimensional da Fig. 2.3 é modelado como o escoamento mostrado na Fig. 2.4. Neste último, o campo de velocidade é uma função de x somente e, portanto, o modelo de escoamento é unidimensional. (Outras propriedades, tais como massa específica ou pressão, também podem ser consideradas uniformes numa seção, se apropriado.)

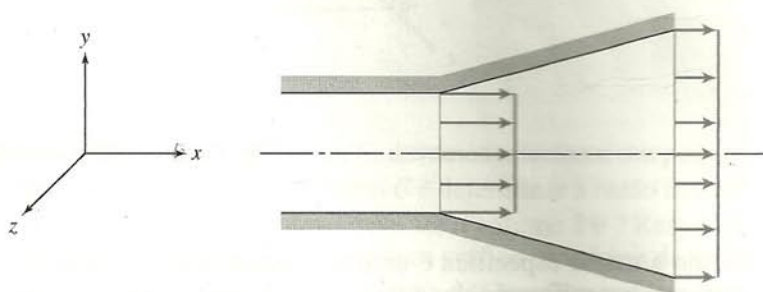



Fig. 2.3 Exemplo de escoamento bidimensional.

Fig. 2.4 Exemplo de escoamento uniforme numa seção.

O termo *campo de escoamento uniforme* (em contraposição a escoamento uniforme numa seção) é empregado para descrever um escoamento no qual o módulo e o sentido do vetor velocidade são constantes, ou seja, independentes de todas as coordenadas espaciais, através de todo o campo.

2.2.2 Linhas de Tempo, Trajetórias, Linhas de Emissão e Linhas de Corrente

Na análise de problemas de mecânica dos fluidos, freqüentemente é vantajoso obter uma representação visual do campo de escoamento [2]. Tal representação é provida pelas linhas de tempo, de trajeto, de emissão e de corrente.[5]

Se, num campo de escoamento, uma quantidade de partículas fluidas adjacentes forem marcadas num dado instante, elas formarão uma linha no fluido naquele instante; esta linha é chamada *linha de tempo*. Observações subseqüentes da linha podem fornecer informações a respeito do campo. Por exemplo, ao discutirmos o comportamento de um fluido sob a ação de uma força de cisalhamento constante (Seção 1.2), linhas de tempo foram introduzidas para demonstrar a deformação do fluido em instantes sucessivos.

[4] A conveniência, apenas, não justifica essa suposição; muitas vezes, resultados de precisão aceitável são obtidos. Hipóteses amplas como a do escoamento uniforme numa seção reta devem ser sempre aplicadas com cautela a fim de assegurar um modelo analítico do escoamento real que seja razoável.

[5] As linhas de tempo, de trajeto, de emissão e de corrente são demonstradas no filme da NCFMF *Flow Visualization*.

Uma *linha de trajeto* é o caminho ou *trajetória* traçada por uma partícula fluida em movimento. Para torná-la visível, temos que identificar uma partícula fluida num dado instante, por exemplo, pelo emprego de um corante; em seguida, tiramos uma fotografia de exposição prolongada do seu movimento subseqüente. A linha traçada pela partícula é uma trajetória.

Por outro lado, poderíamos preferir concentrar a atenção em um local fixo do espaço e identificar, novamente pelo emprego de corante, todas as partículas fluidas que passam por aquele ponto. Após um curto período, teríamos uma certa quantidade de partículas fluidas identificáveis no escoamento; todas elas, em algum momento, teriam passado por um local fixo no espaço. A linha unindo essas partículas fluidas é definida como uma *linha de emissão*.

As *linhas de corrente* são aquelas desenhadas no campo de escoamento de forma que, num dado instante, são tangentes à direção do escoamento em cada ponto do campo. Como as linhas de corrente são tangentes ao vetor velocidade em cada ponto do campo, não pode haver escoamento através delas. O procedimento adotado para obter a equação de uma linha de corrente num escoamento bidimensional é ilustrado pelo Problema-Exemplo 2.1.

No escoamento permanente, a velocidade em cada ponto do campo permanece constante com o tempo e, em conseqüência, as linhas de corrente não variam de um instante a outro. Isto implica que uma partícula localizada numa determinada linha de corrente permanecerá sobre a mesma. Além disso, partículas consecutivas passando através de um ponto fixo do espaço estarão sobre a mesma linha de corrente e, subseqüentemente, permanecerão nela. Então, num escoamento permanente, trajetórias e linhas de emissão e de corrente são linhas idênticas no campo de escoamento.

A forma das linhas de corrente pode variar de instante a instante se o escoamento for transiente. Neste caso, as trajetórias, as linhas de emissão e as linhas de corrente não coincidem.

EXEMPLO 2.1 — Linhas de Corrente e Trajetórias no Escoamento Bidimensional

Um campo de velocidade é dado por $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$; as unidades de velocidade são m/s; x e y são dados em metros; $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$.

(a) Obtenha uma equação para as linhas de corrente no plano xy.
(b) Trace a linha de corrente que passa pelo ponto $(x_0, y_0, 0) = (2, 8, 0)$.
(c) Determine a velocidade de uma partícula no ponto (2, 8, 0).
(d) Se a partícula que passa pelo ponto $(x_0, y_0, 0)$ for marcada no instante $t_\varphi = 0$, determine a sua localização no instante $t = 6$ s.
(e) Qual a velocidade da partícula em $t = 6$ s?
(f) Mostre que a equação do trajeto da partícula (trajetória) é a mesma equação da linha de corrente.

PROBLEMA-EXEMPLO 2.1

DADOS: Campo de velocidade, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$; x e y em metros; $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$.

DETERMINAR:
(a) A equação das linhas de corrente no plano xy.
(b) O traçado da linha de corrente pelo ponto (2, 8, 0).
(c) A velocidade da partícula no ponto (2, 8, 0).
(d) A posição em $t = 6$ s da partícula localizada em (2, 8, 0) em $t = 0$.
(e) A velocidade da partícula na posição encontrada em (d).
(f) A equação da trajetória da partícula localizada em (2, 8, 0) em $t = 0$.

SOLUÇÃO:

(a) As linhas de corrente são aquelas desenhadas no campo de escoamento de modo que, num dado instante, são tangentes à direção do escoamento, em cada ponto.
Portanto,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{linha de corrente}} = \frac{v}{u} = \frac{-Ay}{Ax} = \frac{-y}{x}$$

Separando variáveis e integrando, obtemos

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

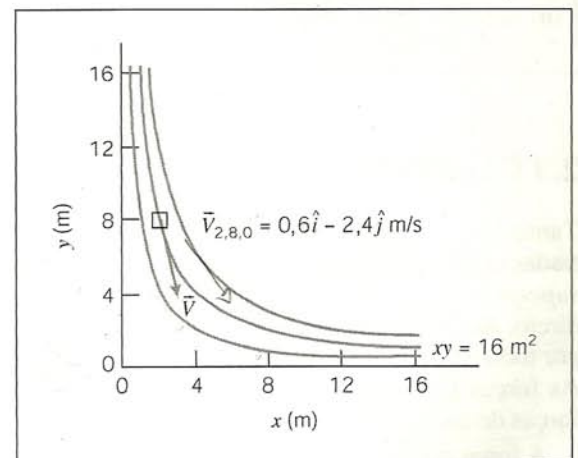
ou

$$\ln y = -\ln x + c_1$$

Isto pode ser escrito como $xy = c$

(b) Para a linha de corrente que passa pelo ponto $(x_0, y_0, 0) = (2, 8, 0)$, a constante c tem um valor de 16 e a equação da linha de corrente que passa pelo ponto (2, 8, 0) é

$$xy = x_0 y_0 = 16\ \text{m}^2$$

O gráfico é esquematizado acima.

(c) O campo de velocidade é $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$;. No ponto (2, 8, 0) a velocidade é

$$\vec{V} = A(x\hat{i} - y\hat{j}) = 0{,}3\ \text{s}^{-1}(2\hat{i} - 8\hat{j})\ \text{m} = 0{,}6\hat{i} - 2{,}4\hat{j}\ \text{m/s}$$

(d) Uma partícula movendo-se no campo de escoamento terá a velocidade dada por

$$\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$$

Então

$$u_p = \frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{e} \quad v_p = \frac{dy}{dt} = -Ay$$

Separando as variáveis e integrando (em cada equação) resulta

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t A\,dt \quad \text{e} \quad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \int_0^t -A\,dt$$

Então

$$\ln\frac{x}{x_0} = At \quad \text{e} \quad \ln\frac{y}{y_0} = -At$$

ou

$$x = x_0 e^{At} \quad \text{e} \quad y = y_0 e^{-At}$$

Para $t = 6$ s,

$$x = 2\ \text{m}\ e^{(0,3)6} = 12{,}1\ \text{m} \quad \text{e} \quad y = 8\ \text{m}\ e^{-(0,3)6} = 1{,}32\ \text{m}$$

Para $t = 6$ s, a partícula estará em (12,1, 1,32, 0) m

(e) No ponto (12,1, 1,32, 0) m,

$$\vec{V} = A(x\hat{i} - y\hat{j}) = 0{,}3\ \text{s}^{-1}(12{,}1\hat{i} - 1{,}32\hat{j})\ \text{m} = 3{,}63\hat{i} - 0{,}396\hat{j}\ \text{m/s}$$

(f) Para determinar a equação da linha de corrente, empregamos as equações paramétricas

$$x = x_0 e^{At} \quad \text{e} \quad y = y_0 e^{-At}$$

e eliminamos t. Resolvendo para e^{At} nas duas equações

$$e^{At} = \frac{y_0}{y} = \frac{x}{x_0}$$

Portanto $xy = x_0 y_0 = 16\ \text{m}^2$

Nota:
(i) a equação da linha de corrente por $(x_0, y_0, 0)$ e a da trajetória traçada pela partícula passando pelo mesmo ponto são as mesmas, para esse escoamento uniforme.
(ii) seguindo a partícula (método de descrição Lagrangeano), tanto as coordenadas (x, y) da partícula quanto as componentes da sua velocidade ($u_p = dx/dt$ e $v_p = dy/dt$) são funções do tempo.

2.3 CAMPO DE TENSÃO

Tanto forças de superfície quanto forças de campo são encontradas no estudo da mecânica dos meios contínuos. As *forças de superfície* atuam nas fronteiras de um meio através do contato direto. As forças desenvolvidas sem contato físico e distribuídas por todo o volume do fluido são denominadas *forças de campo*. As forças gravitacionais e eletromagnéticas são exemplos de forças de campo.

A força gravitacional atuando sobre um elemento de volume, $d\forall$, é dada por $\rho\vec{g}\,d\forall$, onde ρ é a massa específica (massa por unidade de volume) e $\vec{g}$ é a aceleração local da gravidade. Segue-se que a força de campo gravitacional é $\rho\vec{g}$ por unidade de volume e $\vec{g}$ por unidade de massa.

As tensões num meio resultam das forças que atuam em alguma porção dele. O conceito de tensão nos dá uma forma conveniente de descrever o modo pelo qual as forças atuantes nas fronteiras do meio são transmitidas através dele. Como a força e a área são ambas quantidades vetoriais, podemos prever que o campo de tensão não será vetorial. Mostraremos que, em geral, são necessárias nove quantidades para especificar o estado de tensão num fluido. (O campo de tensão tem nove componentes que se comportam como um tensor de segunda ordem. O campo de tensões é, portanto, um campo tensorial.)

Imagine uma superfície qualquer no interior de um fluido em escoamento, e considere a força de contato transmitida de uma face da superfície para a outra. Considere uma porção, $\delta\vec{A}$, da superfície na vizinhança do ponto C. A orientação de $\delta\vec{A}$ é dada pelo vetor unitário, $\hat{n}$, mostrado na Fig. 2.5. O vetor $\hat{n}$ é normal à superfície apontando para fora dela, ou seja, no sentido da transmissão da força de contato.

A força, $\delta\vec{F}$, atuando sobre $\delta\vec{A}$, pode ser decomposta em

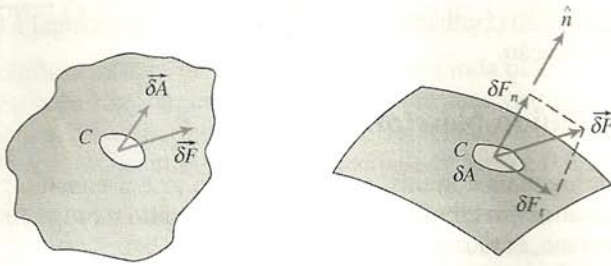



Fig. 2.5 O conceito de tensão num meio contínuo.

duas componentes, uma normal e a outra tangente à área. Uma tensão normal σ_n e uma tensão cisalhante τ_n, são então definidas como

$$\sigma_n = \lim_{\delta A_n \to 0} \frac{\delta F_n}{\delta A_n} \tag{2.6}$$

e

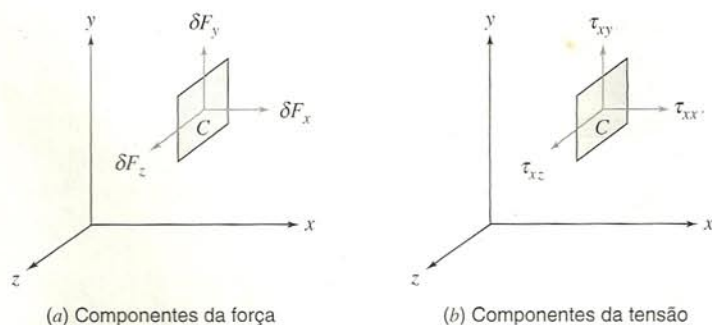
$$\tau_n = \lim_{\delta A_n \to 0} \frac{\delta F_t}{\delta A_n} \tag{2.7}$$

O índice n na tensão foi incluído para lembrar que as tensões estão associadas com a superfície $\delta \vec{A}$ que passa por C, tendo uma normal com a direção e sentido de $\hat{n}$. Para qualquer outra superfície passando por C, os valores das tensões são diferentes.

Ao lidar com quantidades vetoriais tais como a força, é usual considerar as componentes num sistema de coordenadas cartesianas. Em coordenadas ortogonais, podemos considerar as tensões atuando em planos cujas normais orientadas para fora estão nas direções dos eixos x, y e z. Na Fig. 2.6, consideramos a tensão no elemento δA_x cuja normal orientada para fora está na direção do eixo x. A força, $\delta \vec{F}$, foi decomposta em componentes ao longo de cada eixo coordenado. Dividindo a magnitude de cada componente da força pela área, δA_x, e tomando o limite quando δA_x se aproxima de zero, definimos as três componentes da tensão mostradas na Fig. 2.6*b*:

$$\sigma_{xx} = \lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_x} \tag{2.8}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta F_y}{\delta A_x} \qquad \tau_{xz} = \lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta F_z}{\delta A_x}$$

Utilizamos índice duplo para designar as tensões. O primeiro índice (neste caso, x) indica o plano no qual a tensão atua (neste caso, a superfície perpendicular ao eixo x). O segundo índice indica a direção na qual a tensão atua.

Ao considerarmos a área elementar δA_y, definiremos as tensões σ_{yy}, τ_{yx} e τ_{yz}; a utilização da área elementar δA_z levaria, de modo semelhante, à definição de σ_{zz}, τ_{zx} e τ_{zy}.

Um número infinito de planos pode passar pelo ponto C, resultando num número infinito de tensões associadas a estes planos. Felizmente, o estado de tensão num ponto pode ser completamente descrito pela especificação das tensões atuantes em três planos que passam por ele e que são mutuamente perpendiculares. A tensão num ponto é então especificada pelas nove componentes

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

onde σ foi usado para denotar uma tensão normal, e τ para denotar uma tensão cisalhante. A notação para designação de tensão é mostrada na Fig. 2.7.

Referindo-nos ao elemento infinitesimal mostrado na Fig. 2.7, vemos que há seis planos (dois planos x, dois planos y e dois planos z), nos quais as tensões podem atuar. Para designar o plano de interesse, poderíamos usar termos como frontal e posterior, superior e inferior, ou esquerdo e direito. Contudo, é mais lógico nomear os planos em termos dos eixos de coordenadas. Os planos são nomeados e denotados como positivos ou negativos de acordo com o sentido da sua normal. Dessa forma, o plano superior, por exemplo, é um plano y positivo; o posterior, é um plano z negativo.

Também é necessário adotar uma convenção de sinais para a tensão. Uma componente da tensão é positiva quando o seu sentido e o plano no qual atua são ambos positivos ou ambos negativos. Assim, $\tau_{yx} = 35$ kPa representa uma tensão de cisalhamento num plano y positivo na direção positiva de x, ou uma tensão de cisalhamento num plano y negativo na direção negativa de x. Na Fig. 2.7, todas as tensões foram traçadas como positivas. As componentes das tensões são negativas quando o seu sentido e o plano no qual atuam têm sinais opostos.

Fig. 2.6 Componentes da força e da tensão sobre um elemento de área δA_x.

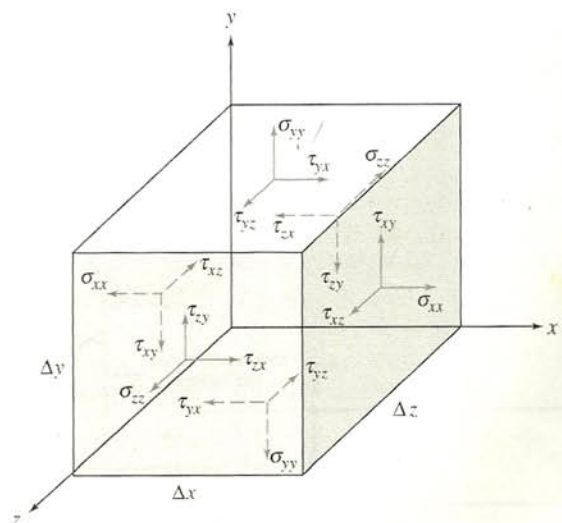



Fig. 2.7 Notação para tensões.

2.4 VISCOSIDADE

Definimos um fluido como sendo uma substância que se deforma continuamente sob a ação de uma tensão de cisalhamento. Na ausência desta, não haverá deformação. Os fluidos podem ser classificados, de modo geral, de acordo com a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de deformação.

Considere o comportamento de um elemento fluido entre duas placas infinitas como mostrado na Fig. 2.8. A placa superior move-se a velocidade constante, δu, sob a influência de uma força constante aplicada, δF_x. A tensão de cisalhamento, τ_{yx}, aplicada ao elemento fluido é dada por

$$\tau_{yx} = \lim_{\delta A_y \to 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_y} = \frac{dF_x}{dA_y}$$

onde δA_y é a área do elemento fluido em contato com a placa, e δF_x é a força exercida pela placa sobre esse elemento. Durante o intervalo de tempo δt, o elemento fluido é deformado da posição $MNOP$ para a posição $M'NOP'$. A taxa de deformação do fluido é dada por

$$\textit{taxa de deformação} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Para calcular a tensão de cisalhamento, τ_{yx}, é desejável expressar $d\alpha/dt$ em função de quantidades prontamente mensuráveis. Isso pode ser feito facilmente. A distância, δl, entre os pontos M e M' é dada por

$$\delta l = \delta u \, \delta t$$

ou, alternativamente, para pequenos ângulos,

$$\delta l = \delta y \, \delta \alpha$$

Igualando estas duas expressões, obtemos

$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{\delta u}{\delta y}$$

Tomando os limites em ambos os lados da igualdade, temos

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}$$

Dessa forma, o elemento fluido da Fig. 2.8, quando submetido à tensão de cisalhamento, τ_{yx}, experimenta uma taxa de deformação (*taxa de cisalhamento*) dada por du/dy. Os fluidos nos quais a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação são chamados *fluidos newtonianos*. A expressão *não-newtoniano* é empregada para classificar todos os fluidos nos quais a tensão cisalhante não é diretamente proporcional à taxa de deformação.

2.4.1 Fluido Newtoniano

Os fluidos mais comuns, como a água, o ar e a gasolina, são newtonianos em condições normais. Se o fluido da Fig. 2.8 for newtoniano, então

$$\tau_{yx} \propto \frac{du}{dy} \tag{2.9}$$

Se considerarmos as deformações de dois diferentes fluidos newtonianos, por exemplo, glicerina e água, verificaremos que eles irão se deformar a taxas diferentes sob a ação da mesma tensão de cisalhamento aplicada. A glicerina apresenta uma resistência à deformação muito maior do que a água. Dizemos, então, que ela é muito mais viscosa. A constante de proporcionalidade na Eq. 2.9 é a *viscosidade absoluta* (ou *dinâmica*), μ. Portanto, em termos das coordenadas da Fig. 2.8, a lei de Newton da viscosidade é dada, para o escoamento unidimensional, por

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.10}$$

Note que, como as dimensões de τ são $[F/L^2]$ e as dimensões de du/dy são $[1/t]$, segue-se que μ tem dimensões $[Ft/L^2]$. Uma vez que as dimensões de força, F, massa, M, comprimento, L, e tempo, t, relacionam-se através da segunda lei de Newton para o movimento, as dimensões de μ também podem ser expressas como $[M/Lt]$. No Sistema Gravitacional Britânico, as unidades de viscosidade são lbf·s/pé^2 ou slug/pé·s. No Sistema Métrico Absoluto, a unidade básica de viscosidade é chamada poise [1 poise ≡ 1 g/(cm·s)]; no SI, as unidades de viscosidade são kg/(m·s) ou Pa·s (1 Pa·s = 1 N·s/m^2). O cálculo da tensão de cisalhamento viscoso é ilustrado no Problema-Exemplo 2.2.

Na mecânica dos fluidos, a razão entre a viscosidade absoluta, μ, e a massa específica, ρ, surge com freqüência. Esta razão toma o nome de *viscosidade cinemática* e é representada pelo símbolo ν. Como a massa específica tem as dimensões $[M/L^3]$, as dimensões de ν são $[L^2/t]$. No Sistema Métrico Absoluto, a unidade de ν é o stoke (1 stoke ≡ 1 cm^2/s).

O Apêndice A apresenta dados de viscosidade para diversos fluidos newtonianos comuns. Note que, para gases, a viscosidade aumenta com a temperatura, enquanto para líquidos a viscosidade diminui com o aumento de temperatura.

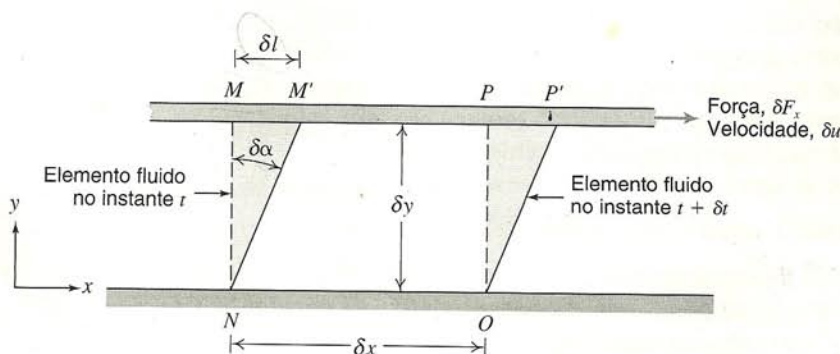
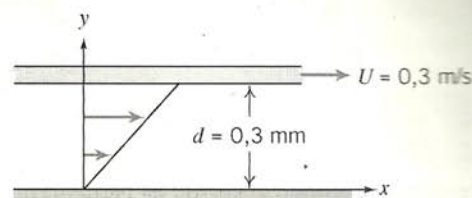



Fig. 2.8 A deformação de um elemento fluido.

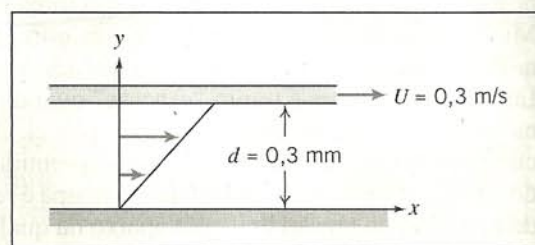
EXEMPLO 2.2 — Viscosidade e Tensão de Cisalhamento num Fluido Newtoniano

Uma placa infinita move-se sobre uma segunda placa, havendo entre elas uma camada de líquido, como mostrado. Para uma pequena altura da camada, d, supomos uma distribuição linear de velocidade no líquido. A viscosidade do líquido é 0,65 centipoise e sua densidade relativa é 0,88. Calcule:

(a) A viscosidade absoluta do líquido, em lbf·s/pé².
(b) A viscosidade cinemática do líquido, em m²/s.
(c) A tensão de cisalhamento na placa superior, em lbf/pé².
(d) A tensão de cisalhamento na placa inferior, em Pa.
(e) Indique o sentido de cada tensão de cisalhamento calculada nas partes (c) e (d).

PROBLEMA-EXEMPLO 2.2

DADOS: O perfil linear de velocidade no líquido entre placas paralelas infinitas, conforme mostrado.

$$\mu = 0{,}65 \text{ cp}$$
$$\text{SG} = 0{,}88$$

DETERMINAR:
(a) μ em unidade de lbf·s/pé².
(b) ν em unidades de m²/s.
(c) τ na placa superior em unidades de lbf/pé².
(d) τ na placa inferior em unidades de Pa.
(e) O sentido da tensão nas partes (c) e (d).

SOLUÇÃO:

Equação básica: $\tau_{yx} = \mu \dfrac{du}{dy}$ Definição: $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$

Considerações:
(1) Distribuição linear de velocidade (dado)
(2) Escoamento permanente
(3) μ = constante

(a) $$\mu = 0{,}65\ \text{cp} \times \frac{\text{poise}}{100\ \text{cp}} \times \frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}\cdot\text{poise}} \times \frac{\text{lbm}}{454\ \text{g}} \times \frac{\text{slug}}{32{,}2\ \text{lbm}} \times 30{,}5\ \frac{\text{cm}}{\text{pé}} \times \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{pé}}$$

$$\mu = 1{,}36 \times 10^{-5}\ \text{lbf}\cdot\text{s/pé}^2 \longleftarrow \mu$$

(b) $$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{\text{SG}\rho_{H_2O}}$$
$$= 1{,}36 \times 10^{-5}\ \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{(0{,}88)1{,}94\ \text{slug}} \times \frac{\text{slug}\cdot\text{pé}}{\text{lbf}\cdot\text{s}^2} \times (0{,}305)^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{pé}^2}$$
$$\nu = 7{,}41 \times 10^{-7}\ \text{m}^2/\text{s} \longleftarrow \nu$$

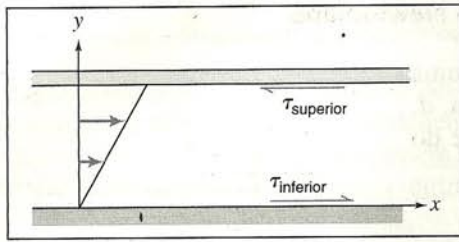
(c) $$\tau_{\text{superior}} = \tau_{yx,\text{superior}} = \mu \frac{du}{dy}\bigg)_{y=d}$$

Como u varia linearmente com y,

$$\frac{du}{dy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{U-0}{d-0} = \frac{U}{d} = 0{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{0{,}3\ \text{mm}} \times 1000\ \frac{\text{mm}}{\text{m}} = 1000\ \text{s}^{-1}$$

$$\tau_{\text{superior}} = \mu\frac{U}{d} = 1{,}36 \times 10^{-5}\ \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}}{\text{pé}^2} \times \frac{1000}{\text{s}} = 0{,}0136\ \text{lbf/pé}^2 \longleftarrow \tau_{\text{superior}}$$

(d) $$\tau_{\text{inferior}} = \mu\frac{U}{d} = 0{,}0136\ \frac{\text{lbf}}{\text{pé}^2} \times 4{,}45\ \frac{\text{N}}{\text{lbf}} \times \frac{\text{pé}^2}{(0{,}305)^2\ \text{m}^2} \times \frac{\text{Pa}\cdot\text{m}^2}{\text{N}} = 0{,}651\ \text{Pa} \longleftarrow \tau_{\text{inferior}}$$

(e) Sentido das tensões de cisalhamento nas placas superior e inferior.

{A placa superior é uma superfície y negativa, logo τ_{yx} positivo atua no sentido negativo de x.}

{A placa inferior é uma superfície y positiva, logo τ_{yx} positivo atua no sentido positivo de x.}

(*e*)

{O resultado algébrico deduzido na parte (c) mostra que a tensão de cisalhamento é constante numa seção transversal à folga para um perfil linear de velocidade. A tensão de cisalhamento no espaço entre as placas é inversamente proporcional à altura da folga para uma dada velocidade da placa móvel superior e diretamente proporcional à velocidade desta placa para uma dada altura da folga.}

2.4.2 Fluidos Não-Newtonianos

Fluidos nos quais a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação são ditos não-newtonianos. Muitos fluidos comuns apresentam comportamento não-newtoniano. Dois exemplos familiares são pasta dental e tinta Lucite.[6] Esta última é muito "espessa" quando na lata, mas torna-se "fina" quando trabalhada pelo pincel. A pasta dental se comporta como um "fluido" quando espremida do tubo. Contudo, ela não escorre por si só quando a tampa é removida. Há uma demarcação ou tensão limítrofe abaixo da qual a pasta dental se comporta como um sólido. Estritamente falando, a nossa definição de fluido é válida apenas para materiais cuja tensão limítrofe é igual a zero. Os fluidos não-newtonianos são geralmente classificados como tendo comportamento independente ou dependente do tempo. Exemplos de comportamento independente do tempo são apresentados no diagrama reológico da Fig. 2.9.

Numerosas equações empíricas têm sido propostas [3, 4] para modelar as relações observadas entre τ_{yx} e du/dy para fluidos com comportamento independente do tempo. Elas podem ser adequadamente representadas, para muitas aplicações da engenharia, pelo modelo exponencial, que para o escoamento unidimensional torna-se

$$\tau_{yx} = k\left(\frac{du}{dy}\right)^n \tag{2.11}$$

onde o expoente, n, é chamado de índice de comportamento do escoamento, e o coeficiente, k, o índice de consistência. Esta equação reduz-se à lei de Newton para a viscosidade para $n = 1$ com $k = \mu$.

Para assegurar que τ_{yx} tenha o mesmo sinal de du/dy, a Eq. 2.11 é reescrita na forma

$$\tau_{yx} = k\left|\frac{du}{dy}\right|^{n-1}\frac{du}{dy} = \eta\frac{du}{dy} \tag{2.12}$$

O termo $\eta = k|du/dy|^{n-1}$ é referenciado como a *viscosidade aparente*. A maioria dos fluidos não-newtonianos tem viscosidade aparente relativamente elevada em comparação com a viscosidade da água.

Os fluidos nos quais a viscosidade aparente diminui com taxa de deformação crescente ($n < 1$) são chamados *pseudoplásticos* (tornam-se delgados com as tensões tangenciais). A maioria dos fluidos não-newtonianos enquadra-se neste grupo; os exemplos incluem as soluções de polímeros, as suspensões coloidais e a polpa de papel em água. Se a viscosidade aparente aumenta com taxa de deformação crescente ($n > 1$), o fluido é chamado *dilatante* (torna-se mais espesso com as tensões tangenciais). As suspensões de amido e de areia são exemplos de fluidos dilatantes.

Um "fluido" que se comporta como um sólido até que uma tensão limítrofe, τ_y, seja excedida, e subseqüentemente apresenta uma relação linear entre tensão e taxa de deformação, é deno-

(*a*)

(*b*)

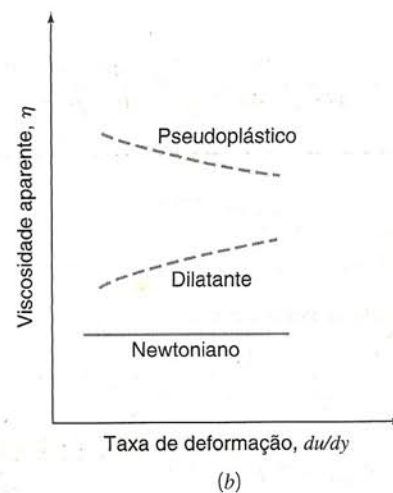
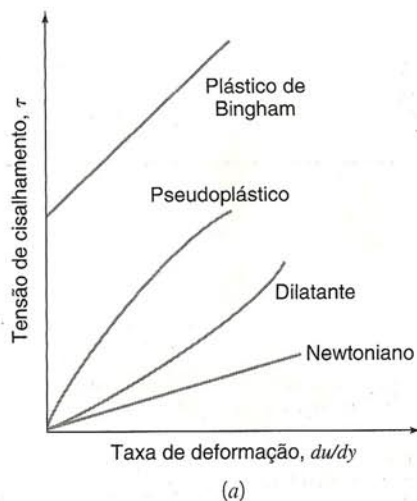



Fig. 2.9 (a) Tensão de cisalhamento, τ, e (b) viscosidade aparente η, como função da taxa de deformação para o escoamento unidimensional de diversos fluidos não-newtonianos.

[6] Marca registrada, E. I. du Pont de Nemours & Company.

minado *plástico de Bingham*, ou ideal. O modelo correspondente para a tensão de cisalhamento é

$$\tau_{yx} = \tau_y + \mu_p \frac{du}{dy} \quad (2.13)$$

Suspensões de argila, lama de perfuração e pasta dental são exemplos de substâncias que exibem esse comportamento.

O estudo dos fluidos não-newtonianos é adicionalmente complicado pelo fato de que a viscosidade aparente pode ser dependente do tempo. Fluidos *tixotrópicos* mostram um decréscimo em η com o tempo sob uma tensão tangencial constante; muitas tintas são tixotrópicas. Fluidos *reopéticos* mostram um aumento em η com o tempo. Após a deformação, alguns fluidos retornam parcialmente à sua forma original quando a tensão aplicada é liberada; estes fluidos são chamados *viscoelásticos*.[7]

2.5 TENSÃO SUPERFICIAL

Tensão superficial é a tensão de tração interfacial aparente (força por unidade de comprimento da interface) agindo num líquido que tem uma interface de massa específica, como nos casos de um líquido em contato com um gás, vapor, outro líquido, ou sólido. A superfície do líquido na interface parece atuar como uma membrana elástica esticada, como mostrado pelas formas aproximadamente esféricas de pequenas gotas de líquidos e bolhas de sabão.

Com algum cuidado, é possível colocar uma agulha sobre a superfície da água e ela ali permanecer sustentada pela tensão superficial. Similarmente, pequenos insetos aquáticos são capazes de permanecer apoiados na superfície da água.[8]

Um balanço de força num segmento de interface mostra que há um salto de pressão através da membrana elástica imaginável sempre que a interface é curva. Para uma gota de água no ar, a pressão na água é maior que no ambiente; o mesmo é verdade para uma bolha de gás num líquido. Para uma bolha de sabão no ar, a tensão superficial age em ambas as interfaces interna e externa entre a película de sabão e o ar ao longo da superfície curva da bolha. A tensão superficial também conduz aos fenômenos de ondas capilares em uma superfície líquida [5] e de ascensão ou depressão capilar, discutidas abaixo.

O *ângulo de contato* entre um líquido e um sólido é definido na Fig. 2.10. O ângulo de contato depende da limpeza da superfície e da pureza do líquido. Quando o ângulo de contato é menor que 90°, o líquido tende a *molhar* a superfície do sólido como mostrado na Fig. 2.10*a*, e a tensão de tração devida à tensão superficial tende a puxar para cima a superfície livre do líquido próxima do sólido, formando um *menisco* curvo.

Essa *ascensão capilar* pode ser pronunciada se o líquido estiver confinado em um tubo de pequeno diâmetro ou num espaço estreito (a ascensão capilar em um tubo fino é analisada no Problema-Exemplo 3.1). Por isso, tubos usados em manômetros e barômetros devem ter diâmetros superiores a 9 mm.

Quando o ângulo de contato é maior que 90° (Fig. 2.10*b*), o líquido não molha a superfície; a tensão superficial tende a puxar para baixo a superfície livre do líquido ao longo do sólido. O

Tubo
θ
Δh
(*a*) Ascensão capilar ($\theta < 90°$)

Tubo
Δh
θ
(*b*) Depressão capilar ($\theta > 90°$)

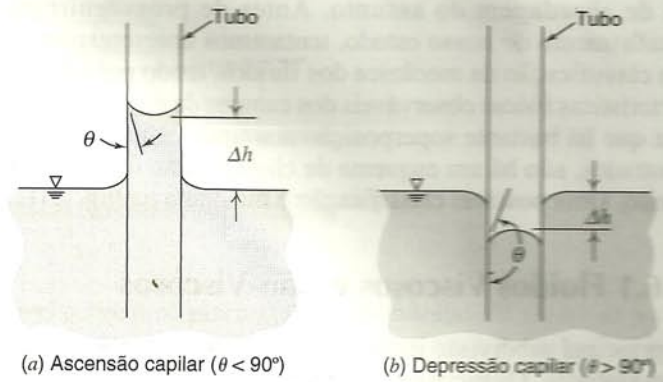



Fig. 2.10 Ascensão capilar e depressão capilar dentro e fora de um tubo circular.

mercúrio tem um ângulo de contato maior que 90° com a maioria dos sólidos. Isto produz uma depressão capilar que pode afetar a leitura de um barômetro ou manômetro usando mercúrio como fluido de trabalho.

As leituras de barômetros e manômetros devem ser feitas no nível médio do menisco. Esta posição está afastada da região de efeito máximo da tensão superficial e mais próxima do nível próprio do líquido.

A magnitude e a direção da tensão superficial contra uma superfície sólida depende do líquido, do sólido e da presença de um gás, vapor ou líquido secundário. O Apêndice A contém dados de tensão superficial e de ângulo de contato para líquidos comuns na presença de ar e de água.

Todos os dados de tensão superficial no Apêndice A foram obtidos para líquidos puros em contato com superfícies verticais limpas. Impurezas no líquido, sujeira na superfície, ou inclinação da superfície podem causar meniscos indistintos; sob tais condições, pode ser difícil determinar o nível do líquido com precisão. O nível de líquido é mais distinto em um tubo vertical. Quando tubos inclinados são usados para aumentar a sensibilidade do manômetro (veja Seção 3.3.1), é importante fazer cada leitura no mesmo ponto do menisco e evitar o uso de tubos com inclinação inferior a cerca de 15° em relação à horizontal.

Líquidos multicomponentes podem produzir interfaces irregulares, como o caso do vinho numa taça. O álcool e a água no vinho têm tensões superficiais bastante diferentes. Gotas da mistura são arrastadas, alternadamente, para cima na parede da taça e caem de volta na superfície do líquido, produzindo o fenômeno das "lágrimas do vinho".

Compostos *surfatantes* reduzem a tensão superficial de maneira significativa (mais de 40% com pequenas modificações em outras propriedades [6]) quando adicionados na água. Eles têm larga aplicação comercial: a maioria dos detergentes contém surfatantes para ajudar a água a penetrar e retirar resíduos das superfícies. Os surfatantes têm suas principais aplicações industriais na catálise, na produção de aerossóis e na recuperação de petróleo.

2.6 DESCRIÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DOS MOVIMENTOS DE FLUIDOS

No Cap. 1, listamos uma grande variedade de problemas típicos encontrados na mecânica dos fluidos e delineamos nosso méto-

[7] Exemplos de fluidos dependentes do tempo e viscoelásticos são ilustrados no vídeo da NCFMF *Rheological Behavior of Fluids*.

[8] Estes e outros exemplos de fenômenos são ilustrados no vídeo da NCFMF *Surface Tension in Fluid Mechanics*.

do de abordagem do assunto. Antes de prosseguirmos no detalhamento do nosso estudo, tentaremos apresentar uma ampla classificação da mecânica dos fluidos, tendo por base as características físicas observáveis dos campos de escoamento. Uma vez que há bastante superposição nos tipos de escoamento encontrados, não há um esquema de classificação universalmente aceito. Uma possível classificação é mostrada na Fig. 2.11.

2.6.1 Fluidos Viscosos e Não-Viscosos

A principal subdivisão indicada é entre escoamentos viscosos e não-viscosos. Os escoamentos onde se desprezam os efeitos da viscosidade são denominados *escoamentos invíscidos*. Neles, a viscosidade do fluido, μ, é considerada igual a zero. Os fluidos com viscosidade nula não existem; entretanto, há muitos problemas nos quais a hipótese de inexistência das forças viscosas simplifica a análise e, ao mesmo tempo, leva a resultados significativos. (A simplificação da análise é sempre desejável; os resultados, porém, devem ser razoavelmente precisos para que a solução seja de valor.)

Todos os fluidos possuem viscosidade, e, em conseqüência, os escoamentos viscosos são da maior importância no estudo da mecânica dos fluidos. Estudaremos escoamentos viscosos em detalhe mais adiante; aqui, consideraremos alguns exemplos dos fenômenos a eles pertinentes.

Na nossa discussão imediatamente posterior à definição de um fluido (Seção 1.2), ressaltamos que em qualquer escoamento viscoso o fluido em contato direto com uma fronteira sólida tem a mesma velocidade que ela; não há deslizamento na fronteira. Para o escoamento viscoso unidimensional da Fig. 2.8, a tensão de cisalhamento[9] foi dada pela Eq. 2.10,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \qquad (2.10)$$

Num fluido em movimento, a velocidade do fluido em contato com uma superfície sólida estacionária é zero. Tendo em vista que o fluido como um todo está em movimento, gradientes de velocidade e, por conseguinte, tensões cisalhantes devem estar presentes no escoamento. Estas tensões, por sua vez, afetam o movimento do fluido.

Como um caso prático, considere o movimento de fluido em volta de uma asa delgada ou de um casco de navio. Esse escoamento poderia ser representado pela aproximação grosseira do escoamento sobre uma placa plana, como mostrado na Fig. 2.12. O escoamento que se aproxima da placa tem velocidade uniforme, U_∞. Estamos interessados em obter um quadro qualitativo da distribuição de velocidade em diversos locais ao longo da placa. Dois desses locais são denotados por x_1 e x_2. Considere o primeiro local, x_1. A fim de chegar a um quadro qualitativo da distribuição de velocidade, começamos por assinalar as coordenadas y nas quais a velocidade é conhecida. (Para maior clareza, as distâncias no sentido de y foram bastante exageradas na Fig. 2.12.)

Da condição de não-deslizamento, sabemos que a velocidade no ponto A deve ser zero; temos um ponto do perfil de velocidade. Podemos localizar outros pontos do perfil? Detenhamo-nos por um instante e indaguemos: "Qual o efeito da placa no escoamento?" A placa está estacionária e, portanto, exerce uma força retardadora sobre o fluido; ela diminui a velocidade do fluido nas vizinhanças da sua superfície. Numa ordenada y suficientemente longe da placa, digamos, o ponto B, o escoamento não será influenciado por sua presença. Se a pressão não variar no sentido de x (como no caso do escoamento sobre uma placa plana semi-infinita), a velocidade no ponto B será U_∞. Parece razoável esperar que a velocidade cresça suave e gradativamente do valor $u = 0$ em $y = 0$ até $u = U_\infty$ em $y = y_B$. O perfil foi assim desenhado; dessa forma, em algum ponto intermediário, C, entre os pontos A e B, a velocidade encontra-se entre zero e U_∞. Para $0 \leq y \leq y_B$, então, $0 \leq u \leq U_\infty$. Dessas características do perfil

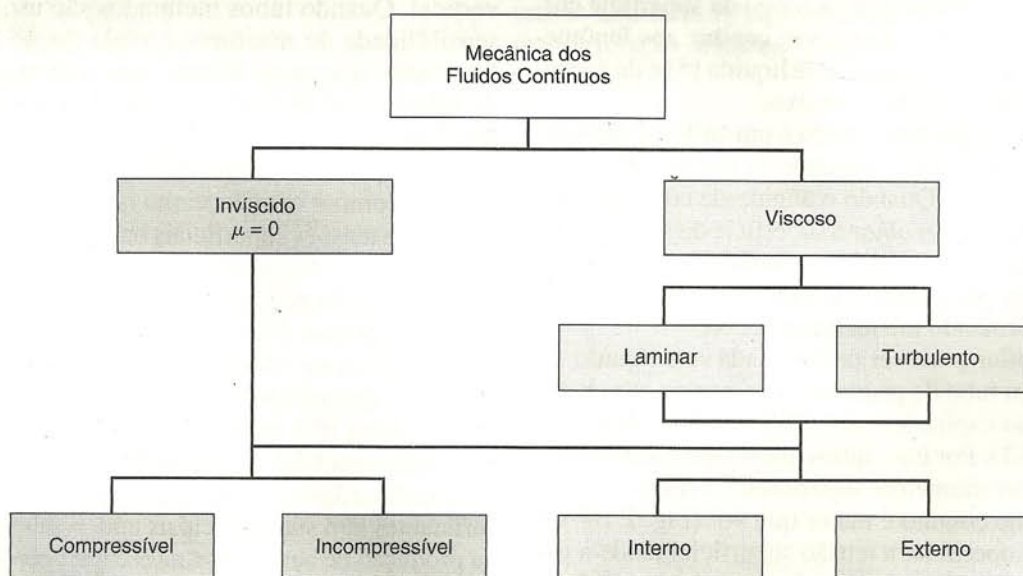



Fig. 2.11 Possível classificação da mecânica dos fluidos contínuos.

[9] Em geral, $\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ para escoamentos que não são unidimensionais; veja o Cap. 5.

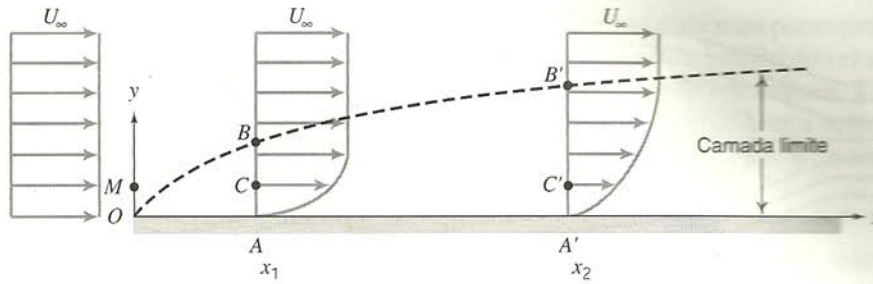



Fig. 2.12 Escoamento viscoso, laminar e incompressível sobre uma placa plana semi-infinita.

de velocidade e da nossa definição da tensão de cisalhamento,[10] notamos que tensões cisalhantes estão presentes na região $0 \leq y \leq y_B$; para $y > y_B$, o gradiente de velocidade é zero, e, por conseguinte, nenhuma tensão de cisalhamento está presente.

E o que dizer do perfil de velocidade na estação x_2? É exatamente igual ao perfil em x_1? Um exame da Fig. 2.12 sugere que não. Pelo menos não foi desenhado dessa forma! Mesmo que seja qualitativamente o mesmo, por que não é exatamente igual? Poderíamos supor que a placa influenciaria uma porção maior do campo de escoamento à medida que se avança sobre a placa no sentido do escoamento. Olhando novamente para o perfil na estação x_1, vemos que o fluido mais lento adjacente à placa exerce uma força retardadora sobre o fluido mais veloz acima dele. Podemos ver isso considerando a tensão de cisalhamento no plano y que passa por C. Uma vez que estamos interessados na tensão exercida sobre o fluido mais veloz acima do plano, estamos em busca do sentido da tensão de cisalhamento num plano y negativo que passa por C. Como $\partial u/\partial y > 0$, τ_{yx} no plano que passa por C tem um valor numérico positivo; conseqüentemente, a tensão de cisalhamento deve ser na direção negativa do eixo x.

A fim de estabelecer um quadro qualitativo do perfil de velocidade em x_2, reconhecemos que a condição de não-deslizamento exige que a velocidade na parede seja nula; isto fixa a velocidade em A' como zero. Uma vez que na estação x_1 o fluido mais lento exerce uma força retardadora no fluido sobre ele, poderíamos esperar que, em x_2, a distância até o ponto onde a velocidade é U_∞ fosse aumentada, ou seja, $y_{B'} > y_B$. Além disso, é razoável esperar que $u_{C'} < u_C$.

Da nossa visão qualitativa do campo de escoamento, concluímos que podemos dividi-lo em duas regiões genéricas. Na região adjacente à fronteira, as tensões de cisalhamento estão presentes; essa região é chamada de camada limite.[11] Fora da camada limite, o gradiente de velocidade é nulo, e, por conseguinte, as tensões de cisalhamento são nulas. Nesta região podemos utilizar a teoria do escoamento invíscido para nossa análise.

Antes de deixarmos nossa discussão a respeito do escoamento viscoso sobre uma placa plana infinita, vamos refletir sobre dois pontos. Na nossa descrição qualitativa do campo de escoamento, estávamos preocupados apenas com o comportamento da componente da velocidade no sentido de x, a componente u. O que dizermos da componente da velocidade no sentido de y, a componente v? Será ela nula em todo o campo? Poderíamos também indagar se a borda da camada limite é uma linha de corrente.

Para responder a essas indagações, considere as linhas de corrente do escoamento. Em vez de considerar todas as linhas de corrente possíveis, vamos considerar aquela que passa pelo ponto M. Lembrando que uma linha de corrente é definida como a tangente ao vetor velocidade em cada ponto do escoamento, a nossa primeira idéia seria visualizar a linha de corrente passando por M como uma reta paralela ao eixo x. Entretanto, isto violaria o requisito de não haver escoamento numa direção transversal à linha de corrente. Por isso, o escoamento de massa entre linhas de corrente adjacentes (ou entre uma linha de corrente e uma fronteira sólida) deve ser constante. Para o escoamento viscoso incompressível da Fig. 2.12, reconhecemos que a linha de corrente que passa por M não pode ser uma reta paralela ao eixo dos x. Para manter um fluxo de massa constante entre a linha de corrente passando por M e o eixo x, o espaçamento entre a linha e o eixo deve aumentar continuamente à medida que nos movemos sobre a placa. Por conseguinte, embora pequena, a componente y da velocidade não é nula.

A linha de corrente passando por M cruza a linha tracejada que empregamos para marcar a borda da camada limite. Em conseqüência, concluímos que a borda da camada limite não é uma linha de corrente e que há escoamento para dentro da camada limite à medida que nos movemos sobre a placa. Na verdade, se a camada limite cresce, deverá haver escoamento através da sua borda.

Para uma dada velocidade de escoamento livre, U_∞, o tamanho da camada limite dependerá das propriedades do fluido. Uma vez que a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à viscosidade, espera-se que a espessura da camada limite dependa da viscosidade do fluido. No Cap. 9, desenvolveremos expressões para determinar a taxa de crescimento da camada limite.

Utilizamos o escoamento incompressível sobre uma placa plana semi-infinita para estabelecer um quadro qualitativo do escoamento viscoso sobre uma fronteira sólida. Naquele exemplo, consideramos apenas o efeito de forças cisalhantes; a pressão era constante em todo o campo de escoamento. Consideremos, agora, um campo de escoamento permanente (o escoamento incompressível sobre um cilindro), onde tanto as forças de pressão quanto as viscosas são importantes. Para o escoamento permanente, as trajetórias, as linhas de emissão e de corrente são todas idênticas. Se utilizássemos algum meio para visualizar o escoamento, descobriríamos que ele teria o aspecto geral da Fig. 2.13a.[12]

[10] Para o escoamento de camada limite bidimensional da Fig. 2.12, a tensão cisalhante é dada aproximadamente por $\tau_{yx} = \mu \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

[11] A formação de uma camada limite é ilustrada no filme da NCFMF *Fundamentals of Boundary Layers*.

[12] Os detalhes do escoamento dependerão das suas diversas propriedades. Para todos, exceto aqueles de velocidade muito baixa, o quadro qualitativo será conforme mostrado.

(*a*) Escoamento viscoso (*b*) Escoamento invíscido

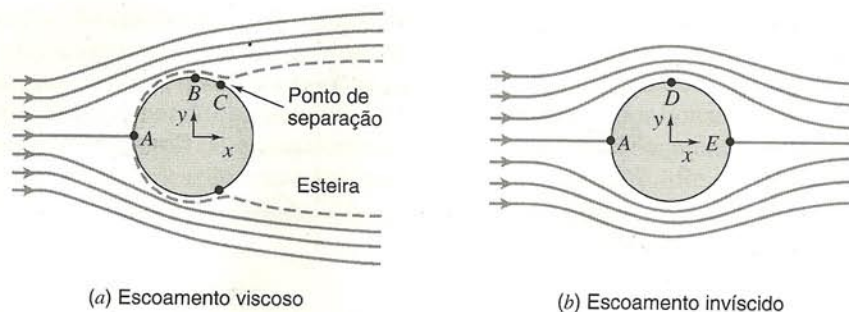



Fig. 2.13 Configuração qualitativa do escoamento incompressível sobre um cilindro.

Vemos que as linhas de corrente são simétricas em relação ao eixo x. O fluido ao longo da linha de corrente central colide com o cilindro no ponto A, divide-se e escoa em volta dele. O ponto A no cilindro é chamado *ponto de estagnação*. Como no escoamento sobre uma placa plana, uma camada limite desenvolve-se nas vizinhanças da superfície sólida. A distribuição de velocidade fora da camada limite pode ser determinada qualitativamente a partir do espaçamento das linhas de corrente. Como não pode haver escoamento através de uma linha de corrente, podemos esperar que a velocidade aumente nas regiões onde o espaçamento entre as linhas de corrente diminui. Inversamente, um aumento no espaçamento entre as linhas de corrente implica a diminuição da velocidade do escoamento.

Considere por um instante o campo de escoamento incompressível sobre um cilindro, calculado com a hipótese de escoamento não-viscoso, conforme mostrado na Fig. 2.13b; este escoamento é simétrico em relação a ambos os eixos, x e y. A velocidade em torno do cilindro aumenta até um máximo no ponto D, e em seguida cai, à medida que se avança sobre o cilindro. Para o escoamento não-viscoso, um aumento na velocidade é acompanhado por uma queda na pressão; inversamente, uma diminuição na velocidade é acompanhada por um aumento na pressão. Então, no caso de um escoamento invíscido incompressível, a pressão ao longo da superfície do cilindro diminui à medida que nos movemos do ponto A para o ponto D; em seguida, ela cresce novamente, do ponto D para o ponto E. Como o escoamento é simétrico em relação a ambos os eixos, x e y, podemos esperar que a distribuição de pressão também o seja. Isto é verdade para o caso de escoamento invíscido.

Uma vez que as tensões de cisalhamento não estão presentes num escoamento invíscido, as forças de pressão são as únicas que precisamos considerar na determinação da força líquida sobre o cilindro. A simetria da distribuição de pressão leva à conclusão de que, para um escoamento não-viscoso, não há força líquida sobre o cilindro, nem na direção x e nem na direção y. A força líquida na direção x é chamada de *arrasto*. Então, para um escoamento invíscido sobre um cilindro, somos levados a concluir que o arrasto é nulo; esta conclusão é contrária à experiência, pois sabemos que todos os corpos sofrem algum arrasto quando colocados num escoamento real. Ao tratarmos do escoamento não-viscoso sobre um corpo, desprezamos a presença da camada limite, em função da sua definição. Voltemos e examinemos de novo a situação do escoamento real.

No escoamento real, Fig. 2.13a, as experiências mostram que a camada limite é delgada entre os pontos A e C. Por isso, é razoável supor que o campo de pressão é qualitativamente o mesmo que aquele do escoamento não-viscoso. Uma vez que a pressão cai continuamente entre os pontos A e B, um elemento fluido dentro da camada limite sofre uma força de pressão líquida na direção do escoamento. Na região entre A e B, esta força de pressão líquida é suficiente para vencer a força cisalhante resistente, mantendo, assim, o movimento do elemento no sentido do escoamento.

Considere agora um elemento fluido dentro da camada limite no dorso do cilindro, além do ponto B. Uma vez que a pressão aumenta no sentido do escoamento, o elemento fluido experimenta uma força de pressão líquida oposta ao sentido do seu movimento. Em algum ponto, a quantidade de movimento do fluido na camada limite é insuficiente para transportar o elemento mais adiante, para a região de pressão crescente. As camadas de fluido adjacentes à superfície sólida são levadas ao repouso, e o escoamento *descola-se* ou *separa-se* da superfície.[13] A separação da camada limite acarreta a formação de uma região de pressão relativamente baixa atrás do corpo; essa região, que é deficiente em quantidade de movimento, é chamada de *esteira*. Então, para o escoamento separado, sobre um corpo, há um desequilíbrio líquido de forças de pressão no sentido do escoamento; isto resulta num arrasto de pressão sobre o corpo. Quanto maior a esteira atrás do corpo, maior será o arrasto de pressão.

É lógico perguntar como se pode reduzir o tamanho da esteira e, assim, reduzir o arrasto de pressão. Como uma grande esteira resulta da separação da camada limite, que por sua vez é relacionada com a presença de um gradiente adverso de pressão (aumento de pressão no sentido do escoamento), a redução do gradiente adverso retardará o início da separação e, por conseguinte, reduzirá o arrasto.

A *carenagem* ou o *afuselamento* conveniente do corpo reduz o gradiente adverso de pressão, dispersando um aumento de pressão sobre uma distância maior. Por exemplo, se uma seção posterior gradualmente afunilada fosse adicionada ao cilindro da Fig. 2.13, o campo de escoamento apareceria qualitativamente conforme mostrado na Fig. 2.14. A suavização da forma do corpo retarda a separação; embora a maior área superficial acarrete um aumento da força cisalhante total atuante sobre aquele, o arrasto é significativamente reduzido.[14]

A separação também pode ocorrer em escoamentos internos (em dutos) como resultado de mudanças rápidas ou bruscas na geometria do duto.

[13] O escoamento em torno de diversos modelos, ilustrando a separação, é demonstrado no vídeo da Universidade de Iowa *Form Drag, Lift, and Propulsion*.

[14] O efeito do carenamento de um corpo é demonstrado no vídeo da NCFMF *Fluid Dynamics of Drag*.

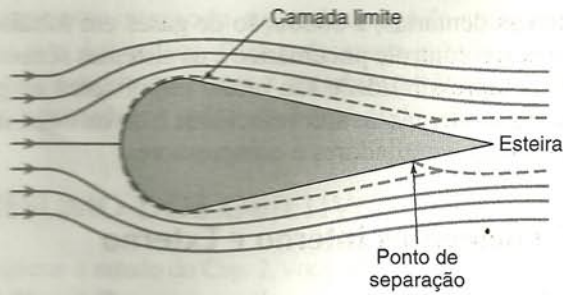



Fig. 2.14 Escoamento em torno de um objeto com perfil carenado.

2.6.2 Escoamentos Laminar e Turbulento

Os regimes de escoamentos viscosos são classificados em laminar ou turbulento, tendo por base a sua estrutura. No regime laminar, a estrutura do escoamento é caracterizada pelo movimento suave em lâminas ou camadas. A estrutura do escoamento no regime turbulento é caracterizada por movimentos tridimensionais aleatórios de partículas fluidas, em adição ao movimento médio.

No escoamento laminar não há mistura macroscópica de camadas adjacentes do fluido. Um filamento delgado de corante injetado num escoamento laminar aparece como uma linha única; não há dispersão de corante pelo fluxo, exceto aquela, lenta, decorrente do movimento molecular. Por outro lado, um filamento de corante injetado num escoamento turbulento dispersa-se rapidamente por todo o campo de escoamento; a linha de corante parte-se numa miríade de filamentos entrelaçados. Esse comportamento do escoamento turbulento é causado pelas flutuações de velocidade presentes; a mistura macroscópica de partículas de camadas adjacentes de fluido resulta em rápida dispersão do corante. O filamento reto de fumaça subindo de um cigarro num ambiente calmo dá uma idéia clara do escoamento laminar. À medida que a fumaça continua a subir, ela parte-se em movimentos aleatórios; este é um exemplo de escoamento turbulento.[15]

Pode-se obter um quadro mais quantitativo da diferença entre os escoamentos laminar e turbulento examinando-se a saída de um dispositivo sensível, medidor de velocidade, imerso no fluxo. Se medirmos a componente x da velocidade num ponto fixo de um tubo, tanto para escoamento laminar quanto turbulento, ambos permanentes, os registros gráficos da velocidade *versus* tempo aparecerão como na Fig. 2.15. Para o escoamento permanente laminar, a velocidade num ponto permanece constante com o tempo. No turbulento, o gráfico da velocidade indica flutuações aleatórias da velocidade instantânea, u, em torno da velocidade média, $\bar{u}$. Podemos considerar a velocidade instantânea, u, como a soma da velocidade média, $\bar{u}$, e a componente flutuante, u'.

$$u = \bar{u} + u'$$

Como o escoamento é permanente, a velocidade média, $\bar{u}$, não varia com o tempo.

Embora muitos escoamentos turbulentos de interesse sejam permanentes na média ($\bar{u}$ não é uma função do tempo), a presença das flutuações aleatórias de alta freqüência da velocidade torna a sua análise extremamente difícil. Num escoamento unidimensional laminar, a tensão de cisalhamento relaciona-se com o gradiente de velocidade pela relação simples

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.10}$$

Para um escoamento turbulento em que o campo de velocidade média é unidimensional, esta relação simples não é válida. Flutuações aleatórias e tridimensionais de velocidade (u', v' e w') transportam quantidade de movimento através das linhas de corrente do escoamento médio, aumentando a tensão de cisalhamento efetiva. (Esta tensão aparente é discutida com mais detalhes no Cap. 8.) Em conseqüência, no escoamento turbulento não há uma relação universal entre o campo de tensão e o campo de velocidade média. Assim, nos escoamentos turbulentos devemos nos apoiar solidamente em teorias semi-empíricas e em dados experimentais.

2.6.3 Escoamentos Compressível e Incompressível

Escoamentos em que as variações na massa específica são desprezíveis denominam-se *incompressíveis*; quando as variações de massa específica não são desprezíveis, o escoamento é chamado de *compressível*. O exemplo mais comum de escoamento compressível diz respeito aos gases; por outro lado, os escoamentos de líquidos podem ser freqüentemente tratados como incompressíveis.

Para muitos líquidos, a massa específica é pouco afetada pela mudança de temperatura. Para baixas pressões, líquidos podem ser

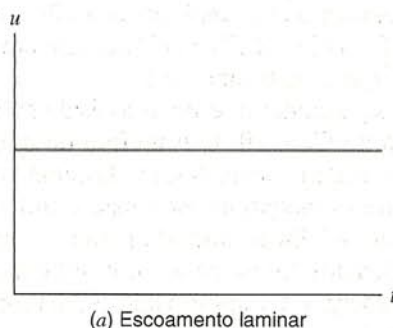
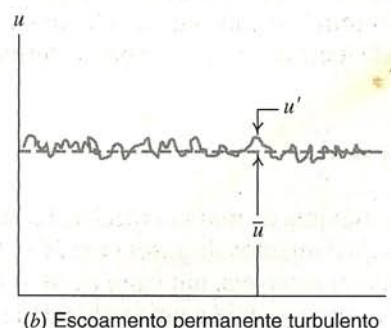



Fig. 2.15 Variação da velocidade axial com o tempo.

[15] Diversos exemplos ilustrando as naturezas dos escoamentos laminar e turbulento são mostrados no filme da NCFMF *Turbulence*, e no filme da Universidade de Iowa *Characteristics of Laminar and Turbulent Flow*.

considerados incompressíveis. Entretanto, para altas pressões, o efeito da compressibilidade em líquidos pode ser importante. Mudanças de pressão e de massa específica em líquidos são relacionadas pelo *módulo de compressibilidade*, ou de elasticidade,

$$E_v \equiv \frac{dp}{(d\rho/\rho)} \tag{2.14}$$

Se o módulo de compressibilidade independe da temperatura, a massa específica é uma função somente da pressão (o fluido é *barotrópico*). Valores de módulos de compressibilidade para os líquidos mais comuns são dados no Apêndice A.

O martelo hidráulico ou golpe de aríete e a cavitação[16] são exemplos importantes de efeitos de compressibilidade nos escoamentos líquidos. O *martelo hidráulico* é causado pela propagação e reflexão de ondas acústicas em um líquido confinado, por exemplo quando uma válvula é bruscamente fechada. O ruído resultante desta ação pode ser similar ao de "um martelo batendo" nos tubos, daí a origem do termo.

A *cavitação* ocorre quando bolhas de vapor se formam em um escoamento líquido em conseqüência da redução local da pressão. Dependendo do número e da distribuição de partículas no líquido às quais pequenas bolhas de gás não-dissolvido ou de ar podem se agregar, a pressão local no início da cavitação pode ser igual ou menor que a pressão de vapor do líquido. Estas partículas agem como locais de nucleação para inicializar a vaporização.

A *pressão de vapor* de um líquido é a pressão parcial do vapor em contato com o líquido saturado a uma dada temperatura. Quando a pressão em um líquido é reduzida abaixo da pressão de vapor, o líquido pode passar abruptamente para a fase vapor, num fenômeno que lembra o *flash* de uma máquina fotográfica.

As bolhas de vapor em um escoamento líquido podem alterar substancialmente a geometria do campo de escoamento. O crescimento e o colapso ou implosão das bolhas em regiões adjacentes a superfícies sólidas, podem ocasionar sérios desgastes nas mesmas por erosão.

Líquidos muito puros podem suportar grandes pressões negativas — tanto quanto −60 atmosferas para a água destilada — antes que as *rupturas* do líquido e a vaporização ocorram. Ar atmosférico está sempre presente próximo à superfície livre da água ou da água do mar, de forma que a cavitação ocorre onde a pressão total local está bastante próxima da pressão de vapor.

Os escoamentos de gases com transferência de calor desprezível também podem ser considerados incompressíveis, desde que as velocidades do escoamento sejam pequenas quando comparadas com a velocidade do som; a razão entre a velocidade do escoamento, V, e a velocidade local do som, c, no gás, é definida como o número de Mach,

$$M \equiv \frac{V}{c}$$

Para $M < 0{,}3$, a variação máxima da massa específica é inferior a 5 por cento. Assim, os escoamentos de gases com $M < 0{,}3$ podem ser tratados como incompressíveis; um valor de $M = 0{,}3$ no ar, nas condições padrões, corresponde a uma velocidade de aproximadamente 100 m/s.

Escoamentos compressíveis ocorrem com freqüência nas aplicações de engenharia. Exemplos comuns incluem sistemas de ar comprimido empregados no acionamento de ferramentas mecânicas e brocas dentárias, a condução de gases em tubulações a altas pressões, o controle pneumático e os sistemas sensores. Os efeitos da compressibilidade são muito importantes no projeto de aeronaves modernas de alta velocidade e de mísseis, instalações de potência, ventiladores e compressores.

[16] Exemplos de cavitação são ilustrados no filme da NCFMF *Cavitation*.

2.6.4 Escoamentos Interno e Externo

Escoamentos completamente envoltos por superfícies sólidas são chamados internos, ou escoamentos em dutos. Escoamentos sobre corpos imersos num fluido não-contido são denominados externos. Tanto o escoamento interno quanto o externo podem ser laminares ou turbulentos, compressíveis ou incompressíveis.

No caso de escoamento incompressível num tubo, a sua natureza (laminar ou turbulenta) é determinada pelo valor de um parâmetro adimensional, o número de Reynolds, $Re = \rho \bar{V} D/\mu$, onde ρ é a massa específica do fluido, $\bar{V}$ a velocidade média do escoamento, D o diâmetro do tubo e μ a viscosidade do fluido. O escoamento em um tubo é laminar para $Re \leq 2300$; pode ser turbulento para valores maiores. (O número de Reynolds e outros importantes parâmetros adimensionais encontrados na mecânica dos fluidos serão discutidos no Cap. 7.) O Cap. 8 será dedicado a um estudo do escoamento interno incompressível.

Escoamentos externos ocorrem sobre corpos imersos num fluido não contido. O escoamento sobre uma placa plana semi-infinita (Fig. 2.12) e aquele sobre um cilindro (Fig. 2.13) são exemplos de escoamentos externos. Os escoamentos de camada limite também podem ser laminares ou turbulentos; as definições de escoamento laminar ou turbulento apresentadas anteriormente também se aplicam aqui; os detalhes de um campo de escoamento podem ser significativamente diferentes, dependendo da natureza da camada limite: laminar ou turbulenta. No caso da placa plana da Fig. 2.12, a natureza da camada limite é determinada pelo número de Reynolds, $Re_x = \rho U_\infty x/\mu$, onde x é a distância, a jusante, contada a partir da borda de ataque da placa. O escoamento é em geral laminar para $Re_x \leq 5 \times 10^5$; ele pode ser turbulento para valores maiores. No Cap. 9, os escoamentos de camada limite, assim como aqueles sobre corpos imersos serão discutidos em detalhe.

O escoamento interno de líquidos nos quais o duto não fica completamente preenchido — onde há uma superfície livre submetida a uma pressão constante — é denominado *escoamento em canal aberto*. Exemplos comuns de escoamento em canal aberto incluem aqueles em rios, canais de irrigação e aquedutos. O escoamento em canais abertos não será abordado neste texto. (As referências de [7] a [10] contêm um tratamento introdutório a este tipo de escoamento.)

O escoamento interno através de máquinas de fluxo é considerado no Cap. 10. O princípio da quantidade de movimento angular é aplicado no desenvolvimento das equações fundamentais para as máquinas. Bombas, ventiladores, sopradores, compressores e hélices, que adicionam energia à corrente fluida, são considerados, assim como turbinas e moinhos de vento, que extraem energia. O capítulo apresenta uma discussão detalhada da operação de sistemas fluidos.

No caso dos escoamentos internos compressíveis, o projeto apropriado do duto é necessário para a obtenção de velocidades supersônicas. A variação das propriedades do fluido no interior de uma passagem de seção variável não é a mesma nos casos de um escoamento supersônico ($M > 1$) ou subsônico ($M < 1$). Analogamente, as condições de fronteira na saída de

um escoamento interno (p. ex., a descarga de um bocal) são diferentes nos dois casos. Para a descarga subsônica, a pressão no plano de saída do bocal é a ambiente. Para o escoamento sônico, a pressão na saída do bocal pode ser maior do que a ambiente. Para um jato supersônico, a pressão no plano de saída pode ser maior, igual ou menor do que a ambiente. O escoamento unidimensional, permanente e compressível será abordado nos Caps. 11 e 12.

2.7 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o estudo do Cap. 2, você deverá ser capaz de:

1. Dar definições operacionais de:
   contínuo
   propriedade num ponto
   campo escalar
   campo vetorial
   escoamento permanente
   escoamento uniforme numa seção
   linha de tempo
   trajetória
   linha de emissão
   linha de corrente
   força de campo
   força de superfície
   tensão de cisalhamento
   tensão normal
   fluido newtoniano
   fluido não-newtoniano
   viscosidade
   viscosidade cinemática
   viscosidade aparente
   fluido dilatante
   fluido pseudoplástico
   fluido tixotrópico
   fluido reopético
   plástico de Bingham
   escoamento viscoso
   escoamento invíscido
   camada limite
   ponto de estagnação
   arrasto
   separação
   esteira
   escoamento laminar
   escoamento turbulento
   número de Reynolds
   escoamento compressível
   escoamento incompressível
   número de Mach
   escoamento interno
   escoamento externo
   escoamento em canal aberto
2. Dar exemplos de escoamentos uni, bi e tridimensionais.
3. Calcular e traçar linhas de corrente, de trajeto e de emissão para campos de velocidade especificados.
4. Enunciar a convenção para designar as nove componentes do campo de tensões.
5. Escrever a lei de Newton para a viscosidade e determinar a tensão e a força de cisalhamento correspondentes a um dado perfil de velocidade unidimensional.
6. Resolver os problemas ao final do capítulo relacionados com o material estudado.

REFERÊNCIAS

1. Vincenti, W. G., and C. H. Kruger, Jr., *Introduction to Physical Gas Dynamics.* New York: Wiley, 1965.
2. Merzkirch, W., *Flow Visualization,* 2nd ed. New York: Academic Press, 1987.
3. Tanner, R. I., *Engineering Rheology.* Oxford: Clarendon Press, 1985.
4. Macosko, C. W., *Rheology: Principles, Measurements, and Applications.* New York: VCH Publishers, 1994.
5. Loh, W. H. T., "Theory of the Hydraulic Analogy for Steady and Unsteady Gas Dynamics," in *Modern Developments in Gas Dynamics,* W. H. T. Loh, ed. New York: Plenum, 1969.
6. Waugh, J. G., and G. W. Stubstad, *Hydroballistics Modeling.* San Diego: Naval Undersea Center, ca. 1972.
7. Munson, B. R., D. F. Young, and T. H. Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics,* 3rd ed. New York: Wiley, 1998.
8. Roberson, J. A., and C. T. Crowe, *Engineering Fluid Mechanics,* 6th ed. New York: Wiley, 1997.
9. Streeter, V. L., K. Bedford, and E. B. Wylie, *Fluid Mechanics,* 9th ed. New York: McGraw-Hill, 1998.
10. White, F. M., *Fluid Mechanics,* 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1994.

PROBLEMAS

2.1 Para os campos de velocidade dados a seguir, determine:
(a) Se o campo de escoamento é uni, bi ou tridimensional, e o motivo.
(b) Se o escoamento é permanente ou não, e o motivo.
(As quantidades a e b são constantes.)

(1) $\vec{V} = [ae^{-bx}]\hat{i}$ (2) $\vec{V} = ax^2\hat{i} + by\hat{j}$
(3) $\vec{V} = [ax^2e^{-bt}]\hat{i}$ (4) $\vec{V} = ax\hat{i} - by\hat{j}$
(5) $\vec{V} = (ax + t)\hat{i} - by^2\hat{j}$ (6) $\vec{V} = ax^2\hat{i} + bxz\hat{j}$
(7) $\vec{V} = a(x^2 + y^2)^{1/2}(1/z^3)\hat{k}$ (8) $\vec{V} = axy\hat{i} - byz\hat{j}$

2.2 Um líquido viscoso é submetido a cisalhamento entre dois discos paralelos; o disco superior gira e o inferior permanece estacionário. O campo de velocidade entre os discos é dado por $\vec{V} = \hat{e}_\theta r\omega z/h$. (A origem das coordenadas está localizada no centro do disco inferior; e o disco superior em $z = h$.) Quais são as dimensões deste campo de velocidade? Ele satisfaz condições físicas de fronteira apropriadas? Quais são elas?

2.3 O campo de velocidade $\vec{V} = ax\hat{i} - by\hat{j}$, onde $a = b = 1\ s^{-1}$, pode ser interpretado como representando o escoamento numa curva em ângulo reto. Obtenha uma equação para as linhas de corrente do escoamento. Trace diversas linhas de corrente no primeiro quadrante, incluindo aquela que passa pelo ponto $(x, y) = (0, 0)$.

2.4 O campo de velocidade $\vec{V} = -ax\hat{i} + by\hat{j}$ pode ser interpretado como representando o escoamento numa curva em ângulo reto. Obtenha uma equação para as linhas de corrente do escoamento. Trace diversas linhas de corrente no primeiro quadrante para $a = b = 2\ s^{-1}$, incluindo aquela que passa pelo ponto $(x, y) = (1, 1)$.

2.5 Um escoamento é descrito pelo campo de velocidade $\vec{V} = (Ax + B)\hat{i} + (-Ay)\hat{j}$, onde $A = 3$ m/s/m e $B = 1$ m/s. Trace algumas linhas de corrente no plano xy, incluindo aquela que passa pelo ponto $(x, y) = (1, 2)$.

2.6 Um campo de velocidade é especificado como $\vec{V} = ax^2\hat{i} + bxy\hat{j}$, onde $a = 2\ m^{-1}s^{-1}$, $b = -4\ m^{-1}s^{-1}$, e as coordenadas são medidas em metros. O campo de escoamento é uni, bi ou tridimensional? Por quê? Calcule as componentes da velocidade no ponto (2, 1/2, 0). Deduza uma equação para a linha de corrente que passa por este ponto. Trace algumas linhas de corrente no primeiro quadrante incluindo aquela que passa pelo ponto (2, 1/2, 0).

2.7 Para o campo de velocidade $\vec{V} = Axy\hat{i} + By^2\hat{j}$, onde $A = 1\ m^{-1}s^{-1}$, $B = -1/2\ m^{-1}\ s^{-1}$, e as coordenadas são medidas em metros, obtenha uma equação para as linhas de escoamento. Trace linhas de corrente para alguns valores positivos de y.

2.8 A velocidade num escoamento permanente incompressível no plano xy é dada por $\vec{V} = \hat{i}A/x + \hat{j}Ay/x^2$, onde $A = 2\ m^2/s$, e as coordenadas são medidas em metros. Obtenha uma equação para a linha de corrente que passa pelo ponto $(x, y) = (1, 3)$. Calcule o tempo necessário para que uma partícula fluida se mova de $x = 1$ m até $x = 3$ m neste campo de escoamento.

2.9 Começando com o campo de velocidade do Problema 2.3, verifique que as equações paramétricas para o movimento de partículas são dadas por $x_p = c_1e^{at}$ e $y_p = c_2e^{-bt}$. Obtenha a equação para a trajetória da partícula localizada no ponto $(x, y) = (1, 2)$ no instante $t = 0$. Compare esta trajetória com a linha de corrente passando pelo mesmo ponto.

2.10 Considere novamente o campo de velocidade do Problema 2.4. Obtenha equações paramétricas para o movimento de partículas e a equação da trajetória da partícula localizada no ponto $(x, y) = (2, 1)$ no instante $t = 0$. Compare a equação da trajetória com a da linha de corrente passando pelo mesmo ponto.

2.11 Ar escoando para baixo atinge uma placa horizontal plana de largura infinita. O campo de velocidade é dado por $\vec{V} = \left(ax\hat{i} - ay\hat{j}\right)(2 + \cos \omega t)$, onde $a = 3\ s^{-1}$, $\omega = \pi\ s^{-1}$, x e y (medidos em metros) são direcionados para a direita na horizontal e para cima na vertical, respectivamente, e t é em segundos. Obtenha uma equação algébrica para a linha de corrente em $t = 0$. Trace a linha de corrente que passa pelo ponto $(x, y) = (2, 4)$ nesse instante. A linha de corrente mudará com o tempo? Explique brevemente. Mostre o vetor velocidade no seu gráfico no mesmo ponto e no mesmo instante. O vetor velocidade é tangente à linha de corrente? Explique.

2.12 Considere o campo de escoamento dado na descrição euleriana pela expressão $\vec{V} = A\hat{i} + Bt\hat{j}$, onde $A = 2$ m/s, $B = 0{,}3\ m/s^2$, e as coordenadas são medidas em metros. Deduza as funções de posição lagrangeana para a partícula fluida que se localizava no ponto $(x, y) = (1, 1)$ no instante $t = 0$. Obtenha uma expressão algébrica para a trajetória seguida por essa partícula. Trace-a e compare-a com as linhas de corrente que passam pelo ponto nos instantes $t = 0$, 1 e 2 segundos.

2.13 Considere o escoamento descrito pelo campo de velocidade $\vec{V} = Bx(1 + At)\hat{i} + Cy\hat{j}$, com $A = 0{,}5\ s^{-1}$, e $B = C = 1\ s^{-1}$. As coordenadas são medidas em metros. Trace a trajetória que passa pelo ponto (1, 1, 0) no tempo $t = 0$. Compare-a com a linha de corrente que passa pelo mesmo ponto nos instantes $t = 0$, 1 e 2 s.

2.14 Considere o campo de escoamento $\vec{V} = ax(1 + bt)\hat{i} + cy\hat{j}$, onde $a = c = 1\ s^{-1}$ e $b = 0{,}2\ s^{-1}$. As coordenadas são medidas em metros. Trace a trajetória da partícula que passa pelo ponto $(x, y) = (1, 1)$ no instante $t = 0$, no intervalo entre $t = 0$ e $t = 3$ s. Compare com a linha de corrente que passa pelo mesmo ponto nos instantes $t = 0$, 1 e 2 s.

2.15 Considere o campo de escoamento $\vec{V} = axt\hat{i} + b\hat{j}$, onde $a = 0{,}2\ s^{-2}$ e $b = 3$ m/s. As coordenadas são medidas em metros. Para a partícula que passa pelo ponto $(x, y) = (3, 1)$ no instante $t = 0$, trace a trajetória durante o intervalo de tempo de $t = 0$ a $t = 3$ s. Compare essa trajetória com as linhas de corrente que passam pelo mesmo ponto nos instantes $t = 1$, 2 e 3 segundos.

2.16 Considere o campo de velocidades $\vec{V} = ax\hat{i} + by(1 + ct)\hat{j}$, onde $a = b = 2\ s^{-1}$, e $c = 0{,}4\ s^{-1}$. As coordenadas são medidas em metros. Para a partícula que passa pelo ponto $(x, y) = (1, 1)$ no tempo $t = 0$, trace a trajetória durante o intervalo de tempo de $t = 0$ a $t = 1{,}5$ s. Compare esta trajetória com a linha de corrente que passa pelo mesmo ponto nos instantes $t = 0$, 1 e 1,5 s.

2.17 Considere o campo de velocidade do Problema 2.13. Trace a linha de emissão formada por partículas que passaram pelo ponto (1, 1, 0) durante o intervalo de tempo de $t = 0$ a $t = 3$ s. Compare com as linhas de corrente traçadas pelos mesmos pontos nos instantes $t = 0$, 1 e 2 s.

2.18 As linhas de emissão são visualizadas por meio de um fluido corante de flutuabilidade neutra injetado num campo de escoamento, a partir de um ponto fixo no espaço. Uma partícula do fluido corante que está no ponto (x, y) no instante t, deve ter passado pelo ponto de injeção (x_0, y_0) em algum instante anterior $t = \tau$. O histograma de uma partícula corante pode ser encontrado pela solução das equações da trajetória para as condições iniciais $x = x_0$, $y = y_0$, quando $t = \tau$. As localizações atuais das partículas na linha de emissão são obtidas fazendo-se τ igual a valores na faixa $0 \leq \tau \leq t$. Considere o campo de escoamento $\vec{V} = ax(1 + bt)\hat{i} + cy\hat{j}$, onde $a = c = 1\ s^{-1}$ e $b = 0{,}2\ s^{-1}$. As coordenadas são medidas em metros. Trace a linha de

emissão que passa pelo ponto inicial $(x_0, y_0) = (1, 1)$, durante o intervalo de $t = 0$ a $t = 3$ s. Compare com a linha de corrente que passa pelo mesmo ponto nos instantes $t = 0$, 1 e 2 s.

2.19 Pequenas bolhas de hidrogênio estão sendo utilizadas para se visualizar um escoamento. Todas as bolhas são geradas na origem ($x = 0$, $y = 0$). O campo de velocidade é transiente e obedece às equações:

$u = 1$ m/s	$v = 1$ m/s	$0 \le t < 2$ s
$u = 0$	$v = 1{,}5$ m/s	$2 \le t \le 4$ s

Trace as trajetórias das bolhas que deixam a origem em $t = 0$, 1, 2, 3 e 4 s. Marque as localizações dessas cinco bolhas em $t = 4$ s. Use uma linha tracejada para indicar a posição de uma linha de emissão em $t = 4$ segundos.

2.20 Considere o campo de escoamento $\vec{V} = axt\hat{i} + b\hat{j}$, onde $a = 0{,}3$ s^{-2} e $b = 2$ m/s. As coordenadas são medidas em metros. Para a partícula que passa pelo ponto $(x, y) = (1, 2)$ no instante $t = 0$, trace a trajetória durante o intervalo de $t = 0$ a 3 s. Compare-a com a linha de emissão que passa pelo mesmo ponto no instante $t = 3$ s.

2.21 Um escoamento é descrito pelo campo de velocidades $\vec{V} = a\hat{i} + bx\hat{j}$, onde $a = 2$ m/s e $b = 1$ s^{-1}. As coordenadas são medidas em metros. Obtenha uma expressão para a linha de corrente que passa pelo ponto (2, 5). Em $t = 2$ s, quais são as coordenadas das partículas que passaram pelo ponto (0, 4) em $t = 0$? Em $t = 3$ s, quais são as coordenadas das partículas que passaram pelo ponto (1, 4,25) 2 segundos antes? Que conclusões pode você tirar sobre as linhas de corrente, de emissão e de trajeto para este escoamento?

2.22 Um escoamento é descrito pelo campo de velocidades $\vec{V} = ay\hat{i} + b\hat{j}$, onde $a = 1$ s^{-1} e $b = 2$ m/s. As coordenadas são medidas em metros. Obtenha uma expressão para a linha de corrente que passa pelo ponto (6, 6). Em $t = 1$ s, quais são as coordenadas das partículas que passaram pelo ponto (1, 4) em $t = 0$? Em $t = 3$ s, quais são as coordenadas das partículas que passaram pelo ponto (−3, 0) 2 segundos antes? Mostre que, para este escoamento, as linhas de corrente, de emissão e de trajeto coincidem.

2.23 Um escoamento é descrito pelo campo de velocidades $\vec{V} = at\hat{i} + b\hat{j}$, onde $a = 0{,}4$ m/s^2 e $b = 2$ m/s. Em $t = 2$ s, quais são as coordenadas das partículas que passaram pelo ponto (2, 1) em $t = 0$? Em $t = 3$ s, quais são as coordenadas das partículas que passaram pelo ponto (2, 1) em $t = 2$ s? Trace a linha de emissão e a trajetória pelo ponto (2, 1) e compare com as linhas de corrente pelo mesmo ponto nos instantes $t = 0$, 1 e 2 s.

2.24 Um escoamento é descrito pelo campo de velocidades $\vec{V} = ay\hat{i} + bt\hat{j}$, onde $a = 1$ s^{-1} e $b = 0{,}5$ m/s^2. Em $t = 2$ s, quais são as coordenadas das partículas que passaram pelo ponto (1, 2) no tempo $t = 0$? Em $t = 3$ s, quais são as coordenadas das partículas que passaram pelo ponto (1, 2) em $t = 2$ s? Trace a linha de emissão e a trajetória pelo ponto (1, 2) e compare com as linhas de corrente pelo mesmo ponto nos instantes $t = 0$, 1 e 2 s.

2.25 A variação da viscosidade do ar com a temperatura é bem correlacionada pela equação empírica de Sutherland

$$\mu = \frac{bT^{1/2}}{1 + S/T}$$

Os valores de b e S que melhor ajustam esta equação são dados no Apêndice A, para emprego com unidades SI. Utilize esses valores para desenvolver uma equação de cálculo da viscosidade do ar em unidades do Sistema Gravitacional Britânico como uma função da temperatura absoluta em Rankine. Compare seus resultados com os dados do Apêndice A.

2.26 A variação da viscosidade do ar com a temperatura é bem representada pela equação empírica de Sutherland

$$\mu = \frac{bT^{1/2}}{1 + S/T}$$

Os valores de b e S que melhor ajustam esta equação são dados no Apêndice A. Desenvolva uma equação em unidades SI para a viscosidade cinemática do ar em função da temperatura à pressão atmosférica. Suponha comportamento de gás ideal. Compare com os dados do Apêndice A.

2.27 A distribuição de velocidade para o escoamento laminar desenvolvido entre placas paralelas é dada por

$$\frac{u}{u_{\text{máx}}} = 1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2$$

onde h é a distância entre as placas; a origem é colocada na linha mediana entre as placas. Considere um escoamento de água a 15°C, com $u_{\text{máx}} = 0{,}30$ m/s e $h = 0{,}50$ mm. Calcule a tensão de cisalhamento na placa superior e forneça o seu sentido. Esboce a variação da tensão de cisalhamento numa seção transversal do canal.

2.28 A distribuição de velocidade para o escoamento laminar entre placas paralelas é dada por

$$\frac{u}{u_{\text{máx}}} = 1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2$$

onde h é a distância entre as duas placas; a origem é colocada na metade da distância entre elas. Considere o escoamento de água a 15°C com velocidade máxima de 0,05 m/s e $h = 5$ mm. Calcule a força cisalhante sobre uma seção de 0,3 m^2 da placa inferior e forneça o seu sentido.

2.29 Explique como um esqui interage com a superfície de gelo. Quais os mecanismos que reduzem o atrito de deslizamento entre o esqui e o gelo?

2.30 Uma esquiadora de estilo livre no gelo, pesando 112 lbf, desliza num esqui à velocidade $V = 20{,}5$ pé/s. O seu peso é suportado por uma fina película de água derretida do gelo pela pressão da lâmina do esqui. Suponha que a lâmina tem comprimento $L = 11{,}5$ pol. e largura $w = 0{,}125$ pol., e que a película de água tem espessura $h = 0{,}0000575$ pol. Estime a desaceleração da esquiadora que resulta do cisalhamento viscoso na película de água, desprezando efeitos de extremidades do esqui.

2.31 Petróleo bruto, com densidade relativa de 0,85 e viscosidade $\mu = 2{,}15 \times 10^{-3}$ lbf·s/pé^2, escoa permanentemente numa superfície inclinada de $\theta = 30$ graus abaixo da horizontal, numa película de espessura $h = 0{,}125$ pol. O perfil de velocidade é dado por

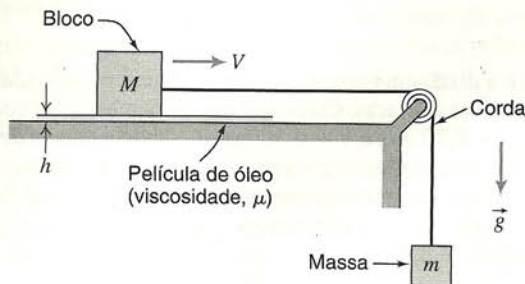
$$u = \frac{\rho g}{\mu}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)\operatorname{sen}\theta$$

(A coordenada x fica ao longo da superfície e y é normal a ela.) Trace o perfil de velocidade. Determine a magnitude e o sentido da tensão de cisalhamento que atua sobre a superfície.

2.32 Um cubo pesando 10 lbf e tendo a dimensão de 10 pol. em cada aresta é puxado para cima sobre uma superfície inclinada na qual há uma película de óleo SAE 10W a 100°F. Se a velocidade do cubo é de 5 pé/s e a película de óleo tem 0,001 pol. de espessura, determine a força requerida para puxá-lo. Suponha que a distribuição de velocidade na película de óleo é linear. A superfície está inclinada de 15 graus em relação à horizontal.

2.33 Uma fita de gravação deve ser revestida em ambos os lados com lubrificante, sendo puxada através de uma estreita ranhura. A fita tem espessura de 0,015 pol. e largura de 1,00 pol. Ela fica centrada na ranhura com uma folga de 0,012 pol. de cada lado. O lubrificante, de viscosidade $\mu = 0{,}021$ slug/(pé·s), preenche completamente o espaço entre a fita e a ranhura por um comprimento de

0,75 pol. ao longo da fita. Se a fita pode suportar uma força máxima de tração de 7,5 lbf, determine a velocidade máxima com a qual ela pode ser puxada através da ranhura.

2.34 Um bloco de massa M desliza numa fina película de óleo. A espessura desta é h, e a área do bloco, A. Quando solta, a massa m exerce tração na corda, causando a aceleração do bloco. Despreze o atrito na polia e a resistência do ar. Desenvolva uma expressão algébrica para a força viscosa que atua sobre o bloco quando ele se move à velocidade V. Deduza uma equação diferencial para a velocidade do bloco como função do tempo. Obtenha uma expressão algébrica para a velocidade do bloco em função do tempo. Esboce a curva de $V(t)$.

P2.34

2.35 Um bloco com a mm quadrados desliza sobre uma placa plana numa fina película de óleo. O óleo tem viscosidade μ e a película tem espessura h. O bloco de massa M se move com velocidade constante U sob a ação de uma força constante F. Indique a magnitude e o sentido das tensões de cisalhamento entre o fundo do bloco e a placa. Se a força é repentinamente removida e o bloco começa a reduzir a velocidade, esboce uma curva para a velocidade resultante do bloco em função do tempo. Obtenha uma expressão para o tempo requerido para o bloco perder 95 por cento de sua velocidade inicial.

2.36 Um bloco de 0,2 metro quadrado, com 2,0 kg de massa, desliza para baixo em um plano inclinado, sobre uma película de óleo SAE a 20°C com 0,02 mm de espessura. Se o bloco for solto em $t = 0$, qual a sua aceleração inicial? Obtenha uma expressão para a velocidade do bloco em função do tempo. Esboce a variação esperada para a velocidade do bloco em função do tempo. Caso a película de óleo fosse removida e o bloco deslizasse no plano inclinado, você esperaria uma velocidade final maior ou menor que a obtida com a película de óleo? Por quê?

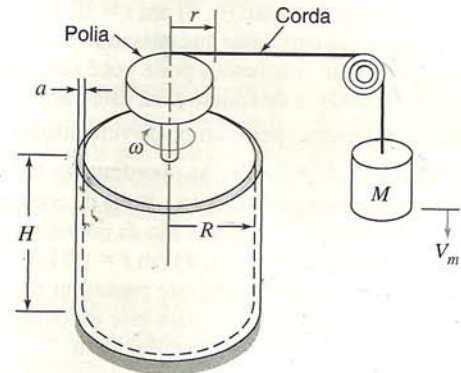
2.37 Um fio magnético deve ser revestido com verniz isolante sendo puxado através de uma matriz circular com passagem de 0,9 mm de diâmetro. O diâmetro do fio é de 0,8 mm, e ele fica centrado na passagem. O verniz ($\mu = 20$ centipoise) preenche completamente o espaço entre o fio e a passagem por um comprimento de 20 mm. O fio é puxado através da passagem a uma velocidade de 50 m/s. Determine a força necessária para puxá-lo.

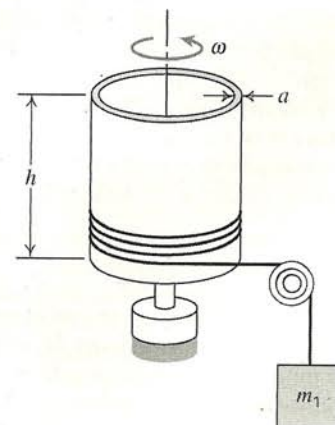
2.38 Um viscosímetro de cilindros concêntricos pode ser formado girando-se o membro interno de um par de cilindros encaixados com folga muito pequena (veja a Fig. P2.41). A folga anular deve ser muito pequena de modo que exista um perfil de velocidade linear na amostra líquida. Considere um viscosímetro com um cilindro interno de 3 pol. de diâmetro e altura de 6 pol., e tendo a largura da folga anular igual a 0,001 pol.; a folga está cheia de óleo de rícino a 90°F. Determine o torque necessário para girar o cilindro interno a 250 rpm.

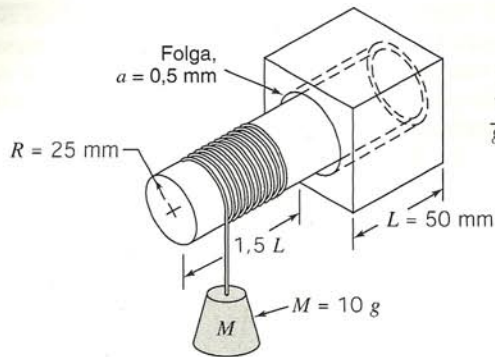
2.39 Um viscosímetro de cilindros concêntricos pode ser formado girando-se o membro interno de um par de cilindros encaixados com folga muito pequena (veja a Fig. P2.41). Para pequenas folgas, pode-se supor um perfil de velocidade linear no líquido que preenche o espaço anular. Um viscosímetro tem um cilindro interno de 75 mm de diâmetro e 150 mm de altura, com largura da folga de 0,02 mm. Um torque de 0,021 N·m é necessário para girar o cilindro interno a 100 rpm. Determine a viscosidade do líquido no espaço anular.

2.40 Um eixo com diâmetro externo de 18 mm gira a 20 rotações por segundo dentro de um mancal de sustentação estacionário de 60 mm de comprimento. Uma película de óleo com espessura de 0,2 mm preenche a folga anular entre o eixo e o mancal. O torque necessário para girar o eixo é de 0,0036 N·m. Estime a viscosidade do óleo que se encontra na folga anular.

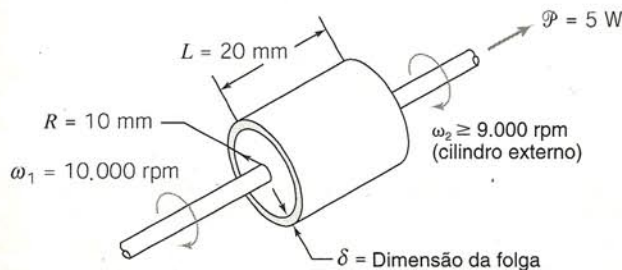
2.41 Um viscosímetro de cilindros concêntricos é acionado pela queda de uma massa M ligada por meio de corda e polia ao cilindro interno, conforme mostrado. O líquido a ser testado preenche a folga anular de largura a e altura H. Após um breve transiente de partida, a massa cai à velocidade constante V_m. Deduza uma expressão algébrica para a viscosidade do líquido no dispositivo em termos de M, g, V_m, r, R, a e H. Avalie a viscosidade do líquido empregando:

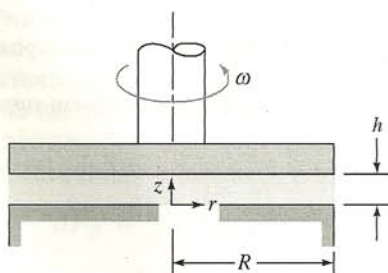
$M =$ 0,10 kg
$R =$ 50 mm
$H =$ 50 mm
$r =$ 25 mm
$a =$ 0,20 mm
$V_m =$ 40 mm/s

P2.41

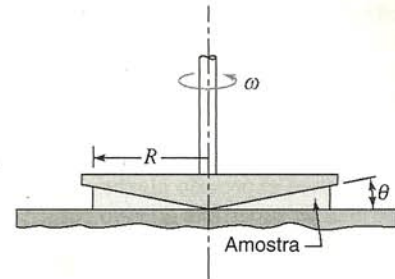
2.42 O delgado cilindro externo (massa m_2 e raio R) de um pequeno viscosímetro portátil de cilindros concêntricos é acionado pela queda de uma massa, m_1, ligada a uma corda. O cilindro interno é estacionário. A folga entre os cilindros é a. Desprezando o atrito de mancal, a resistência do ar e a massa do líquido no viscosímetro, obtenha uma expressão algébrica para o torque devido ao cisalhamento viscoso que atua no cilindro à velocidade angular ω. Deduza e resolva uma equação diferencial para a velocidade angular do

P2.42

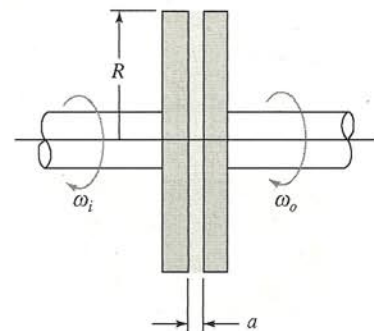
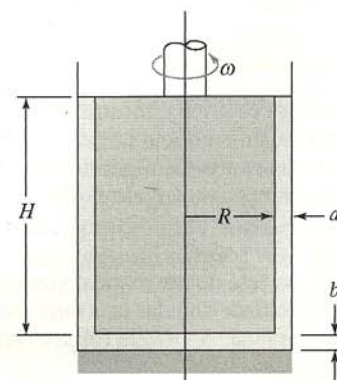
cilindro externo como função do tempo. Obtenha uma expressão para a velocidade angular máxima do cilindro.

P2.43

2.43 Um eixo circular de alumínio montado sobre um mancal de sustentação é mostrado. A folga simétrica entre o eixo e o mancal está preenchida com óleo SAE 10W-30 a $T = 30°C$. O eixo é acionado e posto em rotação pela massa e corda a ele ligadas. Desenvolva e resolva uma equação diferencial para a velocidade angular do eixo como função do tempo. Calcule a velocidade angular máxima do eixo e o tempo requerido para atingir 95 por cento dessa velocidade.

2.44 Um acoplamento imune a choques para acionamentos mecânicos de baixa potência deve ser fabricado com um par de cilindros concêntricos. O espaço anular entre os cilindros deve ser preenchido com óleo. O dispositivo deve transmitir potência, $\mathcal{P} = 5$ W. Outras dimensões e propriedades são conforme mostrado. Despreze qualquer atrito de mancal e efeitos de extremidade. Suponha que a folga mínima, prática, para o dispositivo seja $\delta = 0,5$ mm. A companhia Dow fabrica fluidos à base de silicone com viscosidades tão altas quanto 10^6 centipoises. Determine a viscosidade que deverá ser especificada a fim de satisfazer os requisitos desse dispositivo.

P2.44

2.45 Foi proposto empregar um par de discos paralelos para medir a viscosidade de uma amostra líquida. O disco superior gira a uma altura h acima do disco inferior. A viscosidade do líquido na folga deve ser calculada a partir de medições do torque necessário para girar o disco superior continuamente. Obtenha uma expressão algébrica para o torque necessário para girar o disco superior.

P2.45

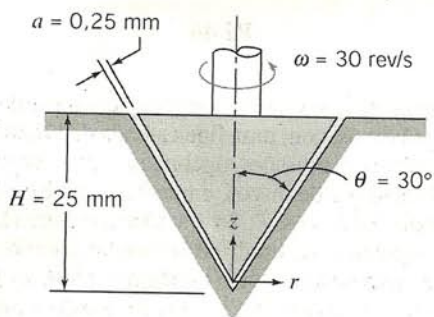
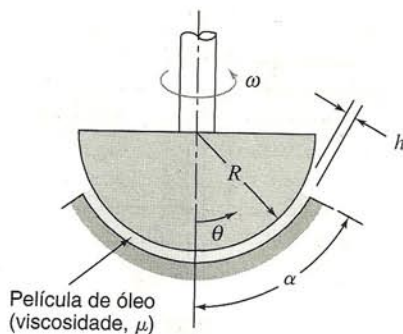
2.46 O viscosímetro de cone e placa mostrado é um instrumento freqüentemente usado para caracterizar fluidos não-newtonianos. Ele consiste em uma placa plana e de um cone giratório, com ângulo muito obtuso (tipicamente, θ é inferior a 0,5 grau). O ápice do cone apenas toca a superfície da placa, e o líquido a ser testado preenche a estreita fenda formada pelas duas peças. Deduza uma expressão para a taxa de cisalhamento no líquido que preenche a fenda, em termos da geometria do sistema. Avalie o torque no cone acionado em termos da tensão de cisalhamento e da geometria do sistema.

P2.46

2.47 Uma embreagem viscosa deve ser feita de um par de discos paralelos muito próximos, com uma fina camada de líquido viscoso entre eles. Desenvolva expressões algébricas para o torque e a potência transmitida pelo par de discos, em termos da viscosidade do líquido, μ, do raio dos discos, R, do afastamento entre eles, a, e das velocidades angulares: ω_i, do disco acionador interno, e ω_0, do disco acionador externo. Desenvolva também expressões para a razão de deslizamento, $s = \Delta\omega/\omega_i$, em termos de ω_i e do torque transmitido. Determine a eficiência, η, em termos da razão de deslizamento.

P2.47

P2.48

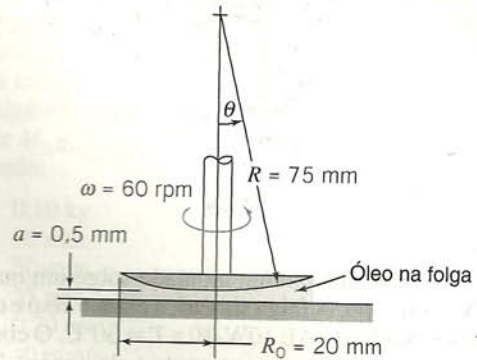
2.48 Mostra-se um viscosímetro de cilindros concêntricos. O torque viscoso é produzido pela folga anular em torno do cilindro interno. Um torque viscoso adicional é produzido pelo fundo plano do

cilindro interno à medida que gira acima do cilindro externo estacionário. Obtenha uma expressão algébrica para o torque viscoso devido ao escoamento na folga anular de largura a, e outra para o torque viscoso em virtude do escoamento na folga do fundo de altura b. Prepare um gráfico mostrando a razão, b/a, necessária para manter o torque no fundo a 1 por cento, ou menos, do torque do espaço anular, *versus* as outras variáveis geométricas. Quais são as implicações de projeto? Que modificações do projeto você pode recomendar?

2.49 Projete um viscosímetro de cilindros concêntricos para medir a viscosidade de um líquido similar à água. O objetivo é alcançar uma precisão de medida de $\pm 1\%$. Especifique a configuração e dimensões do viscosímetro. Indique quais os parâmetros medidos serão utilizados para inferir a viscosidade da amostra de líquido.

2.50 Um eixo de ponta cônica gira num mancal cônico. A folga entre as duas peças é preenchida com óleo pesado de viscosidade SAE 30 a 30°C. Obtenha uma expressão algébrica para a tensão de cisalhamento que atua na superfície do eixo cônico. Calcule o torque viscoso que atua no eixo.

P2.50

P2.51

2.51 Um mancal de escora esférico é mostrado. A folga entre o membro esférico e seu alojamento tem largura constante h. Obtenha e faça o gráfico de uma expressão algébrica para o torque no membro esférico, como função do ângulo α.

2.52 Mostra-se uma seção reta de um mancal giratório. O membro esférico gira com velocidade angular ω, a uma pequena distância, a, acima da superfície plana. A estreita folga é preenchida com óleo viscoso, tendo $\mu = 1250$ cp. Obtenha uma expressão algébrica para a tensão de cisalhamento que atua no membro esférico. Avalie a tensão máxima de cisalhamento que atua sobre o membro esférico para as condições mostradas. (O máximo está necessariamente localizado no raio máximo?) Desenvolva uma expressão (na forma de uma integral) para o torque de cisalhamento viscoso total que atua no membro esférico. Calcule o torque utilizando as dimensões mostradas.

P2.52

2.53 Pequenas bolhas de gás são formadas quando uma garrafa ou lata de refrigerante é aberta. O diâmetro médio de uma bolha é cerca de 0,1 mm. Estime a diferença de pressão entre o interior e o exterior de tais bolhas.

2.54 Encha lentamente um copo de água até o nível máximo possível. Observe o nível da água bem de perto. Explique agora como este nível pode ser superior ao do vidro do copo.

2.55 Observe a formação e queda das pequenas gotas na extremidade de um conta-gotas de remédio. Comente os estágios no desenvolvimento de tais gotas.

2.56 Planeje um experimento para medir a tensão superficial de um líquido similar à água. Se necessário, assista ao filme da NCFMF *Tensão Superficial* para desenvolver idéias. Qual método seria mais adequado para um laboratório de graduação? Qual a precisão esperada nos experimentos?

2.57 A água é normalmente considerada um fluido incompressível quando se avaliam variações na pressão estática. Na verdade, a água é 100 vezes mais compressível que o aço. Supondo que o módulo de compressibilidade da água é constante, calcule a variação percentual na sua massa específica para um aumento na pressão de 100 atm. Trace um gráfico mostrando a variação percentual na massa específica da água como função de p/p_{atm} até a pressão de 3400 atm, que é aproximadamente a pressão utilizada em jatos líquidos de alta velocidade para corte de concreto e outros materiais compostos. A suposição de massa específica constante seria razoável em cálculos de engenharia para jatos de corte?

2.58 Considere o escoamento incompressível laminar, viscoso, sobre uma placa plana semi-infinita conforme mostrado na Fig. 2.11. Esboce a variação na tensão de cisalhamento, τ_{yx}, como uma função de y nas localizações x_1 e x_2. Esboce também a variação na tensão de cisalhamento ao longo da superfície da placa ($y = 0$) como uma função de x.

2.59 Como as asas de um aeroplano desenvolvem sustentação?

Capítulo 3

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Por definição, um fluido deve deformar-se continuamente quando uma tensão tangencial de qualquer magnitude lhe é aplicada. A ausência de movimento relativo (e, por conseguinte, de deformação angular) implica a ausência de tensões de cisalhamento. Portanto, os fluidos, tanto em repouso quanto em movimento de "corpo rígido", são capazes de suportar apenas tensões normais. A análise de casos hidrostáticos é, dessa forma, apreciavelmente mais simples do que a de fluidos submetidos a deformação angular (veja a Seção 5.3.3).

A mera simplicidade não justifica o estudo de um assunto. As forças normais transmitidas por fluidos são importantes em muitas situações práticas. Usando os princípios da hidrostática, podemos calcular as forças sobre objetos submersos, desenvolver instrumentos para a medição de pressão e deduzir propriedades da atmosfera e dos oceanos. Os princípios da hidrostática também podem ser empregados para determinar as forças desenvolvidas pelos sistemas hidráulicos em aplicações como prensas industriais ou freios de automóveis.

Num fluido estático e homogêneo, ou num fluido submetido a movimento de corpo rígido, uma partícula retém a sua identidade por todo o tempo, e o elemento fluido não se deforma. Podemos aplicar a segunda lei de Newton para avaliar a reação da partícula às forças que agem sobre ela.

3.1 A EQUAÇÃO BÁSICA DA ESTÁTICA DOS FLUIDOS

O nosso objetivo principal é obter uma equação que nos possibilite determinar o campo de pressão dentro de um fluido estático. Para isso, aplicamos a segunda lei de Newton a um elemento fluido diferencial de massa $dm = \rho d\forall$, com lados dx, dy e dz, conforme mostrado na Fig. 3.1. O elemento fluido é estático em relação ao sistema estacionário de coordenadas retangulares. (Fluidos em movimento de corpo rígido serão abordados na Seção 3.7.)

De nossas discussões anteriores, lembremos que dois tipos genéricos de forças podem ser aplicados a um fluido: forças de corpo ou de campo e forças de superfície. A única força de campo que deve ser considerada na maioria dos problemas de engenharia é a decorrente da gravidade. Em algumas situações, forças originadas de campos elétricos ou magnéticos podem estar presentes; elas não serão consideradas neste texto.[1]

Para um elemento fluido diferencial, a força de campo é

$$d\vec{F}_B = \vec{g}\,dm = \vec{g}\rho\,d\forall$$

[1] O efeito das forças de campo causado por campos magnéticos é ilustrado no filme da NCFMF, *Magnetohydrodynamics*.

onde $\vec{g}$ é o vetor da gravidade local, ρ é a massa específica e $d\forall$ é o volume do elemento. Em coordenadas cartesianas, $d\forall = dxdydz$, de modo que

$$d\vec{F}_B = \rho\vec{g}\,dx\,dy\,dz$$

Em um fluido estático, nenhuma tensão de cisalhamento pode estar presente. Então, a única força de superfície é a de pressão. A pressão é um campo escalar, $p = p(x, y, z)$; a pressão varia com a posição dentro do fluido. A força líquida de pressão que resulta dessa variação pode ser avaliada somando-se todas as forças que atuam nas seis faces do elemento fluido.

Seja p a pressão no centro, O, do elemento. Para determinar a pressão em cada uma das seis faces do elemento, utilizamos um desenvolvimento em série de Taylor da pressão em torno do ponto O. A pressão na face esquerda do elemento diferencial é

$$p_L = p + \frac{\partial p}{\partial y}(y_L - y) = p + \frac{\partial p}{\partial y}\left(-\frac{dy}{2}\right) = p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

(Os termos de ordem mais elevada são omitidos porque desaparecem no processo subseqüente do desenvolvimento.) A pressão na face direita do elemento diferencial é

$$p_R = p + \frac{\partial p}{\partial y}(y_R - y) = p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

As *forças* de pressão que atuam nas duas superfícies y do elemento diferencial são mostradas na Fig. 3.1. Cada força de pressão é um produto de três termos. O primeiro é a magnitude da pressão. A magnitude é multiplicada pela área da face para dar a magnitude da força de pressão, e um vetor unitário é introduzido para indicar o sentido. Note também na Fig. 3.1 que a força de pressão atua *contra* a face. Uma pressão positiva corresponde a uma tensão normal de *compressão*.

As forças de pressão nas outras faces do elemento são obtidas do mesmo modo. Combinando todas essas forças, obtemos a força superficial total agindo sobre o elemento. Assim,

$$\begin{aligned} d\vec{F}_S = &\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dy\,dz)(\hat{i}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dy\,dz)(-\hat{i}) \\ &+ \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dx\,dz)(\hat{j}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dx\,dz)(-\hat{j}) \\ &+ \left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dx\,dy)(\hat{k}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dx\,dy)(-\hat{k}) \end{aligned}$$

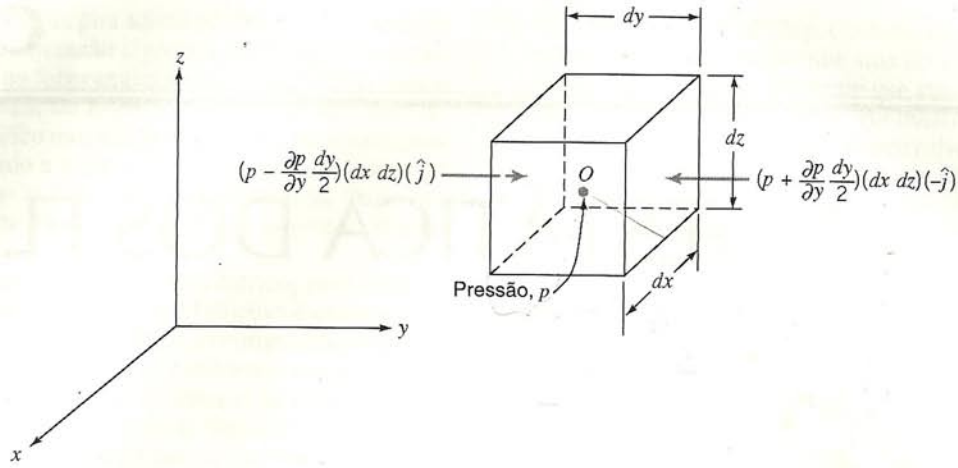



Fig. 3.1 Elemento diferencial de fluido e as pressões na direção y.

Agrupando e simplificando termos, obtemos:

$$d\vec{F}_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)dx\,dy\,dz \qquad (3.1a)$$

O termo entre parênteses é denominado gradiente de (ou da) pressão e pode ser escrito grad p ou ∇p. Em coordenadas retangulares

$$\text{grad}\,p \equiv \nabla p \equiv \left(\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right) \equiv \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)p$$

O gradiente pode ser visto como um operador vetorial; tomando-se o gradiente de um campo escalar, obtém-se um campo vetorial. Usando a designação de gradiente, a Eq. 3.1a pode ser escrita como

$$d\vec{F}_S = -\,\text{grad}\,p(dx\,dy\,dz) = -\nabla p\,dx\,dy\,dz \qquad (3.1b)$$

Fisicamente, o gradiente de pressão é o negativo da força de superfície por unidade de volume devida à pressão. Notamos que o nível de pressão não é importante para avaliar a força resultante da pressão. Em vez disso, o que importa é a taxa de variação da pressão com a distância, o *gradiente de pressão*. Encontraremos este termo ao longo do nosso estudo de mecânica dos fluidos.

Combinamos as formulações desenvolvidas para as forças de superfície e de campo a fim de obter a força total atuando sobre um elemento fluido. Assim,

$$d\vec{F} = d\vec{F}_S + d\vec{F}_B = (-\nabla p + \rho\vec{g})\,dx\,dy\,dz = (-\nabla p + \rho\vec{g})\,d\forall$$

ou, por unidade de volume,

$$\frac{d\vec{F}}{d\forall} = -\nabla p + \rho\vec{g} \qquad (3.2)$$

Para uma partícula fluida, a segunda lei de Newton fornece $d\vec{F} = \vec{a}\,dm = \vec{a}\,\rho d\forall$. Para um fluido estático, $\vec{a} = 0$. Então,

$$\frac{d\vec{F}}{d\forall} = \rho\vec{a} = 0$$

Substituindo $d\vec{F}/d\forall$ na Eq. 3.2, obtemos

$$-\nabla p + \rho\vec{g} = 0 \qquad (3.3)$$

Façamos uma breve revisão desta equação. O significado físico de cada termo é

$$-\nabla p \qquad + \qquad \rho\vec{g} \qquad = 0$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{força de pressão}\\ \text{resultante por unidade}\\ \text{de volume em um ponto}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{força de campo por}\\ \text{unidade de volume}\\ \text{em um ponto}\end{array}\right\} = 0$$

Esta é uma equação vetorial, o que significa que é equivalente a três equações de componentes que devem ser satisfeitas individualmente. As equações de componentes são

$$\left.\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = 0 & \text{direção } x \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0 & \text{direção } y \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0 & \text{direção } z \end{array}\right\} \qquad (3.4)$$

As Eqs. 3.4 descrevem a variação de pressão em cada uma das três direções dos eixos coordenados num fluido estático. Para simplificar ainda mais, é lógico escolher um sistema de coordenadas no qual o vetor gravidade esteja alinhado com um dos seus eixos. Se o sistema for escolhido com o eixo z apontando para cima na direção vertical, como mostrado na Fig. 3.1, então $g_x = 0$, $g_y = 0$ e $g_z = -g$. Nestas condições, as equações de componentes tornam-se

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad (3.5)$$

As Eqs. 3.5 indicam que, com as considerações feitas, a pressão é independente das coordenadas x e y; depende de z apenas. Então, visto que p é uma função de uma só variável, podemos usar uma derivada total no lugar da derivada parcial. Com essas simplificações, as Eqs. 3.5 reduzem-se finalmente a

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \equiv -\gamma \qquad (3.6)$$

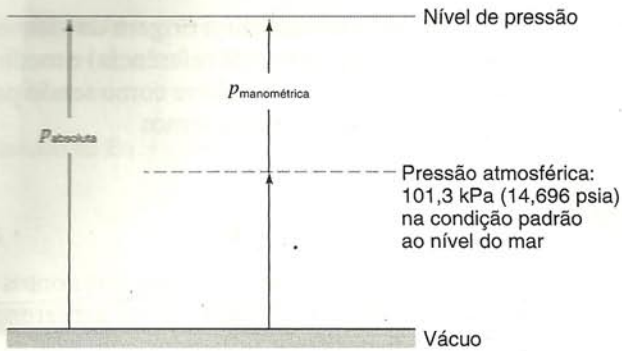



Fig. 3.2 Pressões absoluta e manométrica, mostrando níveis de referência.

Fig. 3.3 Variação da temperatura com a altitude na atmosfera padrão dos EUA.

Restrições: (1) Fluido estático
(2) A gravidade é a única força de campo
(3) O eixo z é vertical e para cima

Esta equação é a relação básica pressão-altura da estática dos fluidos. Está sujeita às restrições mencionadas. Desta forma, deve ser aplicada somente quando estas restrições forem razoáveis para a situação física. Para determinar a distribuição de pressão num fluido estático, a Eq. 3.6 pode ser integrada, aplicando-se as condições de fronteira apropriadas.

Antes de considerarmos casos específicos com tratamento analítico imediato, é importante notar que os valores de pressão devem ser estabelecidos em relação a um nível de referência. Se o nível de referência for o vácuo, as pressões são denominadas *absolutas*, como mostrado na Fig. 3.2.

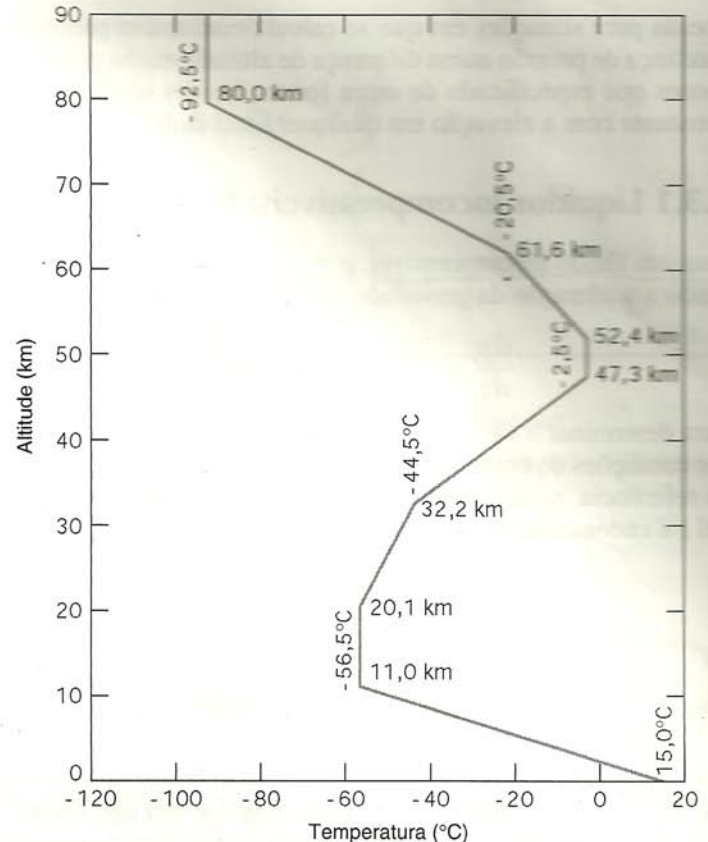
A maioria dos medidores de pressão indica uma *diferença* de pressão — a diferença entre a pressão medida e a do ambiente (usualmente a pressão atmosférica). Os níveis de pressão medidos em relação à pressão atmosférica são denominados pressões *manométricas*. Assim,

$$p_{manométrica} = p_{absoluta} - p_{atmosférica}$$

Pressões absolutas devem ser empregadas em todos os cálculos com equação de gás ideal ou com outras equações de estado.

3.2 A ATMOSFERA PADRÃO

Vários congressos internacionais de aeronáutica têm sido realizados para que especialistas de todo o mundo na área de aviação possam se comunicar melhor. A meta é o desenvolvimento de um modelo para a atmosfera que possa ser aceito como padrão; o consenso sobre este padrão internacional ainda está por ser alcançado.

O perfil de temperatura para a atmosfera padrão nos EUA é mostrado na Fig. 3.3. Valores para outras propriedades são calculados em função da altitude e estão apresentados no Apêndice A. Condições da atmosfera padrão nos EUA, ao nível do mar, estão resumidas na Tabela 3.1.

3.3 VARIAÇÃO DE PRESSÃO NUM FLUIDO ESTÁTICO

Vimos que a variação de pressão em qualquer fluido em repouso é descrita pela relação básica pressão-altura

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad (3.6)$$

Embora ρg possa ser definido como o peso específico, γ, foi escrito como ρg na Eq. 3.6 para enfatizar que *ambos*, ρ e g, devem ser considerados variáveis. A fim de integrar a Eq. 3.6 para achar a distribuição de pressão, devemos fazer considerações sobre as variações em ρ e g.

Para a maioria das situações práticas da engenharia, a variação em g é desprezível. A variação em g precisa ser incluída

Tabela 3.1 Condições da Atmosfera Padrão nos EUA ao Nível do Mar

Propriedade	Símbolo	SI	Inglês
Temperatura	T	15°C	59°F
Pressão	p	101,3 kPa (abs)	14,696 psia
Massa específica	ρ	1.225 kg/m^2	0,002377 slug/pé^3
Peso específico	γ	—	0,07651 lbf/pé^3
Viscosidade	μ	$1{,}789 \times 10^{-5}$ kg/(m · s) (Pa · s)	$3{,}737 \times 10^{-7}$ lbf · s/pé^2

apenas para situações em que se calcula com muita precisão a mudança de pressão numa diferença de altitude muito grande. A menos que especificado de outra forma, iremos supor que g é constante com a elevação em qualquer local dado.

3.3.1 Líquidos Incompressíveis: Manômetros

Para um fluido incompressível, ρ = constante. Então, considerando a aceleração da gravidade constante,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = \text{constante}$$

Para determinar a variação de pressão, devemos integrar e aplicar condições de contorno apropriadas. Caso a pressão no nível de referência, z_0, seja designada por p_0, então a pressão p no nível z é encontrada por integração:

$$\int_{p_0}^{p} dp = -\int_{z_0}^{z} \rho g\, dz$$

ou

$$p - p_0 = -\rho g(z - z_0) = \rho g(z_0 - z)$$

Para líquidos, é conveniente colocar a origem do sistema de coordenadas na superfície livre (nível de referência) e medir distâncias para baixo a partir da superfície livre como sendo positivas. Com h medido positivo para baixo, temos

$$z_0 - z = h$$

ou

$$p - p_0 = \rho g h \tag{3.7}$$

A Eq. 3.7 indica que a diferença de pressão entre dois pontos num fluido estático pode ser determinada medindo-se a diferença de elevação entre eles. Os dispositivos utilizados com esse propósito são chamados *manômetros*.

A pressão atmosférica pode ser obtida por um *barômetro*, no qual a altura de uma coluna de mercúrio é medida. A altura medida pode ser convertida em unidades de engenharia usando-se a Eq. 3.7 e os dados de densidade relativa do mercúrio apresentados no Apêndice A. Embora a pressão de vapor do mercúrio possa ser desprezada para trabalhos de precisão, correções de temperatura e altitude devem ser aplicadas ao nível medido; os efeitos de tensão superficial também devem ser considerados. O efeito da capilaridade em um tubo causada pela tensão superficial está ilustrado no Problema-Exemplo 3.1.

EXEMPLO 3.1 — Análise do Efeito Capilar em um Tubo

Um tubo de pequeno diâmetro é imerso em um líquido em um tanque aberto. Obtenha uma expressão para a mudança de nível do líquido no interior do tubo causada pela tensão superficial. Faça um gráfico dos resultados como função do diâmetro do tubo.

PROBLEMA-EXEMPLO 3.1

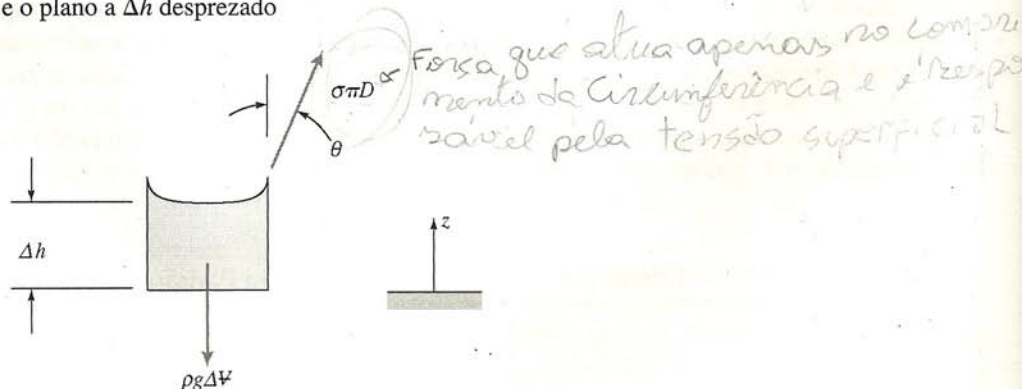
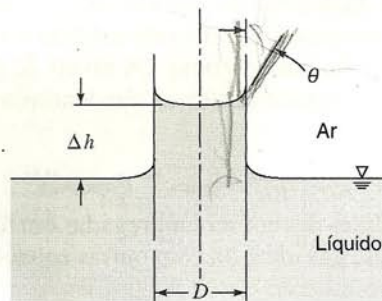
DADO: Tubo parcialmente imerso em um tanque aberto conforme mostrado.

DETERMINAR: Uma expressão geral para a variação no nível do líquido. Plotar os resultados como uma função do diâmetro do tubo.

SOLUÇÃO:

Aplicar a equação básica da hidrostática e a definição de tensão superficial; somar as forças no pequeno volume de líquido deslocado.

Equações básicas: $\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \sum F_z = 0$

Considerações:
(1) Fluidos estáticos
(2) Medições feitas no meio do menisco
(3) Volume entre o menisco e o plano a Δh desprezado

Como os fluidos são estáticos, a pressão é constante ao longo dos planos horizontais; não existem forças de pressão no elemento $\Delta\forall$. Somando as forças na direção z, obtemos

$$\sum F_z = \sigma \pi D \cos\theta - \rho g\, \Delta\forall = 0 \tag{1}$$

Não considerando o volume de líquido acima de Δh, isto é, na região adjacente à parede do tubo, obtemos

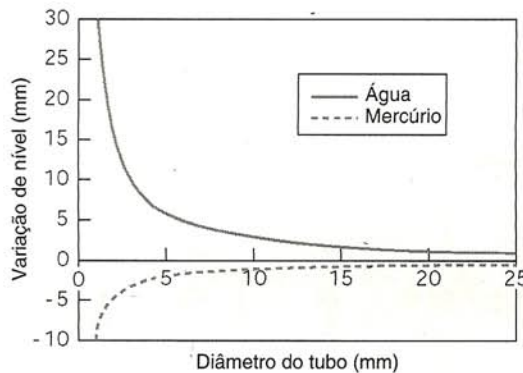
$$\Delta V\!\!\!\!/ \approx \frac{\pi D^2}{4}\Delta h$$

Substituindo na Eq. 1 obtemos

$$\sigma \pi D \cos\theta - \rho g \frac{\pi D^2}{4}\Delta h = 0$$

ou

$$\Delta h = \frac{4\sigma\cos\theta}{\rho g D}$$

Para a água, $\sigma = 72{,}8$ mN/m e $\theta \approx 0°$, e para o mercúrio, $\sigma = 375$ mN/m e $\theta = 140°$ (Tabela A.4). Fazendo o gráfico, obtemos

Este problema foi incluído para ilustrar o princípio básico usado na análise dos efeitos da tensão superficial. A consideração de que o volume entre o menisco e o plano $z = \Delta h$ é pequeno aplica-se somente quando Δh é grande em comparação com o diâmetro do tubo. Portanto, esta suposição é mais razoável para tubos de pequenos diâmetros com uma significativa variação no nível do líquido. Esta análise simples prediz uma ascensão capilar na água de $\Delta h = 1$ mm para $D = 25$ mm, a qual está fora da provável faixa de validade desta suposição. Outras aplicações da definição de tensão superficial são descritas nos problemas de final de capítulo.

Folsom [1] mostra que a análise simples do Exemplo 3.1 superestima o efeito da capilaridade e fornece resultados razoáveis somente para tubos de diâmetros inferiores a 0,1 polegada. Na faixa de diâmetros $0{,}1 < D < 1{,}1$ pol., dados experimentais para a ascensão capilar em um tubo com interface ar-água são correlacionados pela expressão empírica $\Delta h = 0{,}400/e^{4{,}37D}$.

Um manômetro simples de tubo em U é mostrado na Fig. 3.4. Como a perna direita do tubo está aberta para a atmosfera, as medições de h_1 e h_2 permitirão a determinação da pressão manométrica em A. Usando a notação da Fig. 3.4 e aplicando a Eq. 3.7 entre A e B e entre B e C, obtém-se:

$$p_A - p_B = \rho_1 g(z_B - z_A) = -\rho_1 g h_1$$

e

$$p_B - p_C = \rho_2 g(z_C - z_B) = \rho_2 g h_2$$

Somando as duas equações

$$p_A - p_C = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$$

Uma vez que $p_C = p_{\text{atm}}$, temos $p_A - p_C = p_{A\text{manométrica}}$.

Se a massa específica ρ_1 for desprezível comparada com ρ_2, então $p_{A\text{manométrica}} = \rho_2 g h_2$. Note que as pressões em B' e B são iguais porque eles se encontram na mesma elevação num volume contínuo do mesmo fluido.

Os manômetros são aparelhos simples e baratos usados com freqüência para medir pressões. Como a mudança de nível do líquido é muito pequena para pequenas diferenças de pressão, o manômetro de tubo em U pode dificultar leituras mais precisas. A *sensibilidade* do manômetro é definida como a razão entre a deflexão observada no líquido manométrico e a diferença de nível equivalente no tubo em U com água, para uma dada diferença de pressão aplicada. A sensibilidade pode ser aumentada por modificação no projeto do manômetro ou pelo uso de dois líquidos imiscíveis com massas específicas ligeiramente diferentes. A análise de um manômetro de tubo inclinado é ilustrada no Problema-Exemplo 3.2.

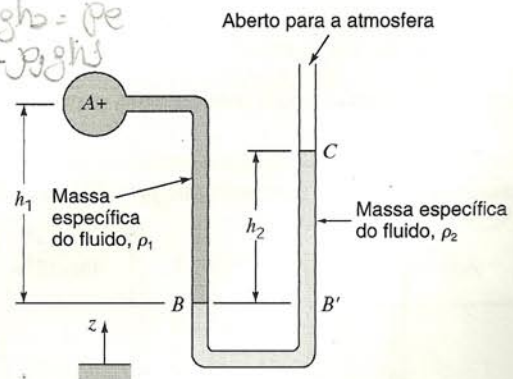
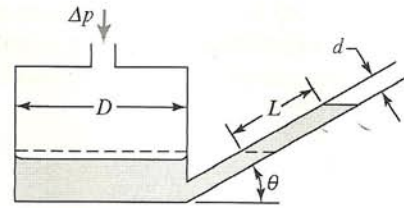



Fig. 3.4 Manômetro de tubo em U para medir pressão manométrica em *A*.

EXEMPLO 3.2 — Análise de Manômetro de Tubo Inclinado

Um manômetro de reservatório com tubo inclinado é construído como mostrado. Analise o manômetro para obter uma expressão geral para a deflexão do líquido, L, no tubo inclinado, em termos da diferença de pressão aplicada, Δp. Obtenha, também, a expressão geral para a sensibilidade do manômetro, e determine os valores de parâmetros que dão sensibilidade máxima.

PROBLEMA-EXEMPLO 3.2

DADO: Manômetro com reservatório e tubo inclinado conforme mostrado.

DETERMINAR: Expressão para L em termos de Δp.
Expressão geral para a sensibilidade do manômetro.
Valores dos parâmetros que dão sensibilidade máxima.

SOLUÇÃO: Use o nível do líquido em equilíbrio como referência.

Equações básicas: $$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad SG = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$$

Considerações: (1) Fluidos estáticos
(2) Fluidos incompressíveis

Então

$$dp = -\rho g\, dz \qquad \text{e} \qquad \int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g\, dz$$

Para $\rho_l =$ constante,

$$p_2 - p_1 = -\rho_l g(z_2 - z_1) \qquad \text{ou} \qquad p_1 - p_2 = \rho_l g(z_2 - z_1)$$

Substituindo, obtemos

$$p_{\text{atm}} + \Delta p - p_{\text{atm}} = \rho_l g[h - (-H)] = \rho_l g(h + H)$$

ou

$$\Delta p = \rho_l g(h + H) \tag{1}$$

Para eliminar H, tenha em mente que o volume do líquido no manômetro permanece constante; o volume deslocado do reservatório deve ser igual ao volume que sobe na coluna do tubo, então

$$\frac{\pi D^2}{4} H = \frac{\pi d^2}{4} L \qquad \text{ou} \qquad H = L\left(\frac{d}{D}\right)^2$$

Além disso, a partir da geometria do manômetro, $h = L \operatorname{sen} \theta$. Substituindo na Eq. 1 obtém-se

$$\Delta p = \rho_l g\left[L \operatorname{sen}\theta + L\left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = \rho_l g L\left[\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] \tag{2}$$

Portanto

$$L = \frac{\Delta p}{\rho_l g\left[\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]} \qquad L$$

Para obter uma expressão para a sensibilidade, expressa-se Δp em termos de uma altura de coluna de água equivalente, h_e.

$$\Delta p = \rho_{H_2O} g h_e \tag{3}$$

Combinando as Eqs. 2 e 3, e notando que $\rho_l = SG_l \rho_{H_2O}$ obtém-se

$$\rho_{H_2O} g h_e = SG_l \rho_{H_2O} g L\left[\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$$

ou

$$s = \frac{L}{h_e} = \frac{1}{SG_l\left[\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]} \qquad s$$

Esta expressão define a sensibilidade de um manômetro de tubo inclinado. Ela mostra que, para aumentar a sensibilidade, todos os parâmetros SG_l, sen θ, e d/D devem ser feitos tão pequenos quanto possível. Portanto, o projetista deve escolher o líquido manométrico e dois parâmetros geométricos para completar um projeto, conforme discutido a seguir.

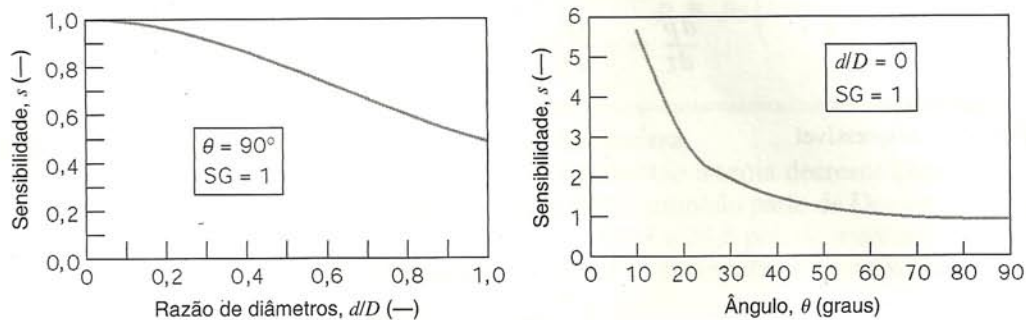
Líquido Manométrico

O líquido manométrico deve ter a menor densidade relativa possível para aumentar a sensibilidade. Além disso, o líquido manométrico deve ser seguro (não-tóxico e não-inflamável), ser imiscível com o fluido cuja pressão esteja sendo medida, sofrer perda mínima por evaporação e desenvolver um menisco satisfatório. Finalmente, o líquido manométrico deve apresentar tensão superficial relativamente baixa e aceitar tingimento para melhorar sua visibilidade.

As Tabelas A.1, A.2 e A.4 mostram que hidrocarbonetos líquidos satisfazem muitos desses critérios. A menor densidade relativa é em torno de 0,8, a qual aumenta a sensibilidade do manômetro em torno de 25% comparada com a água.

Relação de Diâmetros

Os gráficos mostram o efeito da relação de diâmetros sobre a sensibilidade para um manômetro de reservatório vertical com um líquido manométrico de densidade relativa igual a 1,0. Note que $d/D = 1$ corresponde a um manômetro de tubo em U normal; sua sensibilidade é igual a 0,5 porque metade da diferença de altura na coluna de líquido aparece em cada lado do manômetro. A sensibilidade dobra para 1,0 quando d/D se aproxima de zero porque a maior parte da variação no nível do líquido ocorre no tubo de medida.

O diâmetro mínimo do tubo, d, deve ser maior que 6 mm para evitar efeito capilar excessivo. O máximo diâmetro do reservatório, D, é limitado pelo tamanho do manômetro. Se D é fixado em 60 mm, de forma que d/D é 0,1, então $(d/D)^2 = 0{,}01$, e a sensibilidade cresce para 0,99, bem perto do valor máximo atingível 1,0.

Ângulo de Inclinação

O último gráfico mostra o efeito do ângulo de inclinação na sensibilidade para $d/D = 0$. A sensibilidade aumenta rapidamente quando o ângulo de inclinação é reduzido para valores abaixo de 30°. Um limite prático é estabelecido em torno de 10°: o menisco torna-se indistinto, e a leitura do nível fica difícil para ângulos menores.

Resumo

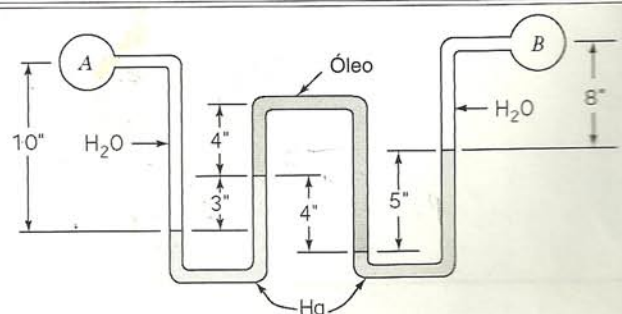
Combinando os melhores valores (SG = 0,8, $d/D = 0{,}1$, e $\theta = 10°$), obtém-se uma sensibilidade de 6,81 para o manômetro. Fisicamente, esta é a razão entre a deflexão observada no líquido e a altura de coluna de água equivalente. Portanto, a deflexão no tubo inclinado é ampliada 6,81 vezes comparada a uma coluna de água vertical. Com a melhora da sensibilidade, uma pequena diferença de pressão pode ser lida com maior precisão que em um manômetro de água, ou uma menor diferença de pressão pode ser lida com a mesma precisão.

Estudantes têm, algumas vezes, dificuldades para analisar situações em manômetros de múltiplos líquidos. As seguintes regras são úteis:

1. Quaisquer dois pontos na mesma elevação em um volume contínuo do mesmo líquido estão à mesma pressão.
2. A pressão cresce à medida que se *desce* na coluna de líquido (lembre-se da mudança de pressão quando se mergulha numa piscina).

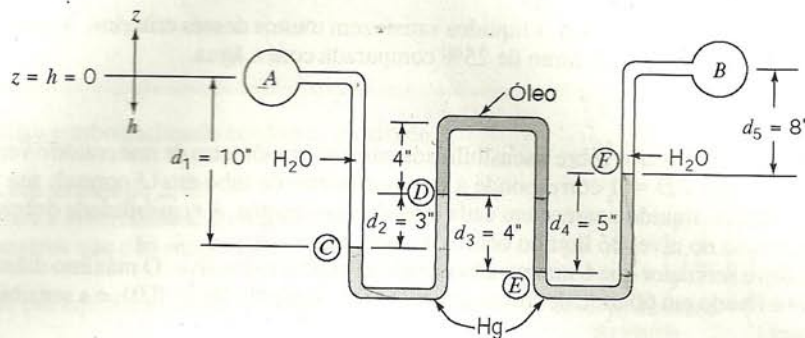
O Problema-Exemplo 3.3 ilustra o uso de um manômetro de múltiplos líquidos para medida de diferença de pressão.

EXEMPLO 3.3 — Manômetro de Múltiplos Líquidos

Água escoa no interior dos tubos *A* e *B*. Óleo lubrificante está na parte superior do tubo em U invertido. Mercúrio está na parte inferior dos dois tubos em U. Determine a diferença de pressão, $p_A - p_B$, nas unidades lbf/pol².

PROBLEMA-EXEMPLO 3.3

DADO: Manômetro com múltiplos líquidos conforme mostrado.

DETERMINAR: A diferença de pressão, $p_A - p_B$, em lbf/pol².

SOLUÇÃO:

Equações básicas:
$$\frac{dp}{dz} = -\frac{dp}{dh} = -\rho g \qquad SG = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$$

Considerações: (1) Fluido estático
(2) Fluido incompressível

Então

$$dp = \rho g\, dh$$

e

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{h_1}^{h_2} \rho g\, dh$$

Para ρ = constante,

$$p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1)$$

Começando no ponto A e aplicando a equação entre pontos sucessivos ao longo do manômetro, ficamos com

$$p_C - p_A = +\rho_{H_2O} g d_1$$
$$p_D - p_C = -\rho_{Hg} g d_2$$
$$p_E - p_D = +\rho_{óleo} g d_3$$
$$p_F - p_E = -\rho_{Hg} g d_4$$
$$p_B - p_F = -\rho_{H_2O} g d_5$$

Multiplicando cada equação por menos um e somando, obtemos

$$p_A - p_B = (p_A - p_C) + (p_C - p_D) + (p_D - p_E) + (p_E - p_F) + (p_F - p_B)$$
$$= -\rho_{H_2O} g d_1 + \rho_{Hg} g d_2 - \rho_{óleo} g d_3 + \rho_{Hg} g d_4 + \rho_{H_2O} g d_5$$

Substituindo $\rho = SG\rho_{H_2O}$, com $SG_{Hg} = 13{,}6$ e $SG_{óleo} = 0{,}88$ (Tabela A.2), resulta

$$p_A - p_B = g(-\rho_{H_2O} d_1 + 13{,}6\rho_{H_2O} d_2 - 0{,}88\rho_{H_2O} d_3 + 13{,}6\rho_{H_2O} d_4 + \rho_{H_2O} d_5)$$
$$= g\rho_{H_2O}(-d_1 + 13{,}6 d_2 - 0{,}88 d_3 + 13{,}6 d_4 + d_5)$$
$$= g\rho_{H_2O}(-10 + 40{,}8 - 3{,}52 + 68 + 8) \text{ pol.}$$
$$= g\rho_{H_2O} \times 103{,}3 \text{ pol.}$$
$$= \frac{32{,}2 \text{ pé}}{\text{s}^2} \times \frac{1{,}94 \text{ slug}}{\text{pé}^3} \times 103{,}3 \text{ pol.} \times \frac{\text{pé}}{12 \text{ pol.}} \times \frac{\text{pé}^2}{144 \text{ pol.}^2} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}}$$

$$p_A - p_B = 3{,}73 \text{ lbf/pol.}^2 \longleftarrow \qquad p_A - p_B$$

3.3.2 Gases

Em muitos problemas práticos de engenharia, a massa específica varia consideravelmente com a altitude, e resultados precisos requerem que este fato seja levado em conta. A variação de pressão em um fluido compressível pode ser avaliada pela integração da Eq. 3.6. Antes que isto seja feito, a massa específica deve ser expressa como função de uma das outras variáveis da equação. Informação sobre propriedade ou uma equação de estado pode ser usada para a obtenção da correlação requerida para a massa específica. Diversos tipos de variação de propriedade podem ser analisados. (Veja Exemplo 3.4.)

A massa específica de gases geralmente depende da pressão e da temperatura. A equação de estado de gás ideal,

$$p = \rho RT \tag{1.1}$$

onde R é a constante universal dos gases (veja o Apêndice A) e T a temperatura absoluta, modela com precisão o comportamento de grande parte dos gases em projetos de engenharia. Entretanto, o uso da Eq. 1.1 introduz a temperatura do gás como uma variável adicional. Então, uma suposição adicional deve ser feita sobre a variação de temperatura antes da integração da Eq. 3.6.

Na atmosfera padrão dos EUA, a temperatura decresce linearmente com a altitude até uma elevação de 11,0 km. Para uma variação linear de temperatura com a altitude dada por $T = T_0 - mz$, obtemos da Eq. 3.6,

$$dp = -\rho g\,dz = -\frac{pg}{RT}\,dz = -\frac{pg}{R(T_0 - mz)}\,dz$$

Separando variáveis e integrando de $z = 0$ onde $p = p_0$, até a elevação z onde a pressão é p, resulta

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_0^z \frac{g\,dz}{R(T_0 - mz)}$$

Portanto

$$\ln\frac{p}{p_0} = \frac{g}{mR}\ln\left(\frac{T_0 - mz}{T_0}\right) = \frac{g}{mR}\ln\left(1 - \frac{mz}{T_0}\right)$$

e a variação de pressão, em um gás cuja temperatura varia linearmente com a elevação, é dada por

$$p = p_0\left(1 - \frac{mz}{T_0}\right)^{g/mR} = p_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/mR} \tag{3.8}$$

EXEMPLO 3.4 — Variação da Pressão e da Massa Específica na Atmosfera

A máxima capacidade de fornecimento de potência de um motor de combustão interna decresce com a altitude porque a massa específica do ar e conseqüentemente a vazão mássica de ar decrescem. Um caminhão parte de Denver (elevação de 5280 pés) em um dia onde a temperatura e a pressão barométrica são respectivamente 80°F e 24,8 pol. de mercúrio respectivamente. Ele viaja através de Vail Pass (elevação de 10.600 pés), onde a temperatura é de 62°F. Determine a pressão barométrica em Vail Pass e a variação percentual na massa específica do ar.

PROBLEMA-EXEMPLO 3.4

DADO: Caminhão viaja de Denver para Vail Pass.

Denver: $z = 5.280$ pés
$p = 24{,}8$ pol. de Hg
$T = 80°\text{F}$

Vail Pass: $z = 10.600$ pés
$T = 62°\text{F}$

Determinar: Pressão atmosférica em Vail Pass.
Variação percentual na massa específica do ar entre Denver e Vail Pass.

SOLUÇÃO:

Equações básicas: $\dfrac{dp}{dz} = -\rho g \qquad p = \rho RT$

Considerações: (1) Fluido estático
(2) O ar comporta-se como um gás ideal

Consideraremos quatro suposições para a variação de propriedades com a altitude.

(a) Supondo que a massa específica varie linearmente com a altitude, a Eq. 3.8 fornece

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/mR}$$

Em seguida obtemos

$$m = \frac{T_0 - T}{z - z_0} = \frac{(80 - 62)°\text{F}}{(10{,}6 - 5{,}28)10^3\,\text{pé}} = 3{,}38 \times 10^{-3}\ °\text{F/pé}$$

e

$$\frac{g}{mR} = \frac{32{,}2\,\text{pé}}{\text{s}^2} \times \frac{\text{pé}}{3{,}38 \times 10^{-3}\ °\text{F}} \times \frac{\text{lbm} \cdot °\text{R}}{53{,}3\,\text{pé} \cdot \text{lbf}} \times \frac{\text{slug}}{32{,}2\,\text{lbm}} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}} = 5{,}55$$

Então

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/mR} = \left(\frac{460+62}{460+80}\right)^{5,55} = (0,967)^{5,55} = 0,830$$

e

$$p = 0,830p_0 = (0,830)24,8 \text{ pol. Hg} = 20,6 \text{ pol. Hg} \qquad p$$

{Note que a temperatura deve ser expressa como temperatura absoluta na equação de estado do gás ideal.}

A variação percentual na massa específica é dada por

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 = \frac{p}{p_0}\frac{T_0}{T} - 1 = \frac{0,830}{0,967} - 1 = -0,142 \text{ ou } -14,2\% \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

(b) Se a massa específica do ar for considerada constante e igual a ρ_0

$$p = p_0 - \rho_0 g(z - z_0) = p_0 - \frac{p_0 g(z - z_0)}{RT_0} = p_0\left[1 - \frac{g(z - z_0)}{RT_0}\right]$$

$$p = 20,2 \text{ pol. de Hg} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = 0 \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

(c) Se a temperatura for suposta constante, então

$$dp = -\rho g\, dz = -\frac{p}{RT} g\, dz$$

e

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_{z_0}^{z} \frac{g}{RT}\, dz$$

$$p = p_0 \exp\left[\frac{-g(z - z_0)}{RT}\right]$$

Para T = constante = T_0,

$$p = 20,6 \text{ pol. de Hg} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = -16,9\% \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

(d) Para uma atmosfera adiabática p/ρ^k = constante,

$$p = p_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{k/k-1} = 22,0 \text{ pol. de Hg} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = -8,2\% \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

Podemos notar que, para uma mudança modesta na altitude, a pressão prevista não é fortemente dependente da forma como a propriedade varia; os valores calculados para as quatro diferentes suposições apresentam um desvio máximo em torno de 9%. Há um desvio consideravelmente maior na variação percentual da massa específica. A consideração de variação linear da temperatura com a altitude é a suposição mais razoável.

{Incluiu-se este problema a fim de ilustrar o emprego da equação de estado do gás ideal com a relação básica entre pressão e altura, para avaliar a distribuição de pressão na atmosfera.}

3.4 SISTEMAS HIDRÁULICOS

Os sistemas hidráulicos são caracterizados por pressões muito elevadas. Como conseqüência disto, as variações de pressão hidrostática podem ser freqüentemente desprezadas nestes sistemas. Os freios hidráulicos de automóveis desenvolvem pressões de até 10 MPa (1500 psi); os sistemas de atuação hidráulica de aviões e máquinas são, muitas vezes, projetados para pressões de até 40 MPa (6000 psi) e os macacos hidráulicos usam pressões de até 70 MPa (10.000 psi). Equipamentos de testes de laboratórios, para fins especiais, são comercialmente disponíveis para emprego em pressões de até 1000 MPa (150.000 psi)!

Embora os líquidos sejam, em geral, considerados incompressíveis a pressões ordinárias, variações em suas massas específicas podem ser apreciáveis a pressões elevadas. Os módulos de compressibilidade dos fluidos hidráulicos também podem apresentar variação acentuada a pressões elevadas. Nos problemas que envolvem escoamento não permanente, tanto a compressibilidade do fluido quanto a elasticidade da estrutura de fronteira devem ser consideradas. A análise de problemas como ruído de golpe de aríete e vibração em sistemas hidráuli-

cos, atuadores e amortecedores de choque é complexa e está além do escopo deste livro.

3.5 FORÇAS HIDROSTÁTICAS SOBRE SUPERFÍCIES SUBMERSAS

Uma vez que já determinamos a maneira pela qual a pressão varia num fluido estático, podemos examinar a força que atua sobre uma superfície submersa num líquido.

Para determinar completamente a resultante da força que atua sobre uma superfície submersa, devemos especificar:

1. A magnitude da força.
2. O sentido da força.
3. A linha de ação da força.

Consideraremos superfícies submersas planas e curvas.

3.5.1 Força Hidrostática sobre uma Superfície Plana Submersa

A Fig. 3.5 mostra uma superfície plana submersa em cuja face superior desejamos determinar a força hidrostática resultante. As coordenadas foram escolhidas de modo que a superfície se situa no plano xy.

Uma vez que não pode haver tensões de cisalhamento num fluido em repouso, a força hidrostática sobre qualquer elemento da superfície deve ser normal a ele. A força de pressão atuando sobre um elemento $d\vec{A}$ da face superior é dada por

$$d\vec{F} = -p\, d\vec{A} \qquad (3.9)$$

O sentido do vetor $d\vec{A}$ é o mesmo do vetor unitário normal à área em questão e apontando para fora desta; o sinal negativo na Eq. 3.9 indica que a força $d\vec{F}$ atua *contra* a superfície num sentido oposto ao de $d\vec{A}$ A força *resultante* atuando na superfície é encontrada somando-se as contribuições das forças infinitesimais sobre a área inteira.

Assim,

$$\vec{F}_R = \int_A -p\, d\vec{A} \qquad (3.10)$$

De maneira a avaliar a integral da Eq. 3.10, tanto a pressão, p, quanto o elemento de área, $d\vec{A}$, devem ser expressos em termos das mesmas variáveis. A relação básica pressão-altura para um fluido estático pode ser escrita como

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

onde h é positivo quando medido para baixo a partir da superfície livre do líquido. Então, se a pressão na superfície livre (h = 0) for p_0, podemos integrar a relação pressão-altura para obter uma expressão para a pressão, p, em qualquer profundidade, h. Dessa forma, visto que ρ = constante,

$$p = p_0 + \int_0^h \rho g\, dh = p_0 + \rho g h$$

Esta expressão para p pode então ser substituída na Eq. 3.10. A geometria da superfície é expressa em termos de x e y; desde que a profundidade, h, seja expressa em termos de y, isto é, $h = y \operatorname{sen} \theta$, a equação pode ser integrada para determinar a força resultante.

O ponto de aplicação da força resultante (o centro de pressão) deve ser tal que o seu momento em relação a qualquer eixo seja igual ao momento da força distribuída em relação ao mesmo eixo. Se o vetor posição, de uma origem arbitrária de coordenadas até o ponto de aplicação da resultante, for designado por $\vec{r}\,'$ segue-se que

$$\vec{r}\,' \times \vec{F}_R = \int \vec{r} \times d\vec{F} = -\int_A \vec{r} \times p\, d\vec{A} \qquad (3.11)$$

Referindo-nos à Fig. 3.5, vemos que $\vec{r}\,' = \hat{i}x' + \hat{j}y'$, $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$, e $d\vec{A} = -dA\hat{k}$. Uma vez que a força resultante,

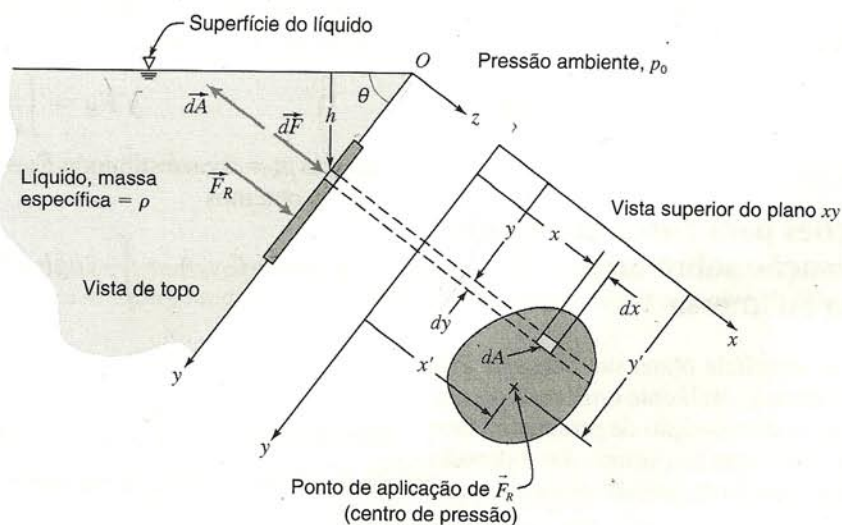



Fig. 3.5 Superfície plana submersa.

$\vec{F}_R$, atua contra a superfície (num sentido oposto ao de $d\vec{A}$), então $\vec{F}_R = F_R\hat{k}$. Substituindo na Eq. 3.11, obtemos

$$(\hat{i}x' + \hat{j}y') \times F_R\hat{k} = \int (\hat{i}x + \hat{j}y) \times d\vec{F} =$$

$$= \int_A (\hat{i}x + \hat{j}y) \times p\,dA\,\hat{k}$$

Avaliando o produto vetorial, obtemos

$$-\hat{j}x'F_R + \hat{i}y'F_R = \int_A (-\hat{j}xp + \hat{i}yp)\,dA$$

Esta é uma equação vetorial, e os componentes devem ser iguais. Logo,

$$y'F_R = \int_A yp\,dA \quad \text{e} \quad x'F_R = \int_A xp\,dA \qquad (3.12)$$

onde x' e y' são as coordenadas do ponto de aplicação da força resultante. Note que as Eqs. 3.10 e 3.12 podem ser usadas para determinar a magnitude da força resultante e o seu ponto de aplicação em qualquer superfície plana submersa. Elas não requerem que a massa específica seja constante ou que a superfície livre do líquido esteja sob pressão atmosférica.

As Eqs. 3.10 e 3.12 são enunciados matemáticos de princípios básicos já familiares, de cursos anteriores de física e estática:

1. A força resultante é a soma de forças infinitesimais (Eq. 3.10).
2. O momento da força resultante em relação a qualquer eixo é igual ao momento da força distribuída em relação ao mesmo eixo (Eq. 3.12).

Ao avaliar a força hidrostática agindo sobre uma superfície plana submersa, utilizamos notação vetorial a fim de enfatizar que forças e momentos são quantidades vetoriais. Uma vez que todos os elementos da força são paralelos, o emprego de vetores não é essencial. Resumindo:

1. A magnitude de $\vec{F}_R$ é dada por

$$F_R = |\vec{F}_R| = \int p\,dA \qquad (3.13)$$

2. A direção de $\vec{F}_R$ é normal à superfície.
3. Para uma superfície no plano xy, a linha de ação de $\vec{F}_R$ passa pelo ponto x', y' (o centro de pressão), onde

$$y'F_R = \int_A yp\,dA \quad \text{e} \quad x'F_R = \int_A xp\,dA$$

3.5.2 Obtendo Equações para Força de Pressão e Ponto de Aplicação sobre uma Superfície Plana Submersa

A distribuição de pressão na superfície plana submersa da Fig. 3.5 é mostrada na Fig. 3.6. A pressão ambiente uniforme, p_0, age na face inferior da superfície. A distribuição de pressão na face superior é a soma da pressão ambiente uniforme com a pressão hidrostática do líquido. A distribuição de pressão na face superior é dada, então, por

$$p = p_0 + \rho g h$$

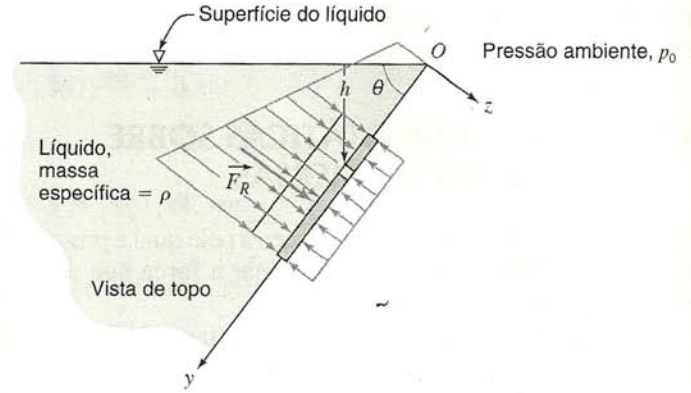



Fig. 3.6 Distribuição de pressão em uma superfície plana submersa.

A magnitude da força resultante, $\vec{F}_R$, na face superior é portanto

$$F_R = \int_A p\,dA = \int_A (p_0 + \rho g h)\,dA = \int_A (p_0 + \rho g y \operatorname{sen}\theta)\,dA$$

$$F_R = p_0 \int_A dA + \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A y\,dA = p_0 A + \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A y\,dA$$

A integral é o primeiro momento de área da superfície em relação ao eixo x, que pode ser escrito

$$\int_A y\,dA = y_c A$$

onde y_c é a coordenada y do *centróide* da área, A. Logo,

$$F_R = p_0 A + \rho g \operatorname{sen}\theta\, y_c A = (p_0 + \rho g h_c) A = p_c A \qquad (3.14)$$

onde p_c é a pressão atuante no líquido na posição do centróide da área A. Este resultado é válido para qualquer pressão, p_0, na superfície livre do líquido.

Quando a pressão ambiente (atmosférica), p_0, atua em ambos os lados da superfície, ela não contribui para a força hidrostática líquida sobre a superfície, podendo ser cancelada. Se a superfície livre está a uma pressão diferente da ambiente (atmosférica), então p_0 deve ser avaliada como uma pressão manométrica ao se usar a Eq. 3.14 no cálculo da força líquida sobre a superfície.

A fim de encontrar expressões para as coordenadas do centro de pressão, reconhecemos que o momento da força resultante em relação a qualquer eixo deve ser igual ao momento da força distribuída em relação ao mesmo eixo. Tomando os momentos em relação ao eixo x, temos

$$y'F_R = \int_A yp\,dA$$

Fazendo $p_0 = 0$ e substituindo $F_R = \rho g \operatorname{sen}\theta\, y_c A$, $p = \rho g h$, e $h = y \operatorname{sen}\theta$, obtemos

$$y'\rho g \operatorname{sen}\theta\, y_c A = \int_A y\rho g h\,dA = \int_A y^2 \rho g \operatorname{sen}\theta\,dA =$$

$$= \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A y^2\,dA$$

Reconhecendo que $\int_A y^2 dA = I_{xx}$ é o segundo momento ou momento de inércia da área em relação ao eixo x, concluímos que

$$y' = \frac{I_{xx}}{A y_c}$$

Do teorema dos eixos paralelos, $I_{xx} = I_{\hat{x}\hat{x}} + Ay_c^2$, onde $I_{\hat{x}\hat{x}}$ é o momento de inércia da área em relação ao eixo $\hat{x}$ que passa pelo centróide. Então,

$$y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{Ay_c} \qquad (3.15a)$$

A Eq. 3.15a indica que o ponto de aplicação da força resultante (o centro de pressão) está sempre abaixo do centróide da área.

Tomando os momentos em torno do eixo y, obtemos $x'F_R = \int_A xp dA$. Substituindo F_R, p, e h como anteriormente, ficamos com

$$x'\rho g \operatorname{sen}\theta \; y_c A = \int_A x\rho g h \, dA = \int_A xy\rho g \operatorname{sen}\theta \, dA =$$

$$= \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A xy \, dA$$

Reconhecendo que $\int_A xydA = I_{xy}$ é o produto de inércia da área, obtemos

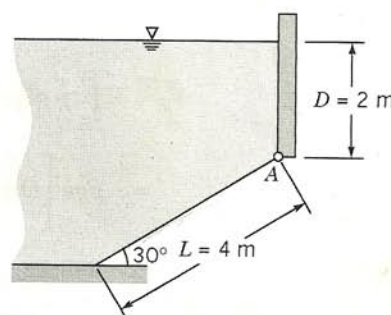
$$x' = \frac{I_{xy}}{Ay_c}$$

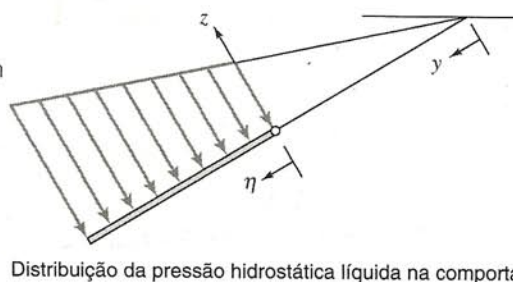
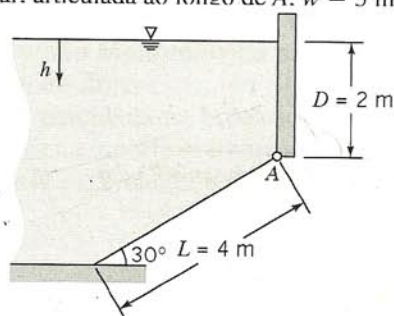
Do teorema dos eixos paralelos, $I_{xy} = I_{\hat{x}\hat{y}} + Ax_cy_c$, onde $I_{\hat{x}\hat{y}}$ é o produto de inércia da área em relação ao par de eixos $\hat{x}\hat{y}$ que passam pelo seu centróide. Então,

$$x' = x_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{y}}}{Ay_c} \qquad (3.15b)$$

As equações de cálculo deduzidas para x' e y' só podem ser aplicadas diretamente quando a pressão na superfície livre é atmosférica. (Veja Exemplos 3.5 e 3.6.)

EXEMPLO 3.5 — Força Resultante sobre uma Superfície Inclinada Submersa

A superfície inclinada mostrada, articulada ao longo de A, tem 5 m de largura. Determine a força resultante, $\vec{F}_R$, da água e do ar sobre a superfície inclinada.

PROBLEMA-EXEMPLO 3.5

DADO: Comporta retangular, articulada ao longo de A, $w = 5$ m.

Distribuição da pressão hidrostática líquida na comporta

DETERMINAR: A força resultante, $\vec{F}_R$, da água e do ar sobre a comporta.

SOLUÇÃO:

Para determinar $\vec{F}_R$ completamente, devemos especificar (a) a magnitude, (b) o sentido e (c) a linha de ação da força resultante.

Ilustraremos duas técnicas de solução considerando (i) integração direta e (ii) uso das equações de cálculo da Seção 3.5.2.

Integração Direta

Equações básicas:

$$\vec{F}_R = -\int p \, d\vec{A} \qquad \frac{dp}{dh} = \rho g$$

Visto que a pressão atmosférica atua na face inferior da comporta, p é a pressão líquida, ou manométrica, devida às ações combinadas de ambos os fluidos.

Considere a comporta, articulada ao longo da borda A, contida no plano xy, com coordenadas conforme mostrado.

$$\vec{F}_R = -\int_A p\,d\vec{A} = -\int_A pw\,d\eta\,\hat{k} \qquad (d\vec{A} = w\,d\eta\,\hat{k})$$

Necessitamos de p como função de η para realizar a integração. Da relação básica pressão-altura,

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

assim

$$dp = \rho g\,dh$$

e

$$\int_{p_a}^{p} dp = \int_0^h \rho g\,dh$$

Supondo ρ = constante,

$$p = p_a + \rho g h \qquad \{\text{Isto fornece } p = p(h). \text{ Necessitamos de } p = p(\eta).\}$$

Do diagrama

$$h = D + \eta \operatorname{sen} 30°, \qquad \text{onde } D = 2 \text{ m}$$

Como p é pressão manométrica, $p_a = 0$, e obtemos

$$p = \rho g(D + \eta \operatorname{sen} 30°)$$

Então

$$\vec{F}_R = -\int_A p\,d\vec{A} = -\int_0^L \rho g(D + \eta \operatorname{sen} 30°)w\,d\eta\,\hat{k}$$

$$= -\rho g w\left[D\eta + \frac{\eta^2}{2}\operatorname{sen} 30°\right]_0^L \hat{k} = -\rho g w\left[DL + \frac{L^2}{2}\operatorname{sen} 30°\right]\hat{k}$$

$$= \frac{-999\text{ kg}}{\text{m}^3} \times \frac{9{,}81\text{ m}}{\text{s}^2} \times 5\text{ m}\left[2\text{ m} \times 4\text{ m} + \frac{16\text{ m}^2}{2} \times \frac{1}{2}\right]\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}\hat{k}$$

$$\vec{F}_R = -588\hat{k}\text{ kN} \qquad \{\text{A força age no sentido de } z \text{ negativo.}\} \qquad \vec{F}_R$$

Para encontrar a linha de ação da força resultante, $\vec{F}_R$, reconhecemos que esta linha deve ser tal que o momento da força resultante em relação a qualquer eixo é igual ao momento da força distribuída em relação ao mesmo eixo. Considerando momentos em relação ao eixo x através da borda articulada A, obtemos

$$F_R \eta' = \int_A \eta p\,dA$$

Então

$$\eta' = \frac{1}{F_R}\int_A \eta p\,dA = \frac{1}{F_R}\int_0^L \eta p w\,d\eta = \frac{\rho g w}{F_R}\int_0^L \eta(D + \eta \operatorname{sen} 30°)\,d\eta$$

$$= \frac{\rho g w}{F_R}\left[\frac{D\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{3}\operatorname{sen} 30°\right]_0^L = \frac{\rho g w}{F_R}\left[\frac{DL^2}{2} + \frac{L^3}{3}\operatorname{sen} 30°\right]$$

$$= \frac{999\text{ kg}}{\text{m}^3} \times \frac{9{,}81\text{ m}}{\text{s}^2} \times \frac{5\text{ m}}{5{,}88 \times 10^5\text{ N}}\left[\frac{2\text{ m} \times 16\text{ m}^2}{2} + \frac{64\text{ m}^3}{3} \times \frac{1}{2}\right]\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$\eta' = 2{,}22\text{ m} \qquad \text{e} \qquad y' = \frac{D}{\operatorname{sen} 30°} + \eta' = \frac{2\text{ m}}{\operatorname{sen} 30°} + 2{,}22\text{ m} = 6{,}22\text{ m}$$

Também, da consideração de momentos em relação ao eixo y pelo ponto A,

$$x' = \frac{1}{F_R}\int_A xp\,dA$$

No cálculo do momento da força distribuída (lado direito), lembremos, das nossas lições anteriores de estática, que o centróide da área do elemento deve ser usado para "x". Como a área do elemento tem largura constante, então $x = w/2$ e

$$x' = \frac{1}{F_R}\int_A \frac{w}{2}p\,dA = \frac{w}{2F_R}\int_A p\,dA = \frac{w}{2} = 2{,}5\text{ m}$$

$$\vec{r}' = 2{,}5\hat{i} + 6{,}22\hat{j}\text{ m} \qquad \left\{\begin{matrix}\text{A linha de ação de } \vec{F}_R \text{ situa-se ao longo} \\ \text{do eixo } z \text{ negativo através de } \vec{r}'\end{matrix}\right\} \qquad \vec{r}'$$

Equações de Cálculo

Da Eq. 3.14, a força resultante sobre a comporta é dada por

$$F_R = p_c A = \rho g h_c A = \rho g \left(D + \frac{L}{2}\,\text{sen}30^\circ\right) L w$$

$$F_R = \rho g w \left[DL + \frac{L^2}{2}\,\text{sen}30^\circ\right]$$

Esta é a mesma expressão que foi obtida por integração direta.

Ao usar as equações de cálculo na determinação do centro de pressão, devemos usar coordenadas com origem em pontos onde $p_{\text{manométrica}} = 0$. A coordenada y do centro de pressão é dada pela Eq. 3.15a:

$$y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{A y_c} \tag{3.15a}$$

Para a comporta retangular inclinada

$$y_c = \frac{D}{\text{sen}30^\circ} + \frac{L}{2} = 2\frac{\text{m}}{\text{sen}30^\circ} + \frac{4\text{ m}}{2} = 6\text{ m}$$

$$A = Lw = 4\text{ m} \times 5\text{ m} = 20\text{ m}^2$$

$$I_{\hat{x}\hat{x}} = \tfrac{1}{12} W L^3 = \tfrac{1}{12} \times 5\text{ m} \times (4\text{ m})^3 = 26{,}7\text{ m}^2$$

$$y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{A y_c} = 6\text{ m} + 26{,}7\text{ m}^4 \times \frac{1}{20\text{ m}^2} \times \frac{1}{6\text{ m}^2} = 6{,}22\text{ m}$$

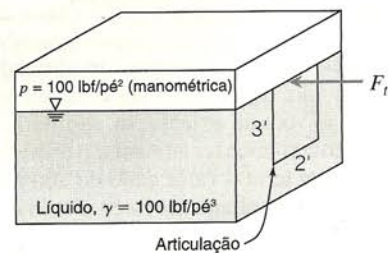
A coordenada x do centro de pressão é dada pela Eq. 3.15b:

$$x' = x_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{y}}}{A y_c} \tag{3.15b}$$

Para a comporta retangular $I_{\hat{x}\hat{y}} = 0$ e $x' = x_c = 2{,}5$ m.

Este problema ilustra dois procedimentos diferentes que podem ser usados na determinação da força resultante, $\vec{F}_R$, equivalente à força distribuída em uma superfície plana submersa. Como esperado, os dois procedimentos deram resultados idênticos.

EXEMPLO 3.6 — Força sobre uma Superfície Vertical Plana, Submersa, com Pressão Manométrica na Superfície Livre Diferente de Zero

A porta lateral do tanque é articulada na borda inferior. Uma pressão de 100 psfg é aplicada na superfície livre do líquido. Determine a força, F_t, necessária para manter a porta fechada.

PROBLEMA-EXEMPLO 3.6

DADO: Porta conforme mostrado na figura; eixo x ao longo da articulação.

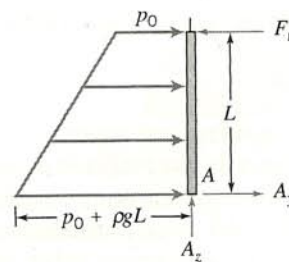
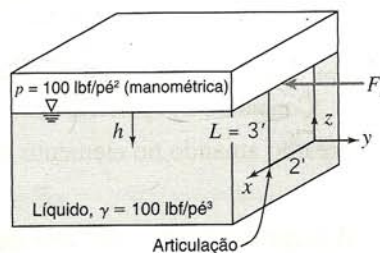



Diagrama de corpo livre da porta

DETERMINAR: A força necessária para manter a porta fechada.

SOLUÇÃO:
No diagrama de corpo livre da porta, A_y e A_z são as componentes da força da articulação sobre a porta. Tendo em vista que a pressão atmosférica atua no lado externo da porta, a distribuição de pressão mostrada é a pressão manométrica.

Podemos resolver diretamente para F_t somando os momentos em relação ao eixo da articulação.

Equações básicas:
$$F_R = \int p\,dA \qquad \frac{dp}{dh} = \rho g \qquad \sum \vec{M} = 0$$

Somando os momentos em relação ao eixo da articulação, temos

$$\sum M_x = 0 = LF_t - \int z\,dF = 0$$

$$\therefore\ F_t = \frac{1}{L}\int z\,dF = \frac{1}{L}\int zp\,dA = \frac{1}{L}\int_0^L zpb\,dz$$

De modo a explicitar F_t, precisamos de p como função de z:

$$\frac{dp}{dh} = \rho g = \gamma \quad \text{e} \quad dp = \gamma\,dh$$

Então

$$p - p_0 = \int_{p_0}^{p} dp = \int_0^h \gamma dh \quad \text{e} \quad p = p_0 + \gamma h$$

Uma vez que a pressão atmosférica atua do lado de fora da porta, a pressão p_0 na expressão acima deve ser a pressão manométrica. Com $p = p_0 + \gamma h$ e $h = L - z$,

$$F_t = \frac{1}{L}\int_0^L z[p_0 + \gamma(L-z)]b\,dz = \frac{b}{L}\int_0^L p_0 z\,dz + \frac{\gamma b}{L}\int_0^L (Lz - z^2)\,dz$$

$$= \left.\frac{p_0 b z^2}{2L}\right]_0^L + \frac{\gamma b}{L}\left[\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^L$$

$$= \frac{p_0 bL}{2} + \gamma bL^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{p_0 bL}{2} + \frac{\gamma bL^2}{6}$$

$$= \frac{100\ \text{lbf}}{\text{pé}^2} \times 2\,\text{pé} \times 3\,\text{pé} \times \frac{1}{2} + \frac{100\ \text{lbf}}{\text{pé}^3} \times 2\,\text{pé} \times 9\,\text{pé}^2 \times \frac{1}{6}$$

$$F_t = 600\ \text{lbf} \qquad F_t$$

Poderíamos ter resolvido este problema considerando a força distribuída como a soma da força F_1 devida à pressão manométrica uniforme, e a força F_2 devida ao líquido. Procedendo dessa forma, teríamos que resolver para cada uma destas duas forças e suas linhas de ação. Somando os momentos em relação ao eixo da articulação, resultaria o valor requerido de F_t. (Veja o Problema 3.47.)

Alternativamente, poderíamos ter aumentado artificialmente a coluna de água de forma que, com a nova superfície livre à pressão atmosférica, a pressão no topo da porta teria o valor dado de 100 lb/pé². Com esta configuração equivalente, as equações de cálculo poderiam ser aplicadas diretamente para se obter a resultante da força distribuída e a sua linha de ação. Somando os momentos em relação ao eixo da articulação, resultaria o valor requerido de F_t. (Veja o Problema 3.48.)

Este problema ilustra:
(i) A inclusão de pressão manométrica diferente de zero na superfície livre do líquido.
(ii) O emprego direto do momento distribuído sem avaliar separadamente a força resultante e sua linha de ação.

3.5.3 Força Hidrostática sobre uma Superfície Curva Submersa

A determinação da força hidrostática sobre uma superfície curva submersa é um pouco mais trabalhosa do que o cálculo da força numa superfície plana. A força hidrostática num elemento infinitesimal de uma superfície curva, $d\vec{A}$, atua normalmente à superfície. Contudo, a força de pressão diferencial sobre cada elemento da superfície atua numa direção diferente por causa da curvatura da superfície. Levar em conta esta mudança na direção torna o problema um pouco mais complicado.

Geralmente, o que fazemos quando desejamos somar uma série de vetores força atuando em diferentes direções? O procedimento usual é somar as componentes dos vetores em relação a um sistema de coordenadas conveniente.

Considere a superfície curva mostrada na Fig. 3.7. A força de pressão atuando no elemento de área, $d\vec{A}$, é dada por

$$d\vec{F} = -p\,d\vec{A} \tag{3.9}$$

A força resultante é novamente dada por

$$\vec{F}_R = -\int_A p\,d\vec{A} \tag{3.10}$$

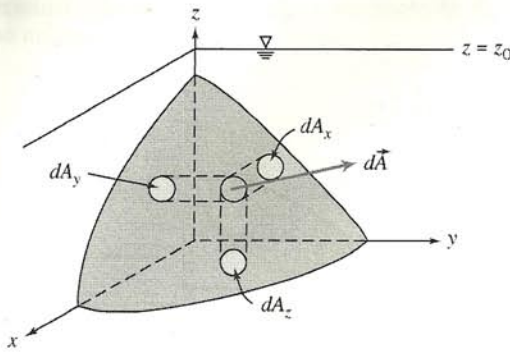



Fig. 3.7 Superfície submersa curva.

Podemos escrever

$$\vec{F}_R = \hat{i}F_{R_x} + \hat{j}F_{R_y} + \hat{k}F_{R_z} \tag{3.16}$$

onde F_{R_x}, F_{R_y} e F_{R_z} são as componentes de $\vec{F}_R$ nos sentidos positivos de x, y e z, respectivamente.

Para avaliar a componente da força numa dada direção, tomamos o produto escalar da força com o vetor unitário na direção considerada. Por exemplo, tomando o produto escalar em cada lado da Eq. 3.10 com vetor unitário $\hat{i}$, obtém-se

$$F_{R_x} = \vec{F}_R \cdot \hat{i} = \int d\vec{F} \cdot \hat{i} = -\int_A p\, d\vec{A} \cdot \hat{i} = -\int_{A_x} p\, dA_x$$

onde dA_x é a projeção de $d\vec{A}$ num plano perpendicular ao eixo x (veja a Fig. 3.7), e o sinal de menos indica que a componente x da força resultante é no sentido negativo do eixo x.

Como, em qualquer problema, o sentido da componente da força pode ser determinado por inspeção, o emprego de vetores não é necessário. Em geral, a magnitude da componente da resultante na direção l é dada por

$$F_{R_l} = \int_{A_l} p\, dA_l \tag{3.17}$$

onde dA_l é a projeção do elemento de área dA num plano perpendicular à direção l. A linha de ação de cada componente da força resultante é determinada observando que o momento daquela componente em relação a um dado eixo deve ser igual ao momento da componente da força distribuída correspondente em relação ao mesmo eixo.

Assim, cada uma das componentes horizontais da força sobre uma superfície curva é igual à força na área plana formada pela projeção da superfície curva sobre um plano vertical perpendicular à componente.

Com a superfície livre à pressão atmosférica, a componente vertical da força hidrostática resultante sobre uma superfície curva submersa é igual ao peso total do líquido diretamente acima da superfície. Isto pode ser visto pela aplicação da Eq. 3.17 para determinar a magnitude da componente vertical da força resultante, obtendo

$$F_{R_z} = F_V = \int p\, dA_z$$

Como $p = \rho g h$,

$$F_V = \int \rho g h\, dA_z = \int \rho g\, d\forall$$

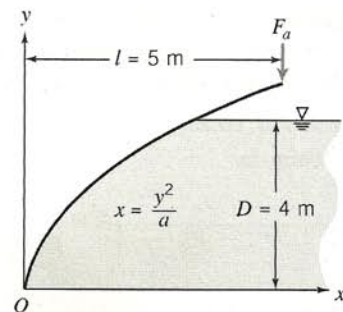
onde $\rho g h dA_z = \rho g\, d\forall$ é o peso de um cilindro de líquido diferencial acima do elemento de área da superfície, dA_z, estendendo a distância h da superfície curva até a superfície livre. A componente vertical da força resultante é obtida pela integração sobre a superfície total submersa. Portanto,

$$F_V = \int_{A_z} \rho g h\, dA_z = \int_{\forall} \rho g\, d\forall = \rho g \forall$$

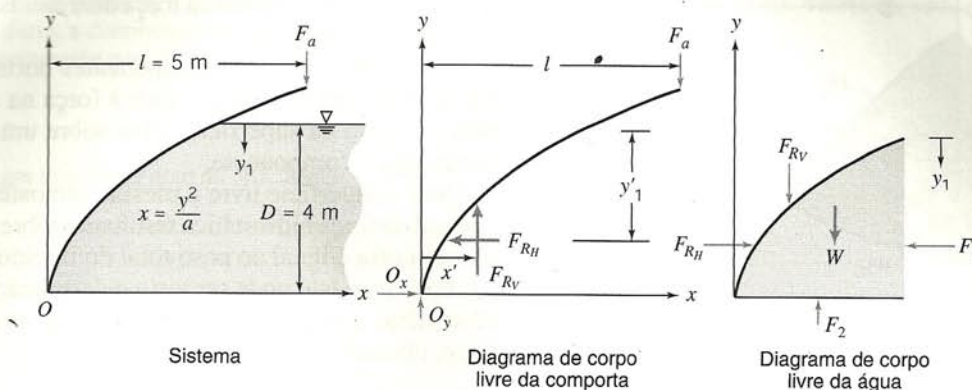
Pode ser mostrado que a linha de ação da componente da força vertical passa pelo centro de gravidade do volume de líquido entre a superfície submersa e a superfície livre do líquido (veja o Problema-Exemplo 3.7).

Mostramos que a força hidrostática resultante sobre uma superfície curva submersa é especificada em termos de suas componentes. A resultante de qualquer sistema de forças pode ser representada por um sistema força-conjugado, isto é, a força resultante aplicada em um ponto e um conjugado ou momento em relação ao ponto. Se os vetores força e conjugado forem ortogonais (como é o caso para uma superfície curva bidimensional), a resultante pode ser representada por uma força pura com uma linha de ação única. De outra forma, a resultante pode ser representada por um "torque", também com uma linha de ação única.

EXEMPLO 3.7 — Componentes da Força sobre uma Superfície Curva Submersa

A comporta mostrada é articulada em O e tem largura constante $w = 5$ m. A equação da superfície é $x = y^2/a$, onde $a = 4$ m. A profundidade da água à direita da comporta é $D = 4$ m. Determine a magnitude da força, F_a, aplicada como mostrado, requerida para manter a comporta em equilíbrio se o peso da comporta for desprezado.

PROBLEMA-EXEMPLO 3.7

DADO: Comporta de largura constante, $w = 5$ m.
A equação da superfície no plano xy é $x = y^2/a$, onde $a = 4$ m.
A água tem profundidade $D = 4$ m à direita da comporta.
A força F_a é aplicada como mostrado, e o peso da comporta deve ser desconsiderado.

DETERMINAR: A força F_a requerida para manter a comporta em equilíbrio.

SOLUÇÃO:

Equações básicas:
$$\vec{F}_R = -\int p\, d\vec{A} \qquad \frac{dp}{dh} = \rho g$$

Do diagrama de corpo livre da comporta, verificamos que F_a pode ser obtida pela soma de momentos em O após a determinação das componentes F_{R_H} e F_{R_V} da força da água na comporta e de suas linhas de ação.

Do diagrama de corpo livre do fluido, dado que $\Sigma F_x = 0$, a força horizontal F_{R_H} é igual à força F_1. A força F_1 é igual à força na área plana formada pela projeção da superfície curva sobre um plano vertical perpendicular ao eixo x. Da Eq. 3.14

$$F_{R_H} = p_c A = \rho g y_{1c} w D = \rho g(0{,}5D)wD = 0{,}5\rho g w D^2$$

$$F_{R_H} = 0{,}5 \times 999\ \frac{\text{kg}^3}{\text{m}} \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5\ \text{m} \times (4\ \text{m})^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} = 392\ \text{kN}$$

A linha de ação de F_{R_H} é dada por:

$$y'_1 = y_{1c} + \frac{I_{xx}}{y_{1c}A} \tag{3.15a}$$

onde $y_{1c} = D/2$, $A = wD$ e $I_{xx} = \frac{1}{12}wD^3$. Então,

$$y'_1 = \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{6}D = \tfrac{2}{3}D = \tfrac{2}{3} \times 4\ \text{m} = 2{,}67\ \text{m}$$

A componente vertical da força resultante é dada por

$$F_{R_V} = \int_0^{D^2/a} pw\,dx$$

A fim de integrar, necessitamos de uma expressão para $p(x)$ ao longo da superfície da comporta.

$$\frac{dp}{dh} = \rho g, \quad \text{logo} \quad dp = \rho g\,dh \quad \text{e} \quad \int_{p_a}^{p} dp = \int_0^h \rho g\,dh$$

Se considerarmos ρ = constante, temos que

$$p = p_a + \rho g y_1$$

Uma vez que a pressão atmosférica atua tanto no topo da comporta quanto na superfície livre do líquido, não há contribuição líquida da força da pressão atmosférica. Por isso, ao determinar a força devida aos fluidos, tomamos $p = \rho g y_1$ (como foi feito no cálculo de F_{R_H}).

Necessitamos agora de uma expressão para $y_1 = y_1(x)$ ao longo da superfície da comporta. Ali, $y_1 = D - y$. Uma vez que a equação da superfície da comporta é $x = y^2/a$, então, ao longo dela, $y = \sqrt{a}x^{1/2}$, e assim, y_1 pode também ser escrito como $y_1 = D - \sqrt{a}x^{1/2}$. Substituindo y_1 na expressão para F_{R_V}, obtém-se

$$F_{R_V} = \int_0^{D^2/a} pw\,dx = \int_0^{D^2/a} \rho g y_1 w\,dx = \rho g w \int_0^{D^2/a} y_1\,dx$$

$$= \rho g w \int_0^{D^2/a} (D - \sqrt{a}x^{1/2})\,dx$$

$$= \rho g w \left[Dx - \frac{2}{3}\sqrt{a}x^{3/2}\right]_0^{D^2/a} = \rho g w \left[\frac{D^3}{a} - \frac{2}{3}\sqrt{a}\frac{D^3}{a^{3/2}}\right] = \frac{\rho g w D^3}{3a}$$

$$F_{R_V} = 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5\ \text{m} \times \frac{(4)^3\ \text{m}^3}{3} \times \frac{1}{4\,\text{m}} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} = 261\ \text{kN}$$

Para determinar a linha de ação de F_{R_V}, o momento de F_{R_V} em relação ao eixo z através de O deve ser feito igual à soma dos momentos de dF_V em relação ao mesmo eixo.

$$x' F_{R_V} = \int_{A_y} xp\,dA_y \qquad \text{e} \qquad x' = \frac{1}{F_{R_V}} \int_{A_y} xp\,dA_y$$

$$x' = \frac{1}{F_{R_V}} \int_0^{D^2/a} xpw\,dx = \frac{1}{F_{R_V}} \int_0^{D^2/a} x\rho g y_1 w\,dx = \frac{\rho g w}{F_{R_V}} \int_0^{D^2/a} x(D - \sqrt{a}x^{1/2})\,dx$$

$$= \frac{\rho g w}{F_{R_V}} \left[\frac{D}{2}x^2 - \frac{2}{5}\sqrt{a}x^{5/2}\right]_0^{D^2/a} = \frac{\rho g w}{F_{R_V}} \left[\frac{D^5}{2a^2} - \frac{2}{5}\sqrt{a}\frac{D^5}{a^{5/2}}\right] = \frac{\rho g w D^5}{10 F_{R_V} a^2}$$

$$= \frac{\rho g w D^5}{10a^2} \left[\frac{3a}{\rho g w D^3}\right]$$

$$x' = \frac{3D^2}{10a} = \frac{3}{10} \times (4)^2\,\text{m}^2 \times \frac{1}{4\,\text{m}} = 1{,}2\,\text{m}$$

Somando momentos em relação a O, resulta

$$\sum M_O = x' F_{R_V} + (D - y_1') F_{R_H} - l F_a = 0$$

$$F_a = \frac{1}{l}[x' F_{R_V} + (D - y_1') F_{R_H}] = \frac{1}{5\,\text{m}}[1{,}2\,\text{m} \times 261\,\text{kN} + (4 - 2{,}67\,\text{m}) \times 392\,\text{kN}]$$

$$F_a = 167\,\text{kN}$$

F_a

Note, do diagrama de corpo livre do líquido, que $\Sigma F_y = 0$ resulta em $F_{R_V} = F_2 - W$. Então F_{R_V} é igual ao peso imaginário do líquido ocupando o volume entre a superfície curva e a superfície livre da água. O valor de x' encontrado anteriormente é a coordenada x do centróide desse volume.

Este problema ilustra os cálculos das componentes de força resultantes (e suas linhas de ação) em uma superfície submersa curva.

*3.6 EMPUXO E ESTABILIDADE

Se um objeto estiver imerso, ou flutuando, num líquido, a força vertical atuando sobre ele em decorrência da pressão do líquido é denominada *empuxo*. Considere um objeto totalmente imerso num líquido em repouso, conforme mostrado na Fig. 3.8.

A força vertical sobre o corpo, devida à pressão hidrostática, pode ser encontrada mais facilmente considerando-se elementos de volume cilíndricos similares ao mostrado na Fig. 3.8. Para um fluido em repouso,

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

Integrando para ρ constante, temos que

$$p = p_0 + \rho g h$$

A força líquida vertical sobre o elemento é

$$dF_z = (p_0 + \rho g h_2)\,dA - (p_0 + \rho g h_1)\,dA = \rho g (h_2 - h_1)\,dA$$

Porém, $(h_2 - h_1)dA = d\forall$, o volume do elemento. Então,

$$F_z = \int dF_z = \int_{\forall} \rho g\,d\forall = \rho g \forall \qquad (3.18)$$

onde $\forall$ é o volume do objeto. Então, a força líquida vertical devida à pressão, ou empuxo, sobre o objeto, iguala a força da gravidade atuante sobre o líquido deslocado pelo objeto. Consta que esta relação foi usada por Arquimedes no ano 220 a.C. para determinar o teor de ouro na coroa do Rei Hiero II. Por isso, é em geral chamada de "princípio de Arquimedes". Em aplicações técnicas correntes, a Eq. 3.18 é empregada no projeto de embarcações, equipamentos flutuantes e batiscafos [2].

O objeto submerso não necessita ser sólido. Bolhas de hidrogênio, usadas na visualização de linhas de tempo e de emissão (veja Seção 2.2.2), estão sujeitas a um empuxo positivo; elas sobem lentamente enquanto são arrastadas pelo escoamento. De forma inversa, gotas de água em óleo estão sujeitas a um empuxo negativo e são empurradas para baixo.

Dirigíveis e balões são conhecidos como máquinas "mais leves que o ar". A massa específica de um gás ideal é proporcional ao peso molecular, de forma que o hidrogênio e o hélio são menos densos que o ar à mesma temperatura e pressão. O hidrogênio ($M_m = 2$) é menos denso que o hélio ($M_m = 4$), mas extremamente inflamável, enquanto o hélio é inerte. O hidrogênio não

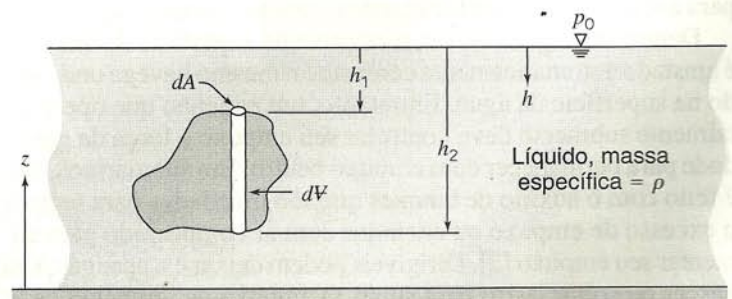



Fig. 3.8 Corpo imerso em um líquido em repouso.

*Esta seção pode ser omitida sem perda de continuidade do texto.

tem sido usado comercialmente desde a desastrosa explosão do dirigível alemão *Hindenburg* em 1937.

Deve ser enfatizado que a Eq. 3.18 prevê a força líquida vertical sobre um corpo que está totalmente submerso num único fluido. Nos casos de imersão parcial, um corpo flutuante desloca um volume de líquido cujo peso é igual ao peso do corpo.

A linha de ação da força de empuxo pode ser determinada usando-se os métodos da Seção 3.5.2. Como os corpos flutuantes estão em equilíbrio sob a ação de forças de campo e de empuxo, a localização da linha de ação da força de empuxo determina a estabilidade, conforme mostrado na Fig. 3.9.

A força de campo decorrente da gravidade atua no centro de gravidade, CG, do objeto. Na Fig. 3.9*a*, as linhas de ação das forças de empuxo e de campo estão deslocadas de modo a produzir um conjugado que tende a endireitar a embarcação. Na Fig. 3.9*b*, o conjugado tende a emborcar a embarcação.

O uso de lastro pode ser necessário para se obter a estabilidade de rolamento em embarcações. Embarcações de guerra feitas de madeira carregavam lastro de pedras nos porões para compensar o grande peso dos canhões na região superior onde se situavam as armas. Os navios modernos podem, da mesma forma, ter problemas de estabilidade: balsas sobrecarregadas naufragam quando os passageiros se acumulam todos em um dos lados do convés, deslocando lateralmente o centro de gravidade. Nos grandes empilhamentos em navios de carga, cuidado especial deve ser tomado para evitar o deslocamento do centro de gravidade em um nível que possa resultar na condição de instabilidade descrita na Fig. 3.9*b*.

Para um vaso com o fundo relativamente plano, conforme mostrado na Fig. 3.9*a*, o momento restaurador (conjugado) aumenta conforme o ângulo de rolamento torna-se maior. Para alguns ângulos, geralmente para aqueles onde a borda do vaso fica abaixo do nível da água, o momento restaurador passa por um pico e começa a decrescer. O momento pode tornar-se nulo para um ângulo de rolamento muito grande, conhecido como ângulo de perda de estabilidade. O vaso pode capotar caso o rolamento exceda este ângulo; em seguida, caso ainda intacto, o vaso pode achar um novo estado de equilíbrio com a parte superior para baixo.

A forma real da curva do conjugado depende da forma do casco. Uma viga larga permite uma grande mudança na linha de ação da força de empuxo e portanto um grande conjugado. Bordos livres altos acima da linha da água aumentam o ângulo de perda de estabilidade, porém podem fazer o momento restaurador cair rapidamente acima deste ângulo.

Embarcações a vela são submetidas a grandes forças laterais quando o vento bate na vela (um barco a vela sob um vento forte opera com considerável ângulo de rolamento). A força de vento lateral deve ser contrabalançada por um casco chato bem pesado. Para barcos a vela muito pequenos, a tripulação deve ter pouco peso para evitar, em seus deslocamentos, capotar a embarcação [3].

Dentro de largos limites, o empuxo da superfície de um vaso é ajustado automaticamente conforme o mesmo navega ondulando na superfície da água. Entretanto, um engenho que opere totalmente submerso deve controlar seu empuxo e força de gravidade para permanecer com empuxo neutro. Em submarinos, isto é feito com o auxílio de tanques que são inundados para reduzir o excesso de empuxo ou enchidos com ar comprimido para aumentar seu empuxo [2]. Dirigíveis podem deixar escapar gás para descer ou soltar lastro para subir. O empuxo de um balão de ar quente é controlado pela variação da temperatura do ar no interior do balão.

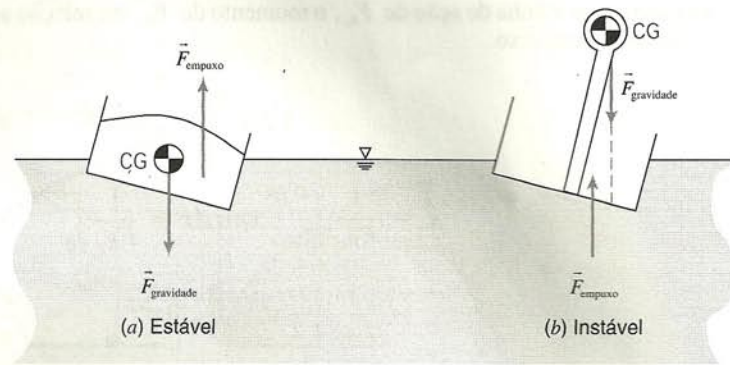



Fig. 3.9 Estabilidade de corpos flutuantes.

Para mergulho em grandes profundidades no oceano, o uso de ar comprimido torna-se impraticável por causa das grandes pressões (o Oceano Pacífico tem mais de 10 km de profundidade; a pressão da água do mar nestas profundezas é superior a 1000 atmosferas!). Um líquido como a gasolina, que possui empuxo na água do mar, pode ser usado para aumentar o empuxo. Entretanto, como a gasolina é mais compressível do que a água, seu empuxo diminui com a profundidade. É, portanto, necessário carregar e soltar lastro para obter empuxo positivo a fim de retornar à superfície. A forma de casco estruturalmente mais eficiente para dirigíveis e submarinos tem uma seção transversal circular. A força de empuxo passa através do centro do círculo. Portanto, para estabilidade de rolamento, o CG deve ser localizado abaixo da linha de centro do casco. Por isso, o compartimento da tripulação deve ser localizado no casco de modo a deslocar o CG para baixo.

*3.7 FLUIDOS EM MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO

Um fluido em movimento de corpo rígido move-se sem deformação, como se fosse um corpo sólido. Como não há deformação, não pode haver tensão de cisalhamento. Conseqüentemente, a única tensão superficial sobre cada elemento fluido decorre da pressão.

Uma partícula fluida retém a sua identidade em movimento de corpo rígido porque o fluido não se deforma. Como no caso de um fluido em repouso, podemos aplicar a segunda lei de Newton do movimento na determinação do campo de pressão resultante de um movimento de corpo rígido especificado.

Na Seção 3.1 deduzimos uma expressão para a força total devida à pressão e à gravidade atuando sobre uma partícula fluida de volume $d\forall$. Obtivemos

$$d\vec{F} = (-\nabla p + \rho\vec{g})\,d\forall$$

ou

$$\frac{d\vec{F}}{d\forall} = -\nabla p + \rho\vec{g} \qquad (3.2)$$

A segunda lei de Newton foi escrita como

$$d\vec{F} = \vec{a}\,dm = \vec{a}\rho\,d\forall \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\vec{F}}{d\forall} = \rho\vec{a}$$

*Esta seção pode ser omitida sem perda de continuidade do texto.

Substituindo na Eq. 3.2, obtemos

$$-\nabla p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a} \tag{3.19}$$

O significado físico de cada termo desta equação é:

$$-\nabla p \quad + \quad \rho\vec{g} \quad =$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{força líquida de}\\ \text{pressão por}\\ \text{unidade de volume}\\ \text{em um ponto}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{força de campo}\\ \text{por unidade de}\\ \text{volume em}\\ \text{um ponto}\end{array}\right\} =$$

$$\rho\vec{a}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{massa por}\\ \text{unidade de}\\ \text{volume}\end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{l}\text{aceleração}\\ \text{da partícula}\\ \text{fluida}\end{array}\right\}$$

Esta equação vetorial consiste em três equações componentes que devem ser satisfeitas individualmente. Em coordenadas retangulares, as equações componentes são

$$\left.\begin{array}{ll}-\dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = \rho a_x & \text{direção } x\\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = \rho a_y & \text{direção } y\\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = \rho a_z & \text{direção } z\end{array}\right\} \tag{3.20}$$

As equações componentes para outros sistemas de coordenadas podem ser escritas usando-se a expressão apropriada para ∇p. Em coordenadas cilíndricas o operador vetorial, ∇, é dado por

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.21}$$

onde $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$ são vetores unitários nas direções r e θ, respectivamente. Assim,

$$\nabla p = \hat{e}_r \frac{\partial p}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{3.22}$$

EXEMPLO 3.8 — Líquido em Movimento de Corpo Rígido com Aceleração Linear

Como conseqüência de uma promoção, você vai ser transferido da sua localidade atual. Você tem que transportar, na sua caminhonete, um aquário medindo 12 pol. × 24 pol. × 12 pol. Quanto de água você pode deixar no aquário, de modo a ficar razoavelmente seguro de que não haverá transbordamento durante a viagem?

PROBLEMA-EXEMPLO 3.8

DADO: Um aquário de 12 pol. × 24 pol. × 12 pol., parcialmente cheio com água, a ser transportado num automóvel.

DETERMINAR: A profundidade permissível de água no aquário, para uma segurança razoável de que não transbordará na viagem.

SOLUÇÃO:

O primeiro passo da solução é formular o problema de modo mais específico.

Reconhecemos que haverá movimento da superfície da água em resultado da passagem do carro em buracos, curvas etc. Contudo, iremos supor que o efeito principal na superfície da água dever-se-á às acelerações (e desacelerações) lineares do carro; desprezaremos as sacudidelas da água.

Assim, reduzimos o problema à determinação do efeito de uma aceleração linear sobre a superfície livre. Ainda não decidimos quanto à orientação do tanque relativamente à direção do movimento. Escolhendo a coordenada x na direção do movimento, devemos alinhar o aquário com o lado maior paralelo, ou perpendicular, à direção do movimento?

Se não há movimento relativo na água, devemos supor que lidamos com aceleração constante, a_x. Qual a forma da superfície livre sob essas condições?

Para responder às perguntas originais, vamos redefinir o problema idealizando a situação física de modo a obter uma solução aproximada.

DADO: Um tanque parcialmente cheio d'água (profundidade d) submetido a uma aceleração linear constante, a_x. A altura do aquário é 12 pol.; o comprimento paralelo à direção do movimento é b. A largura perpendicular à direção do movimento é c.

DETERMINAR:
(a) A forma da superfície livre sob a_x constante.
(b) A profundidade permissível da água no tanque, d, para evitar transbordamento, como uma função de a_x e da orientação do aquário.
(c) A melhor orientação do aquário e a profundidade da água recomendada.

SOLUÇÃO:

Equação básica:

$$-\nabla p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$$

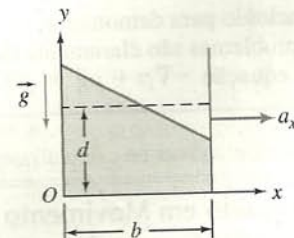
$$-\left(\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \rho(\hat{i}g_x + \hat{j}g_y + \hat{k}g_z) = \rho(\hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z)$$

Como p não é função de z, $\partial p/\partial z = 0$. Também, $g_x = 0$, $g_y = -g$, $g_z = 0$, e $a_y = a_z = 0$.

$$\therefore -\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} - \hat{j}\rho g = \hat{i}\rho a_x$$

As equações componentes são:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$$

{Lembre-se de que uma derivada parcial significa que todas as outras variáveis independentes são mantidas constantes na diferenciação.}

O problema agora consiste em determinar uma expressão para $p = p(x, y)$. Isso nos possibilitaria determinar a equação da superfície livre. Mas talvez não tenhamos que fazê-lo.

Uma vez que a pressão é $p = p(x, y)$, a diferença de pressão entre dois pontos (x, y) e $(x + dx, y + dy)$ é

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

Como a superfície livre é uma linha de pressão constante, p = constante ao longo da superfície livre, então $dp = 0$ e

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = -\rho a_x\, dx - \rho g\, dy$$

Por conseguinte,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{superfície livre}} = -\frac{a_x}{g}$$

{A superfície livre é um plano.}

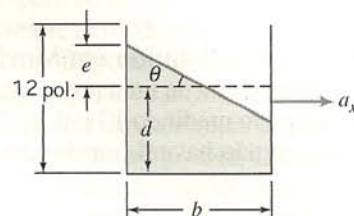
No diagrama,

d = profundidade original

e = altura acima da profundidade original

b = lado do aquário paralelo à direção do movimento.

$$e = \frac{b}{2}\tan\theta = \frac{b}{2}\left(-\frac{dy}{dx}\right)_{\text{superfície livre}} = \frac{b}{2}\frac{a_x}{g}$$

{Válida apenas quando a superfície livre intercepta a parede frontal no chão ou abaixo dele}

Uma vez que desejamos o menor valor possível de e para um dado a_x, o aquário deve ser alinhado de modo a se obter o menor valor de b possível. Alinharemos o tanque com o lado maior perpendicular à direção do movimento; ou seja, escolheremos $b = 12$ pol. $\longleftarrow$ b

Com $b = 12$ pol.,

$$e = 6\frac{a_x}{g} \text{ pol.}$$

O valor máximo permissível de $e = 12 - d$ pol. Então,

$$12 - d = 6\frac{a_x}{g} \quad \text{e} \quad d_{\text{máx}} = 12 - 6\frac{a_x}{g}$$

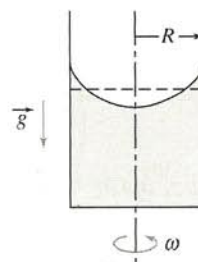
Se o valor máximo de a_x for tomado como $\frac{2}{3}g$, então o valor de d admissível será 8 pol.

A fim de garantir uma margem de segurança, talvez devamos escolher $d = 6$ pol. $\longleftarrow$ d

Lembre-se de que uma aceleração constante foi admitida neste problema. O carro deverá ser dirigido com *muito* cuidado.

{Este problema foi incluído para demonstrar:
(i) Nem todos os problemas são claramente definidos, nem têm resposta única.
(ii) A aplicação da equação $-\nabla p + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}$.}

EXEMPLO 3.9 — Líquido em Movimento de Corpo Rígido com Velocidade Angular Constante

Um vaso cilíndrico parcialmente cheio com líquido é girado a uma velocidade angular constante, ω, em torno do seu eixo, conforme mostrado no diagrama. Após um curto período de tempo, não há movimento relativo; o líquido gira com o cilindro como se o sistema fosse um corpo rígido. Determine a forma da superfície livre.

PROBLEMA-EXEMPLO 3.9

DADO: Um cilindro com líquido em rotação de corpo rígido com velocidade angular ω em torno do seu eixo.

DETERMINAR: A forma da superfície livre.

SOLUÇÃO:

Equação básica: $$-\nabla p + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}$$

É conveniente usar um sistema de coordenadas cilíndricas, r, θ, z. Como $g_r = g_\theta = 0$ e $g_z = -g$, segue-se que

$$-\left(\hat{e}_r \frac{\partial p}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \hat{k}\rho g = \rho(\hat{e}_r a_r + \hat{e}_\theta a_\theta + \hat{k}a_z)$$

Também, $a_z = a_\theta = 0$ e $a_r = -\omega^2 r$.

$$\therefore -(\hat{e}_r \frac{\partial p}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}) = -\hat{e}_r \rho\omega^2 r + \hat{k}\rho g$$

As equações componentes são:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \qquad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Das equações componentes concluímos que a pressão não é função de θ; é função de r e z, apenas.

Como $p = p(r, z)$, o diferencial, dp, na pressão, entre dois pontos com coordenadas (r, θ, z) e $(r + dr, \theta, z + dz)$ é dado por

$$dp = \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right)_z dr + \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right)_r dz$$

Então,

$$dp = \rho\omega^2 r\,dr - \rho g\,dz$$

Para obter a diferença de pressão entre um ponto de referência (r_1, z_1), onde a pressão é p_1, e o ponto arbitrário (r, z), onde a pressão é p, devemos integrar

$$\int_{p_1}^{p} dp = \int_{r_1}^{r} \rho\omega^2 r\,dr - \int_{z_1}^{z} \rho g\,dz$$

$$p - p_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - r_1^2) - \rho g(z - z_1)$$

Tomando o ponto de referência sobre o eixo do cilindro na superfície livre, temos

$$p_1 = p_{atm} \qquad r_1 = 0 \qquad z_1 = h_1$$

Então,

$$p - p_{atm} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g(z - h_1)$$

Uma vez que a superfície livre é uma superfície de pressão constante ($p = p_{atm}$), a sua equação é dada por

$$0 = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g(z - h_1)$$

ou

$$z = h_1 + \frac{(\omega r)^2}{2g}$$

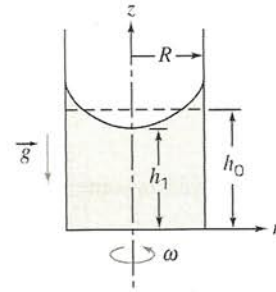
A equação da superfície livre é uma parabolóide de revolução com vértice sobre o eixo em $z = h_1$.

Podemos explicitar a altura h_1 nas condições de rotação em termos da altura original da superfície, h_0, na ausência de rotação. Para isso, utilizamos o fato de que o volume do líquido deve permanecer constante. Sem rotação,

$$\forall = \pi R^2 h_0$$

Com rotação,

$$\forall = \int_0^R \int_0^z 2\pi r\,dz\,dr = \int_0^R 2\pi z r\,dr = \int_0^R 2\pi\left(h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) r\,dr$$

$$\forall = 2\pi\left[h_1\frac{r^2}{2} + \frac{\omega^2 r^4}{8g}\right]_0^R = \pi\left[h_1 R^2 + \frac{\omega^2 R^4}{4g}\right]$$

Então,

$$\pi R^2 h_0 = \pi \left[h_1 R^2 + \frac{\omega^2 R^4}{4g} \right] \quad \text{e} \quad h_1 = h_0 - \frac{(\omega R)^2}{4g}$$

Finalmente,

$$z = h_0 - \frac{(\omega R)^2}{4g} + \frac{(\omega r)^2}{2g} = h_0 - \frac{(\omega R)^2}{2g}\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad z(r)$$

Note que a expressão para z é válida somente para $h_1 > 0$. Portanto o máximo valor de ω é dado por $\omega_{máx} = \sqrt{2gh_0}/R$.

Este problema ilustra a aplicação da segunda lei de Newton em coordenadas cilíndricas e o comportamento físico de um líquido com uma superfície livre submetida à rotação de corpo rígido. É interessante notar que o perfil da superfície livre é independente de qualquer propriedade do líquido!

3.8 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o estudo do Capítulo 3, você deverá ser capaz de:

1. Escrever a equação básica da estática dos fluidos na forma vetorial e indicar o significado físico de cada termo.
2. Escrever a relação básica pressão-altura para um fluido estático e integrá-la de modo a determinar a variação de pressão para qualquer variação dada na propriedade do fluido.
3. Enunciar a relação entre pressões manométrica e absoluta.
4. Definir as condições de temperatura e pressão da atmosfera padrão.
5. Determinar a diferença de pressão indicada por leituras de uma variedade de manômetros.
6. Para uma superfície plana submersa:
   (a) Determinar a força resultante decorrente da ação de fluidos sobre a superfície e a sua linha de ação.
   (b) Determinar a(s) força(s) externa(s) necessária(s) para manter a superfície em equilíbrio.
7. Para uma superfície curva submersa:
   (a) Determinar as componentes da força resultante decorrente da ação de fluidos sobre a superfície e suas linhas de ação.
   (b) Determinar a(s) força(s) externa(s) necessária(s) para manter a superfície em equilíbrio.

*8. Determinar a força de empuxo sobre um corpo submerso em um líquido ou flutuando em sua superfície; determinar a estabilidade de um objeto flutuante.

*9. Aplicar a equação básica da hidrostática para determinar o campo de pressão e/ou a forma da superfície livre de qualquer massa de fluido movendo-se como corpo rígido.

10. Resolver os problemas no final do capítulo que se relacionam com o material estudado.

REFERÊNCIAS

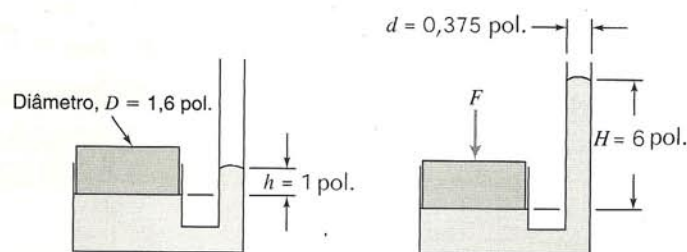
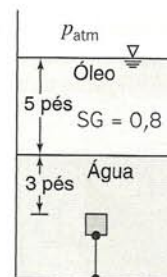
1. Folsom, R. G., "Manometer Errors due to Capillarity," *Instruments, 9,* 1, 1937, pp. 36–37.
2. Burcher, R., and L. Rydill, *Concepts in Submarine Design.* Cambridge, U. K.: Cambridge University Press, 1994.
3. Marchaj, C. A., *Aero-Hydrodynamics of Sailing,* rev. ed. Camden, ME: International Marine Publishing, 1988.

PROBLEMAS

3.1 Nitrogênio comprimido é transportado num tanque cilíndrico de diâmetro $D = 0{,}25$ m e comprimento $L = 1{,}3$ m. O gás no tanque está a uma pressão absoluta de 20 MPa e a uma temperatura de 20°C. Calcule a massa de gás no tanque. Se a tensão máxima admissível na parede do tanque for 210 MPa, determine a espessura mínima teórica da parede do cilindro.

3.2 Variações de pressão resultantes de mudança de altitude podem causar estalidos nos ouvidos e desconforto para passageiros de aviões e viajantes em montanhas. Cada pessoa é afetada diferentemente em termos da mudança de elevação necessária para causar um estalido. Determine a mudança de pressão, expressa em milímetros de água, que corresponde a uma mudança de elevação requerida para causar um estalido de ouvido em um dia padrão, para uma altitude de 2000 m.

3.3 A água ferve a temperaturas mais baixas com o aumento da altitude devido à queda de pressão. Conseqüentemente, misturas para bolos, ovos fervidos, entre outros alimentos, devem ser cozidos em diferentes períodos de tempo. Determine a temperatura de ebulição da água a 1000 e 2000 m de elevação em um dia padrão, e compare com o valor ao nível do mar.

3.4 O tubo mostrado está cheio com mercúrio a 20°C. Calcule a força aplicada no pistão.

P3.4

P3.5

*Estes objetivos aplicam-se às seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade do texto.

3.5 Um cubo de carvalho maciço com 1 pé de aresta é mantido submerso por um tirante, conforme mostrado. Calcule a força real da água sobre a superfície inferior do cubo e a tração no tirante.

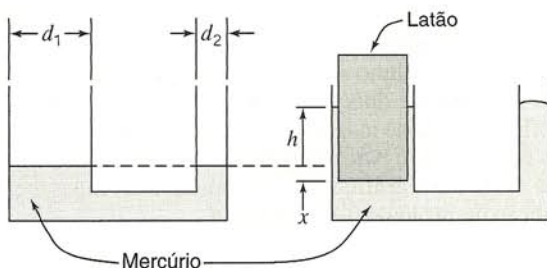
3.6 Um cubo com arestas de 4 pol. está submerso num líquido suspenso por uma corda, de modo que sua face horizontal superior está 6 pol. abaixo da superfície. A massa do cubo é $M = 0{,}569$ slug; a tração na corda é $T = 11{,}5$ lbf. Calcule a massa específica e a densidade relativa do líquido.

3.7 Uma bolha de 10 mm de diâmetro é liberada pelo sistema de ar de um mergulhador a 30 m abaixo da superfície do mar. (A temperatura da água é 30°C.) Estime o diâmetro da bolha no momento em que a mesma chega à superfície.

3.8 No abastecimento do motor de um cortador de grama, verifica-se a necessidade de *ventilar* o gás do tanque de combustível de modo a obter uma vazão adequada de gasolina para o seu interior. Discuta e comente o significado de *ventilar* e por que este procedimento é necessário.

3.9 Um vaso cilíndrico invertido é afundado vagarosamente numa piscina. O ar aprisionado no vaso é comprimido isotermicamente enquanto a pressão hidrostática aumenta. Desenvolva uma expressão para a altura da água, y, dentro do vaso, em termos da altura do vaso, H, e da profundidade de submersão, h. Trace um gráfico de y/h em função de h/H.

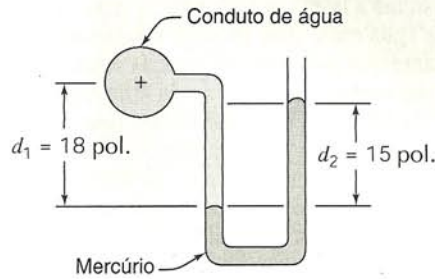
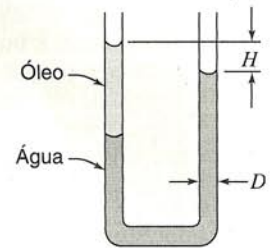
3.10 Veículos de pesquisa oceanográfica já desceram a 10 km abaixo do nível do mar. Nessas profundidades extremas, a compressibilidade da água do mar pode ser significativa. Pode-se modelar o comportamento da água do mar supondo que o seu módulo de compressibilidade permaneça constante. Usando esta hipótese, avalie os desvios em massa específica e pressão comparados com os valores calculados com a consideração de incompressibilidade da água do mar a uma profundidade, h, de 10 km. Expresse as suas respostas em valores percentuais. Plote os resultados na faixa de $0 \leq h \leq 10$ km.

3.11 Um reservatório com dois tubos cilíndricos verticais $d_1 = 39{,}5$ mm e $d_2 = 12{,}7$ mm é parcialmente preenchido com mercúrio. Um objeto cilíndrico feito de latão colocado no tubo maior flutua conforme mostrado. O objeto tem diâmetro $d = 37{,}5$ mm e altura $H = 76{,}2$ mm. Calcule a pressão na superfície inferior necessária para fazer flutuar o objeto. Determine o novo nível de equilíbrio, h, do mercúrio com a presença do cilindro de metal.

P3.11

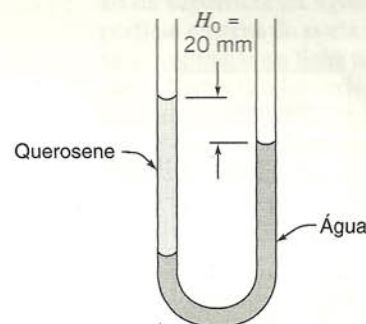
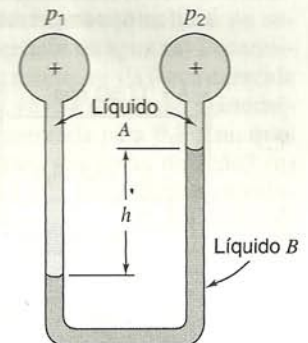
3.12 Supondo que o módulo de compressibilidade é constante para a água do mar, deduza uma expressão para a variação da massa específica com a profundidade, h, abaixo da superfície. Mostre que o resultado pode ser escrito como

$$\rho \approx \rho_0 + bh$$

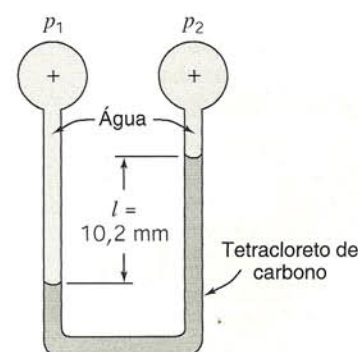
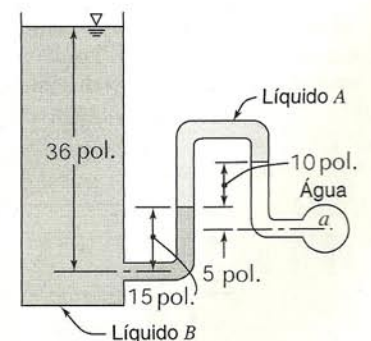
onde ρ_0 é a massa específica na superfície. Avalie a constante b. Em seguida, usando a aproximação, obtenha uma equação para a variação de pressão com a profundidade abaixo da superfície. Determine o erro percentual na pressão prevista pela solução aproximada a uma profundidade de 1000 m.

3.13 A pressão num conduto de água é medida pelo manômetro de dois fluidos mostrado. Avalie a pressão manométrica no conduto.

P3.13 **P3.14**

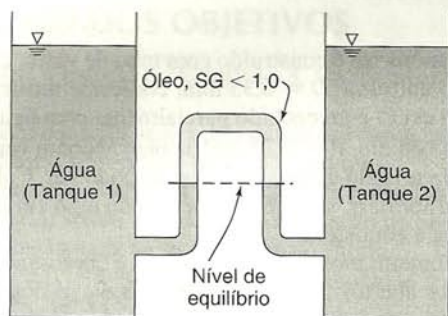
3.14 Um manômetro é construído com tubo de vidro, com diâmetro interno uniforme $D = 6{,}35$ mm, conforme mostrado a seguir. O tubo em U é preenchido parcialmente com água. Em seguida, um volume $\forall = 3{,}25$ cm^3 de óleo Meriam vermelho é adicionado no lado esquerdo, como se pode ver. Calcule a altura de equilíbrio, H, se ambas as pernas do tubo em U estão abertas para a atmosfera.

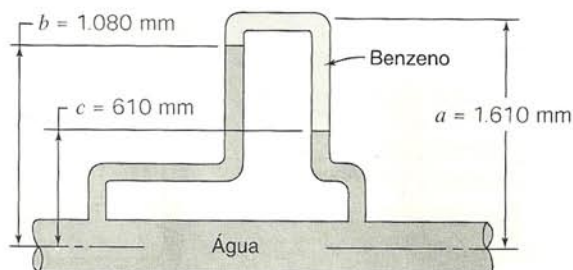
3.15 O manômetro mostrado contém água e querosene. Com ambos os tubos abertos para a atmosfera, as elevações da superfície livre diferem de $H_0 = 20{,}0$ mm. Determine a diferença de elevação quando uma pressão de 98,0 Pa (manométrica) for aplicada no tubo à direita.

P3.15 **P3.16**

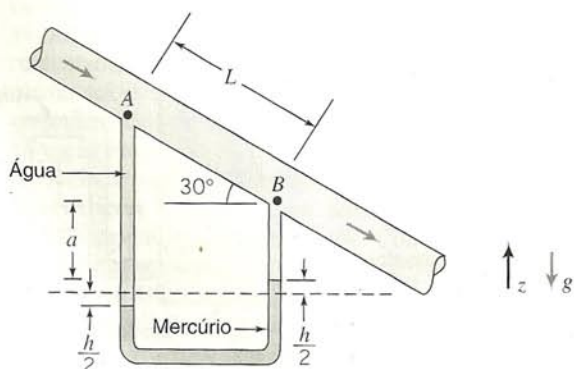
3.16 O manômetro mostrado contém dois líquidos. O líquido A tem densidade relativa SG = 0,88 e o líquido B tem SG = 2,95. Calcule a deflexão, h, quando a diferença de pressão aplicada for $p_1 - p_2 = 870$ Pa.

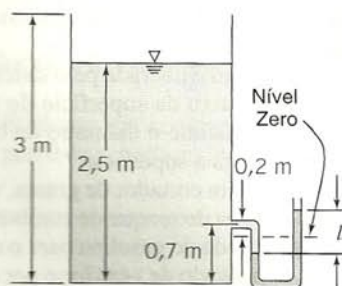
3.17 Considere o manômetro de dois fluidos mostrado. Calcule a diferença de pressão aplicada.

P3.17 **P3.18**

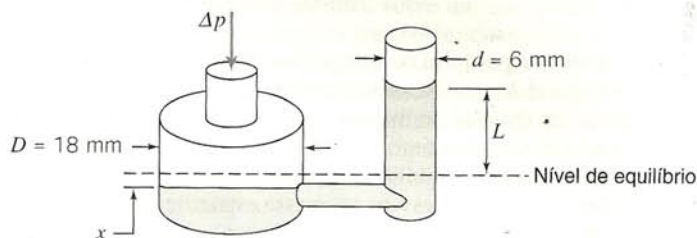
3.18 Determine a pressão manométrica em psig no ponto a, se o líquido A tem densidade relativa SG = 0,75 e o líquido B, SG = 1,20. O líquido em volta do ponto a é água e o tanque à esquerda está aberto para a atmosfera.

3.19 O departamento de engenharia da NIH Corporation está avaliando um sofisticado sistema a laser, de \$80.000,00, para medir a diferença do nível de água entre dois grandes tanques de armazenagem. É importante que pequenas diferenças sejam medidas com precisão. Você sugere que a tarefa seja feita com um arranjo de manômetro de \$200,00. Um óleo menos denso que a água pode ser usado para fornecer uma ampliação de 10:1 do movimento do menisco; uma pequena diferença de nível, entre os tanques, provocará uma deflexão 10 vezes maior nos níveis de óleo do manômetro. Determine a densidade relativa do óleo requerida para uma ampliação de 10:1.

P3.19

3.20 Considere um manômetro conectado como mostrado. Calcule a diferença de pressão.

P3.20

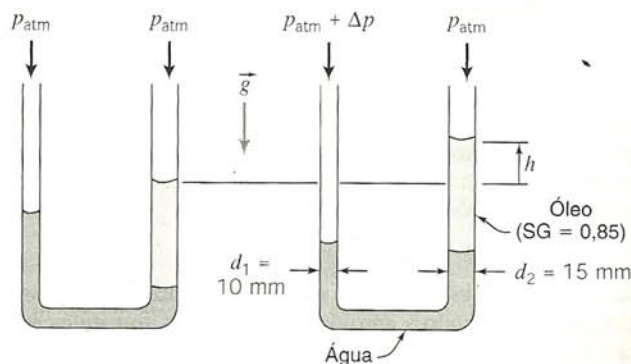
3.21 Água flui para baixo ao longo de um tubo com inclinação de 30° com relação à horizontal, conforme mostrado. A diferença de pressão $p_A - p_B$ é devida parcialmente à gravidade e parcialmente ao atrito. Obtenha uma expressão algébrica para a diferença de pressão. Calcule a diferença de pressão se $L = 5$ pés e $h = 6$ pol.

P3.21

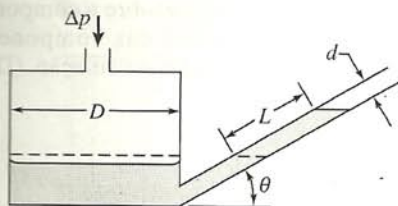
3.22 Um tanque retangular, aberto para a atmosfera, está cheio d'água até uma profundidade de 2,5 m, conforme mostrado. Um manômetro de tubo em U é conectado ao tanque num local 0,7 m acima do fundo do tanque. Se o nível zero do fluido, óleo Meriam azul, for 0,2 m abaixo da conexão, determine a deflexão l após a instalação do manômetro e remoção de todo o ar do tubo de conexão.

P3.22, 3.24, 3.30

3.23 Um reservatório manométrico tem tubos verticais com diâmetros $D = 18$ mm e $d = 6$ mm. O líquido manométrico é o óleo Meriam vermelho. Desenvolva uma expressão algébrica para a deflexão do líquido, L, no tubo pequeno quando uma pressão manométrica Δp for aplicada no reservatório. Calcule a deflexão do líquido quando a pressão aplicada for equivalente a 25 mm de coluna d'água (manométrica).

P3.23

3.24 O fluido do manômetro do Problema 3.22 é substituído por mercúrio (mesmo nível zero de referência). O tanque é vedado e a pressão do ar elevada a um valor manométrico de 0,5 atm. Determine a deflexão, l.

3.25 Um manômetro de reservatório é calibrado para uso com um líquido de densidade relativa 0,827. O diâmetro do reservatório é 5/8 pol. e o do tubo (vertical) é 3/16 pol. Calcule a distância necessária entre as marcas na escala vertical para a leitura de uma diferença de pressão de 1 pol. de água.

3.26 Um aluno deseja projetar um manômetro com sensibilidade melhor que um tubo em U cheio d'água, de diâmetro constante. A concepção do aluno envolve o emprego de tubos com diferentes diâmetros e dois líquidos, conforme mostrado. Avalie a deflexão, h, deste manômetro, se a diferença de pressão aplicada for $\Delta p = 250$ N/m². Determine a sensibilidade do manômetro. Trace um gráfico da sensibilidade do manômetro como função da razão de diâmetros d_2/d_1.

P3.26

3.27 O manômetro de tubo inclinado mostrado tem $D = 3$ pol. e $d = 0{,}25$ pol., e está cheio com óleo Meriam vermelho. Calcule o ângulo, θ, que fornecerá uma deflexão de 5 pol. ao longo do tubo inclinado para uma pressão aplicada de 1 pol. de água (manométrica). Determine a sensibilidade deste manômetro.

P3.27, 3.28

3.28 O manômetro de tubo inclinado mostrado tem $D = 96$ mm e $d = 8$ mm. Determine o ângulo, θ, necessário para dar um aumento de 5:1 na deflexão do líquido, L, comparado com a deflexão total de um manômetro comum, em U. Avalie a sensibilidade do manômetro de tubo inclinado.

3.29 Um barômetro contém acidentalmente 6,5 pol. de água no topo da coluna de mercúrio. Num dia em que a temperatura ambiente é de 70°F a altura da coluna de mercúrio é de 28,35 pol. (com correção para expansão térmica). Determine a pressão barométrica em psia. Se a temperatura ambiente subisse para 85°F sem mudança na pressão barométrica, a coluna de mercúrio seria maior, menor, ou se manteria no mesmo comprimento? Justifique sua resposta.

3.30 Se o tanque do Problema 3.22 for selado hermeticamente e a água for drenada lentamente pelo fundo, determine a deflexão, l, após o sistema ter atingido o equilíbrio.

3.31 A coluna de água está parada em 50 mm de altura em um tubo de vidro de 2,5 mm de diâmetro. Qual seria a altura da coluna se a tensão superficial fosse zero? Qual seria a altura da coluna em um tubo com 1,0 mm de diâmetro?

3.32 Considere a interface entre dois líquidos imiscíveis de massas específicas diferentes. Desenvolva uma expressão para a diferença de nível causada pela tensão superficial. Obtenha e trace uma curva da mudança de altura devida à ação capilar como função do diâmetro do tubo para água sobre mercúrio em um tubo vertical.

3.33 Compare a mudança de nível devida à ação capilar em um tubo circular com uma configuração plana entre placas paralelas. Obtenha e trace curvas da mudança de nível devida à ação capilar como função do diâmetro e do espaçamento entre placas para ar sobre água.

3.34 Num dia calmo, uma inversão moderada faz a temperatura atmosférica permanecer constante em 30ºC entre o nível do mar e 5 km de altitude. Nestas condições, (a) calcule a variação de altura para que ocorra uma redução de 1 por cento na pressão do ar e (b) calcule a variação de altura para que ocorra uma redução de 15 por cento na massa específica. (c) Plote p_2/p_1 e ρ_2/ρ_1 como função de Δz.

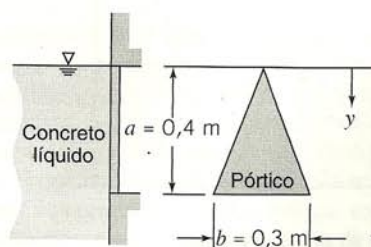
3.35 A atmosfera de Marte comporta-se como um gás ideal com massa molecular média de 32,0 e temperatura constante de 200 K. A massa específica da atmosfera na superfície do planeta é $\rho = 0{,}015$ kg/m³, e a gravidade é igual a 3,92 m/s². Calcule a massa específica da atmosfera marciana numa altitude $z = 20$ km acima da superfície. Trace um gráfico da razão entre a massa específica e a massa específica na superfície como função da elevação. Compare o resultado com o da atmosfera terrestre.

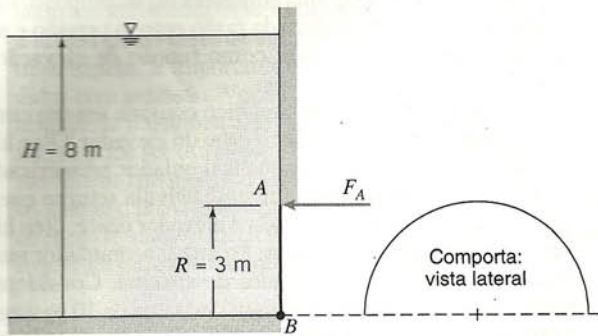
3.36 No nível do solo, em Denver, Colorado, a pressão e a temperatura atmosféricas são respectivamente 83,2 kPa e 25°C. Calcule a pressão em Pike's Peak, a uma elevação de 2690 m acima da cidade, considerando uma atmosfera (a) incompressível e (b) adiabática. Trace um gráfico da razão entre a pressão e a pressão na superfície de Denver como função da elevação para ambos os casos.

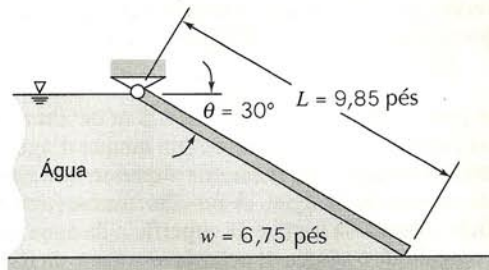
3.37 Um elevador hidráulico-pneumático consiste em um conjunto pistão-cilindro para suspender o cabo do elevador. Óleo hidráulico, armazenado em um tanque acumulador pressurizado por ar, aciona o pistão por meio de uma válvula sempre que é necessário içar o elevador. Quando o elevador desce, óleo hidráulico retorna para o acumulador. Projete o acumulador mais barato que atenda às necessidades do sistema. Considere uma ascensão de três andares com carga máxima de 10 passageiros, e pressão máxima do sistema de 800 kPa (manométrica). Para resistir ao esforço, o pistão deve ter diâmetro mínimo de 150 mm. O pistão e o cabo do elevador têm massa total de 3000 kg, e devem ser comprados. Faça a análise necessária para definir, como uma função da pressão de operação do sistema, o diâmetro do pistão, o volume e o diâmetro do acumulador, e a espessura da sua parede. Discuta aspectos de segurança que a sua firma deveria considerar no sistema completo do elevador. Seria preferível usar um projeto completamente pneumático ou um projeto completamente hidráulico? Por quê?

3.38 Uma porta com 1 m de largura e 1,5 m de altura localiza-se numa parede vertical, plana, de um tanque d'água. A porta é articulada ao longo da sua borda superior, que fica 1 m abaixo da superfície da água. A pressão atmosférica atua na superfície externa da porta e na superfície da água.(a) Determine a magnitude e a linha de ação da resultante da força exercida por todos os fluidos sobre a porta. (b) Se a pressão manométrica na superfície da água for aumentada para 0,3 atm, qual será a força resultante e onde estará sua linha de ação? (c) Trace um gráfico das razões F/F_0 e y/y_c para diferentes valores da razão de pressão na superfície p_s/p_{atm}. (F_0 é a força resultante quando $p_s = p_{atm}$.)

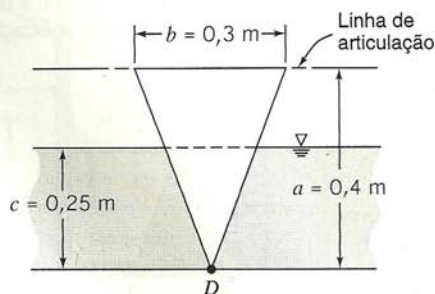
3.39 Uma porta com 1 m de largura e 1,5 m de altura está localizada numa parede vertical, plana, de um tanque de água. A porta é articulada ao longo da sua borda superior, que fica 1 m abaixo da superfície da água. A pressão atmosférica atua na superfície externa da porta. (a) Se a pressão na superfície da água for a atmosférica, que força deve ser aplicada na borda inferior da porta a fim de impedi-la de abrir? (b) Se a pressão manométrica na superfície da água é aumentada para 0,5 atm, qual é a força que deve ser aplicada na borda inferior da porta para mantê-la aberta? (c) Trace um gráfico da razão F/F_0 para diferentes valores da razão de pressão superficial p_s/p_{atm}. (F_0 é a força resultante quando $p_s = p_{atm}$.)

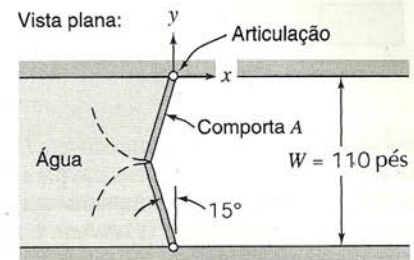
3.40 Um pórtico de acesso triangular deve ser providenciado na lateral de uma fôrma contendo concreto líquido. Usando as coordenadas e dimensões mostradas, determine a força resultante que age sobre o pórtico e seu ponto de aplicação.

P3.40

3.41 Uma comporta plana semicircular AB é articulada ao longo de B e suportada pela força horizontal F_A aplicada em A. O líquido à esquerda da comporta é água. Calcule a força F_A requerida para o equilíbrio.

P3.41

3.42 Uma comporta plana de espessura uniforme suporta uma profundidade de água como mostrado. Encontre o peso mínimo da comporta necessário para mantê-la fechada.

P3.42

3.43 Considere um recipiente semicilíndrico de raio R e comprimento L. Desenvolva expressões gerais para a magnitude e linha de ação da força hidrostática no fundo, se o recipiente estiver cheio d'água e aberto para a atmosfera. Plote os resultados (na forma unidimensional) para a faixa de profundidade de água $0 \leq d/R \leq 1$.

3.44 Uma janela de acesso com a forma de um triângulo isósceles, articulada no topo, é colocada na parede vertical de uma fôrma que contém concreto líquido. Determine a força mínima que deve ser aplicada no ponto D para manter a janela fechada, considerando a configuração da fôrma e concreto como mostrado. Plote os resultados para a faixa de profundidade do concreto de $0 \leq c \leq a$.

P3.44

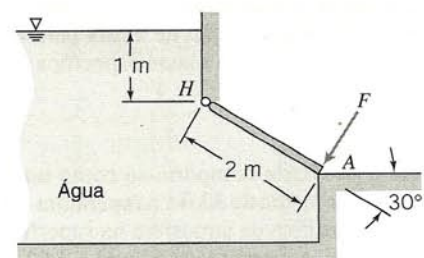
3.45 As comportas de Poe Lock em Sault Ste. Marie, Michigan, fecham um canal com largura $W = 110$ pés, comprimento $L = 1200$ pés, e profundidade $D = 32$ pés. A geometria de um par de comportas é mostrada; cada uma delas é articulada na parede do canal. Quando fechadas, as bordas das comportas são forçadas juntas, no centro do canal, pela água. Avalie a força exercida pela água sobre a comporta A. Determine a magnitude e o sentido das componentes da força exercida pela comporta sobre a articulação. (Despreze o peso da comporta.)

P3.45

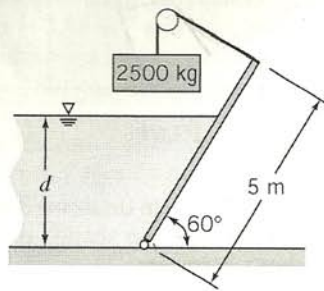
3.46 Uma seção de parede vertical deve ser construída com mistura pronta de concreto derramado entre fôrmas. A parede deve ter 3 m de altura, 0,25 m de espessura e 5 m de largura. Calcule a força exercida pelo concreto em cada fôrma e a sua linha de aplicação.

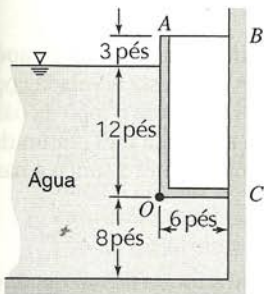
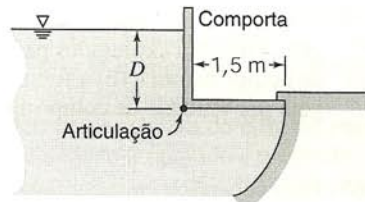
3.47 Resolva novamente o Problema-Exemplo 3.6 usando o primeiro método alternativo ali descrito. Considere a força distribuída como sendo a soma da força F_1 devida à pressão manométrica uniforme com a força F_2 devida ao líquido. Calcule essas forças e determine suas linhas de ação. Some, então, os momentos em relação à articulação para avaliar F_t.

3.48 Resolva novamente o Problema-Exemplo 3.6 usando o segundo método alternativo ali descrito. Aumente artificialmente a profundidade da água de modo que, com a nova superfície livre à pressão atmosférica, a pressão no topo da porta tenha o valor dado de 100 lbf/pé². Com esta configuração equivalente, aplique as equações de cálculo diretamente para obter a resultante da força de pressão distribuída e sua linha de ação. Some, então, os momentos em relação à articulação para avaliar F_t.

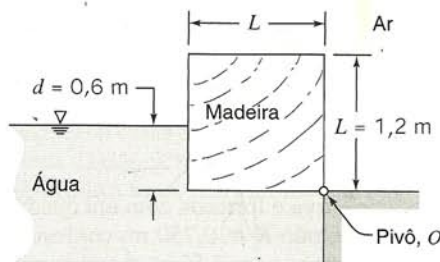
3.49 O pórtico de acesso circular na lateral de uma coluna vertical de água de pressurização tem diâmetro de 0,6 m e está fixado por oito parafusos espaçados igualmente em torno da circunferência. Se o diâmetro da coluna com água é 7 m e o centro do pórtico está localizado a 12 m abaixo da superfície livre da água, determine (a) a força total sobre o pórtico e (b) o diâmetro adequado do parafuso.

3.50 A comporta mostrada é articulada em H. A comporta tem 2 m de largura em um plano normal ao diagrama mostrado. Calcule a força requerida em A para manter a comporta fechada.

P3.50

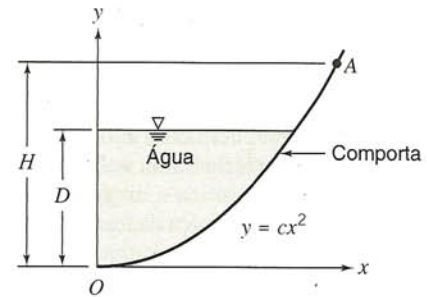
3.51 A comporta mostrada tem 3 m de largura e, para fins de análise, pode ser considerada sem massa. Para qual profundidade de água esta comporta retangular ficará em equilíbrio como mostrado?

P3.51

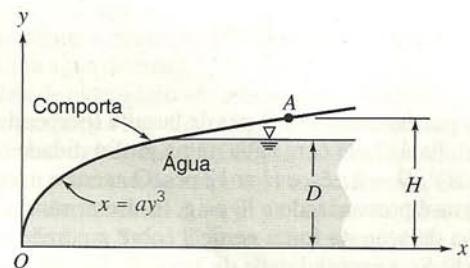
3.52 A comporta *AOC* mostrada possui 6 pés de largura e é articulada em *O*. Desconsiderando o peso da comporta, determine a força na barra *AB*. A comporta é selada em *C*.

P3.52 P3.53

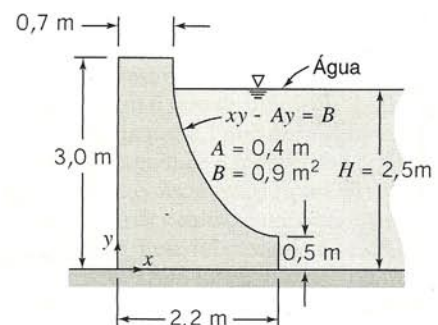
3.53 Conforme a água sobe no lado esquerdo da comporta retangular, esta se abre automaticamente. A que altura acima da articulação ocorrerá a abertura? Negligencie a massa da comporta.

3.54 Um bloco de madeira longo, de seção quadrada, é articulado em uma de suas arestas. Ele está em equilíbrio quando imerso em água à profundidade mostrada. Avalie a densidade relativa da madeira, se o atrito no pivô for desprezível.

P3.54

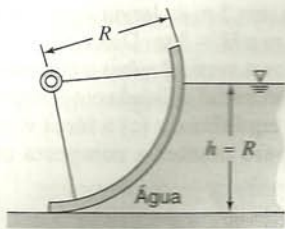
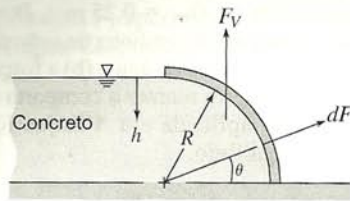
3.55 Explore a forma (seção quadrada) e dimensões de uma barragem de concreto sólido requeridas para represar água estática em um reservatório de profundidade *D*. De modo a facilitar a preparação das fôrmas para o concreto, suponha que a barragem seja construída com superfícies planas. Despreze a pressão hidrostática sob a barragem. Defina a forma da barragem que requer a quantidade mínima de concreto para uma dada profundidade de água e obtenha as dimensões da melhor barragem, expressa em termos da profundidade *D*. Discuta os possíveis efeitos da pressão hidrostática abaixo da barragem.

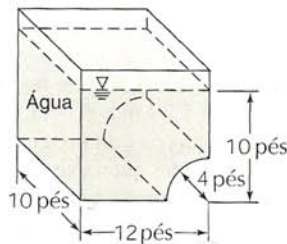
3.56 A comporta parabólica mostrada tem 2 m de largura e é articulada em *O*; $c = 0{,}25\ \text{m}^{-1}$, $D = 2$ m e $H = 3$ m. Determine (a) a magnitude e a linha de ação da força vertical sobre a comporta decorrente da água, (b) a força horizontal aplicada em *A* requerida para manter a comporta em equilíbrio, e (c) a força vertical aplicada em *A* requerida para manter a comporta em equilíbrio.

P3.56

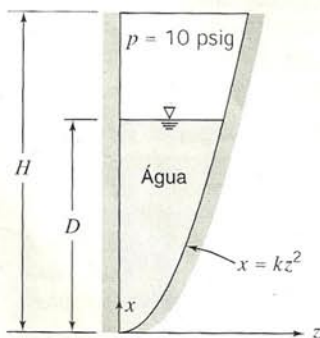
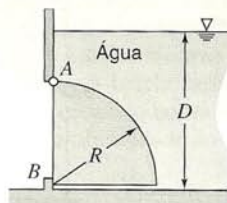
3.57 A comporta mostrada tem 1,5 m de largura e é articulada em *O*; $a = 1{,}0\ \text{m}^{-2}$, $D = 1{,}20$ m e $H = 1{,}40$ m. Determine (a) a magnitude e o momento da componente vertical em torno de *O*, e (b) a força horizontal que deve ser aplicada em torno do ponto *A* para manter a comporta na posição mostrada.

P3.57

3.58 Uma represa deve ser construída através do rio Wabash com a seção reta mostrada. Suponha que a largura da represa é $w = 50$ m. Para uma altura de água $H = 2{,}5$ m, calcule a magnitude e a linha de ação da força vertical da água sobre a face da represa. É possível que a força da água derrube esta represa? Sob quais circunstâncias?

P3.58

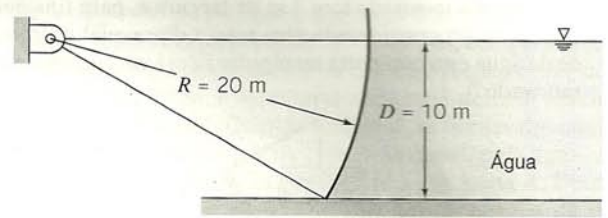
3.59 Uma comporta de vertedouro, com a forma de arco semicircular, tem *w* m de largura. Determine a magnitude e a linha de ação da componente vertical da força decorrente de todos os fluidos atuando sobre a comporta.

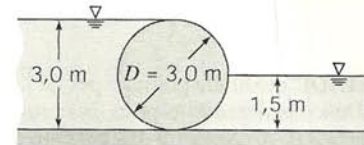
3.60 Concreto líquido é despejado na fôrma mostrada ($R = 0{,}313$ m). A fôrma tem largura de $w = 4{,}25$ m normal ao diagrama. Calcule a magnitude da força vertical exercida sobre a fôrma pelo concreto e especifique sua linha de ação.

P3.59 P3.60

3.61 Um tanque aberto está cheio com água na profundidade indicada. A pressão atmosférica atua sobre todas as superfícies externas do tanque. Determine a magnitude e a linha de ação da componente vertical da força da água sobre a parte curva do fundo do tanque.

P3.61

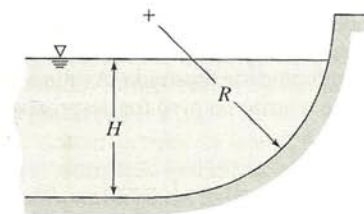
3.62 O tanque mostrado tem 2 pés de largura (perpendicular ao plano xz). Está cheio com água numa profundidade de 8 pés; $k = 0{,}5$ pés^{-1}, $D = 8$ pés, e $H = 12$ pés. O ar entre o topo do tanque e a água é pressurizado a 10 psig. (a) Determine a magnitude e a linha de ação da força vertical sobre a porção curva do tanque. (b) Se a profundidade da água, D, for reduzida para 4 pés e a pressão do ar for mantida em 10 psig, determine a magnitude e a linha de ação da força vertical sobre a porção curva do tanque. (c) Trace o gráfico de F_V e z' como função da profundidade da água supondo que a pressão do ar sobre a superfície é mantida em 10 psig.

P3.62 P3.63

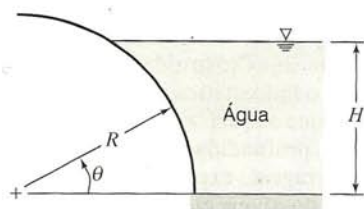
3.63 Uma comporta, na forma de um quadrante de cilindro, articulada em A e vedada em B, tem 2 m de largura. O fundo da comporta está 3 m abaixo da superfície da água. Determine a força no batente B, se a comporta for feita de concreto; $R = 2$ m.

3.64 Uma comporta Tainter, utilizada para o controle da vazão de água na represa de Uniontown, no rio Ohio, é mostrada; a sua largura é $w = 35$ m. Determine a magnitude, o sentido e a linha de ação da força decorrente da ação da água sobre a comporta.

P3.64

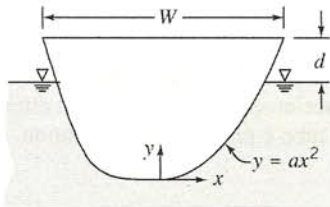
3.65 Uma barragem cilíndrica tem diâmetro 3 m e comprimento 6 m. Determine a magnitude e o sentido da força resultante da água agindo sobre a barragem.

P3.65

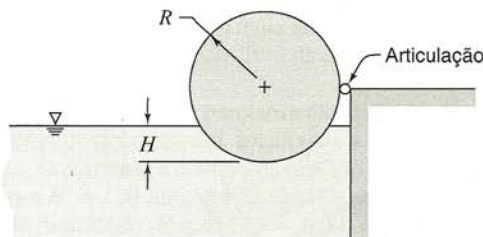
3.66 Uma grande tora cilíndrica de madeira, com diâmetro D, apóia-se contra o topo de uma barragem. A água está nivelada com o topo da tora e o centro desta está nivelado com o topo da barragem. Obtenha expressões para (a) a massa da tora por unidade de comprimento e (b) a força de contato entre a tora e a barragem por unidade de comprimento.

3.67 Uma superfície curva submersa, com a forma de um quadrante de cilindro de raio $R = 0{,}3$ m, é mostrada. A fôrma é enchida com concreto líquido até uma altura $H = 0{,}24$ m. A largura é $w = 1{,}25$ m. Calcule a magnitude da força hidrostática vertical sobre a fôrma, decorrente do concreto. Determine a sua linha de ação. Plote os resultados para a faixa de profundidade de concreto $0 \leq H \leq R$.

P3.67

3.68 Uma superfície curva é formada com um quadrante de um cilindro circular de raio $R = 0{,}750$ m, conforme mostrado. A superfície tem largura $w = 3{,}55$ m. Água permanece à direita da superfície a uma profundidade $H = 0{,}650$ m. Calcule a força hidrostática vertical sobre a superfície curva. Avalie a linha de ação desta força. Determine a magnitude e a linha de ação

P3.68

da força horizontal sobre a superfície. Plote os resultados para a faixa de profundidade de água $0 \leq H \leq R$.

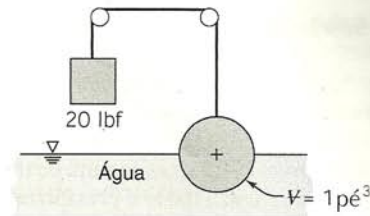
3.69 O perfil da seção reta de uma canoa é modelado pela curva $y = ax^2$, onde $a = 3{,}89\ \text{m}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. Suponha que a largura da canoa tem valor constante $W = 0{,}6$ m em todo o seu comprimento $L = 5{,}25$ m. Estabeleça uma expressão algébrica geral relacionando a massa total da canoa e seu conteúdo com a distância d entre a superfície da água e a borda da canoa. Calcule a massa total permitida sem afundar a canoa.

P3.69

3.70 O cilindro mostrado é suportado por um líquido incompressível de massa específica ρ, sendo articulado ao longo do seu comprimento. O cilindro, de massa M, comprimento L e raio R, está imerso em um líquido até uma profundidade H. Obtenha uma expressão geral para a densidade relativa do cilindro em função da razão entre a profundidade do líquido e o raio do cilindro, $\alpha = H/R$, necessária para manter o cilindro em equilíbrio para $0 \leq \alpha < 1$. Plote os resultados.

P3.70

3.71 Resolva novamente o Problema-Exemplo 3.7. Considere que a massa da comporta é 70,2 kg por metro quadrado de área superficial. Avalie a força A necessária para manter a comporta na posição sob essas condições. Trace gráficos para uma faixa de massas da comporta. Identifique a massa da comporta que contrabalança a força hidrostática sobre ela.

3.72 Uma canoa é representada por um semicilindro circular reto, com $R = 0{,}35$ m e $L = 5{,}25$ m. A canoa flutua em água com profundidade $d = 0{,}245$ m. Estabeleça uma expressão algébrica geral para a massa total (canoa e conteúdo) que pode flutuar, em função da profundidade. Avalie para as condições dadas. Plote os resultados para a faixa de profundidade da água $0 \leq d \leq R$.

***3.73** Determine o peso específico da esfera mostrada se o seu volume é de 1 pé³. Enuncie todas as considerações feitas. Qual será a posição de equilíbrio da esfera se o peso for removido?

*Estes problemas requerem o material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade do texto.

P3.73 **P3.74**

***3.74** Um densímetro é um indicador de densidade relativa, sendo o valor indicado pelo nível no qual a superfície livre intercepta a haste que flutua num líquido. A marca 1,0 é o nível quando em água destilada. Para a unidade mostrada, o volume imerso em água destilada é de 15 cm³. A haste tem 6 mm de diâmetro. Determine a distância, h, da marca 1,0 à superfície, quando o densímetro é colocado numa solução de ácido nítrico de densidade relativa 1,5.

***3.75** As relações entre gordura e músculos de uma pessoa podem ser determinadas por uma medição de densidade relativa. A medição é feita imergindo o corpo num tanque de água e medindo o peso líquido. Desenvolva uma expressão para a densidade relativa de uma pessoa em termos do seu peso no ar, peso líquido na água e densidade relativa $SG = f(T)$ para a água.

***3.76** Quantifique o experimento realizado por Arquimedes para identificar o material da coroa do Rei Hiero. Imagine que você possa medir o peso da coroa do rei no ar, W_a, e também o peso na água, W_w. Expresse a densidade relativa da coroa em função destes valores medidos.

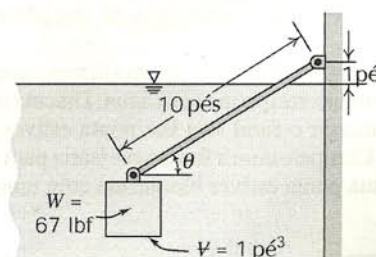
***3.77** Quantifique o enunciado: "Somente a ponta de um iceberg aparece (na água do mar)."

***3.78** Bolhas de hidrogênio são usadas para a visualização de linhas de filete no filme *Flow Visualization.* O diâmetro típico de uma bolha de hidrogênio é $d = 0{,}025$ mm. As bolhas tendem a subir lentamente por causa do empuxo; eventualmente, elas atingem uma velocidade terminal. A força de arrasto da água sobre a bolha é dada por $F_D = 3\pi\mu V d$, onde μ é a viscosidade da água e V é a velocidade da bolha relativa à água. Determine a força de empuxo que atua sobre uma bolha de hidrogênio imersa na água. Estime a velocidade terminal de uma bolha em ascensão na água.

***3.79** O balonismo a ar quente é um esporte popular. De acordo com um artigo recente, "os volumes de ar quente devem ser grandes porque o ar aquecido a 150°F acima da temperatura ambiente levanta apenas 0,018 lbf/pé³, comparado a 0,066 e 0,071 lbf/pé³ para hélio e hidrogênio, respectivamente". Verifique esses dados para as condições ao nível do mar. Calcule o efeito de aumentar a temperatura máxima do ar quente a 250°F acima da ambiente.

***3.80** Bolhas de gás são liberadas do regulador do equipamento de um mergulhador submerso. O que acontece com estas bolhas enquanto elas sobem na água do mar? Explique.

***3.81** A haste de um densímetro de vidro utilizado na medição de densidade relativa tem 6 mm de diâmetro. A distância entre marcas na haste é de 3 mm por 0,1 mm de incremento de densidade relativa. Calcule a magnitude e sentido do erro introduzido pela tensão superficial se o densímetro flutua em álcool etílico. (Considere que o ângulo de contato entre o etanol e o vidro é zero grau.)

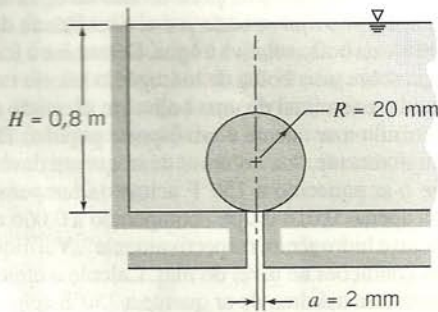
***3.82** Um pé cúbico de material pesando 67 lbf afunda na água, conforme mostrado. Uma haste circular de madeira com 10 pés de comprimento e 3 pol.² de seção reta está ligada ao peso e

P3.82

também à parede. Se a haste pesa 3 lbf, qual será o ângulo, θ, para o equilíbrio?

***3.83** Um balão de hélio deve transportar uma carga a uma altitude de 40 km onde a pressão e a temperatura atmosféricas são respectivamente 3,0 mbar e $-25°C$. O balão é fabricado em poliéster com densidade relativa de 1,28 e espessura de 0,015 mm. Para manter uma forma esférica, o balão é pressurizado a uma pressão manométrica de 0,45 mbar. Determine o diâmetro máximo do balão se a tensão máxima admissível de tração no tecido é limitada a 62 MN/m². Que carga pode ser transportada?

***3.84** Balões científicos operando à pressão de equilíbrio com o ambiente têm sido usados para levar instrumentos a altitudes extremamente elevadas. Um desses balões, construído em poliéster com espessura de 0,013 mm, levantou uma carga de 230 kg a uma altitude de aproximadamente 49 km, onde as condições atmosféricas são 0,95 mbar e $-20°C$. O gás hélio no balão estava a uma temperatura de aproximadamente $-10°C$. A densidade relativa do material do balão é 1,28. Determine o diâmetro e a massa do balão. Suponha que ele seja esférico.

***3.85** Uma esfera de raio R está parcialmente imersa, a uma profundidade d, num líquido com densidade relativa SG. Obtenha uma expressão algébrica para a força de empuxo atuando sobre a esfera como uma função da profundidade de submersão, d, para $0 \leq d \leq 2R$.

***3.86** Uma esfera de raio R, feita de material com densidade relativa SG, está submersa num tanque com água. A esfera é colocada sobre um orifício, de raio a, no fundo do tanque. Desenvolva uma expressão geral para a faixa de densidades relativas para a qual a esfera subirá à tona. Para as dimensões dadas, determine a SG mínima necessária para a esfera permanecer na posição mostrada.

P3.86

***3.87** Um esquema proposto para resgate no oceano envolve o bombeamento de ar em bolsões colocados dentro e em volta da embarcação naufragada. Discuta a praticidade desta estratégia, fundamentando suas conclusões em análises consistentes.

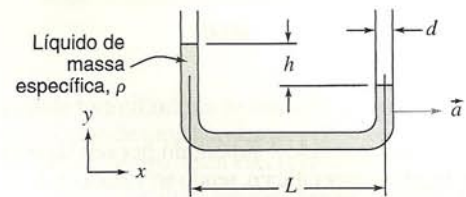
***3.88** Em um brinquedo infantil, um mergulhador em miniatura é imerso em uma coluna de líquido. Quando um diafragma no topo da coluna é empurrado para baixo, o mergulhador afunda. Quando o diafragma é liberado, o mergulhador sobe de novo. Explique o princípio de funcionamento do brinquedo.

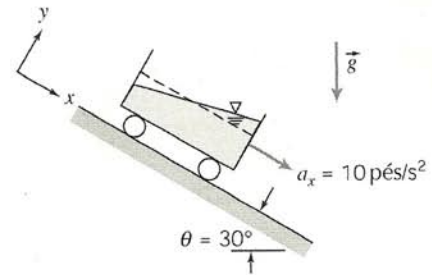
***3.89** Considere um funil cônico imerso lentamente, em posição invertida, em um recipiente com água. Discuta a força necessária para submergir o funil se a sua ponta estiver aberta para a atmosfera. Compare com a força necessária para submergir o funil quando sua ponta estiver bloqueada com uma rolha.

*Estes problemas requerem o material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade do texto.

***3.90** Uma tora cilíndrica, com $D = 0,3$ m e $L = 4$ m, é mais pesada na sua extremidade inferior, de modo que flutua verticalmente submersa 3 m na água. Quando deslocada verticalmente da sua posição de equilíbrio, a tora oscila ou saltita na direção vertical ao ser solta. Estime a freqüência de oscilação da tora. Despreze efeitos viscosos e o movimento da água.

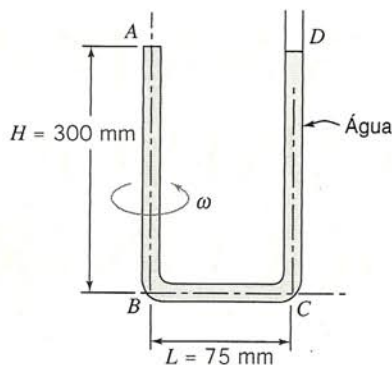
***3.91** Um vaso cilíndrico, semelhante ao analisado no Problema-Exemplo 3.9, é girado a uma velocidade angular constante em torno do seu eixo. O cilindro tem 1 pé de diâmetro e inicialmente contém água com profundidade de 4 pol. Determine a velocidade máxima na qual o cilindro pode ser girado antes que o líquido na superfície livre apenas toque o fundo do tanque. A sua resposta depende da massa específica do líquido? Explique.

***3.92** Um acelerômetro rudimentar pode ser feito com um tubo em U cheio de líquido, conforme mostrado. Deduza uma expressão para a aceleração $\vec{a}$, em termos da diferença de nível h, geometria do tubo e propriedades do fluido.

P3.92

***3.93** Um recipiente retangular contendo água é submetido a uma aceleração constante, descendo um plano inclinado, conforme mostrado. Determine a inclinação da superfície livre usando as coordenadas apresentadas.

P3.93

***3.94** Um tubo de ensaio é centrifugado com $\omega = 1000$ rev/s. O suporte do tubo é montado num pivô de modo que o tubo bascula para fora à medida que a rotação aumenta. A altas velocidades, ele fica aproximadamente horizontal. Determine (a) uma expressão para a componente radial da aceleração de um elemento líquido localizado no raio r, (b) o gradiente de pressão radial $\partial p/\partial r$ e (c) a pressão máxima no fundo do tubo de ensaio se ele contiver água. (A superfície livre e o fundo têm raios de 50 e 130 mm, respectivamente.)

***3.95** Um micromanômetro centrífugo pode ser usado para criar pequenas e acuradas pressões diferenciais no ar para trabalhos de medição de alta precisão. O dispositivo consiste em um par de discos paralelos que giram, desenvolvendo uma diferença de pressão radial. Não há escoamento entre os discos. Obtenha uma expressão para a diferença de pressão em termos da velocidade de rotação, raio e massa específica do ar. Avalie a velocidade de rotação necessária para desenvolver uma pressão diferencial de 8 μm de água, usando um dispositivo com 50 mm de raio.

***3.96** O tubo em U mostrado está cheio d'água a $T = 20°C$. É selado em A e aberto para a atmosfera em D. O tubo gira em torno do eixo vertical AB. Para as dimensões mostradas, calcule a máxima velocidade angular, se não há cavitação.

P3.96

***3.97** Uma caixa cúbica com 1 m de aresta, cheia pela metade com óleo (SG = 0,80), recebe uma aceleração horizontal constante de $0{,}2g$. Determine a inclinação da superfície livre e a pressão ao longo do fundo horizontal da caixa.

***3.98** Um recipiente retangular, tendo uma base com dimensões 0,4 m × 0,2 m e altura 0,4 m, é enchido com água até uma profundidade de 0,2 m; a massa do recipiente vazio é 10 kg. O recipiente é colocado num plano com inclinação de 30° com relação à horizontal. Se o coeficiente de atrito de deslizamento entre o recipiente e o plano for 0,3, determine o ângulo da superfície da água em relação à horizontal.

***3.99** Se o recipiente do Problema 3.98 deslizar sem atrito, determine o ângulo da superfície da água em relação à horizontal. Qual é a inclinação da superfície livre da água para a mesma aceleração plano acima?

***3.100** Uma lata de refrigerante parcialmente cheia é colocada na borda externa de um carrossel, localizada a $R = 1{,}5$ m do eixo de rotação. O diâmetro e a altura da lata são respectivamente $D = 65$ mm e $H = 120$ mm. A lata contém refrigerante pela metade, com densidade relativa SG = 1,06. Avalie a inclinação da superfície líquida na lata se o carrossel gira a uma velocidade de 0,3 rotação por segundo. Calcule a velocidade de rotação para a qual o líquido da lata transbordará, supondo que não há escorregamento entre o fundo da lata e o carrossel. O que é mais provável, a lata escorregar ou o líquido transbordar?

***3.101** Um balde cilíndrico, com 1 pé de diâmetro e de altura, pesa 3 lbf e contém 8 pol. de água. O balde é girado num círculo vertical de 3 pés de raio a uma velocidade de 15 pés/s. Suponha que a água se move como um corpo rígido. No instante em que o balde está no cume da sua trajetória, calcule a tração na corda e a pressão no fundo do balde decorrente da água.

***3.102** Centrífugas de gás são usadas num processo de produção de urânio enriquecido para bastões de combustível nuclear. A máxima velocidade periférica de uma dessas centrífugas é limitada, por considerações de tensões, a 300 m/s. Suponha uma centrífuga contendo hexafluoreto de urânio gasoso, com massa molecular $M_m = 352$ e comportamento de gás ideal. Desenvolva uma expressão para a razão entre a pressão máxima e a pressão no eixo da centrífuga. Avalie a razão para uma temperatura do gás de 325°C.

***3.103** Quando uma bola de pólo aquático é submersa abaixo da superfície em uma piscina e solta a partir do repouso, observa-se que a mesma pula para fora d'água. Qual seria a altura provável atingida pela bola fora d'água em função da profundidade de submersão na piscina? Você esperaria o mesmo resultado para uma bola de praia? E para uma bola de tênis de mesa?

***3.104** A análise do Problema 3.98 sugere que é possível determinar o coeficiente de atrito de deslizamento entre duas superfícies pela medida do ângulo da superfície livre em um recipiente cheio de líquido escorregando para baixo em uma superfície inclinada. Investigue a viabilidade dessa idéia.

***3.105** Um automóvel viajando a 90 km/h faz uma longa curva de raio 250 m. O ar-condicionado está ligado e as janelas levantadas, de modo que o ar dentro do carro move-se essencialmente como um corpo rígido. Uma criança na traseira segura o cordão de um balão cheio de hélio. Numa estrada reta, o cordão fica na vertical, mas numa curva não. Determine a magnitude e o sentido do ângulo do cordão em relação à vertical.

***3.106** Moldes de ferro fundido ou de aço são empregados em máquinas rotativas de eixo horizontal para a fabricação de peças fundidas tubulares. Uma carga de metal líquido é vazada dentro do molde giratório. A aceleração radial permite a obtenção de espessuras de parede aproximadamente uniformes. Um tubulão de aço, de comprimento $L = 2$ m, raio externo $r_o = 0{,}15$ m e raio interno $r_i = 0{,}10$ m, deve ser fabricado por esse processo. Para obter espessura aproximadamente uniforme, a aceleração radial mínima deve ser de $10g$. Determine (a) a velocidade angular requerida e (b) as pressões máxima e mínima na superfície do molde.

*Estes problemas requerem o material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade do texto.

Capítulo 4

EQUAÇÕES BÁSICAS NA FORMA INTEGRAL PARA UM VOLUME DE CONTROLE

Começaremos o nosso estudo dos fluidos em movimento desenvolvendo as equações básicas na forma integral para aplicação em volumes de controle. Por que a formulação de volume de controle, e não de sistema? Há dois motivos básicos. Primeiro, uma vez que os meios fluidos são capazes de distorção e deformação contínuas com o tempo, é, em geral, muito difícil identificar e seguir a mesma massa de fluido em todos os instantes (como deve ser feito para aplicar a formulação de sistema). Segundo, estamos, na maioria das vezes, interessados não no movimento de uma dada massa de fluido, mas no efeito daquele movimento sobre algum dispositivo ou estrutura. Assim, é mais conveniente aplicar as leis básicas a um volume definido no espaço usando uma análise de volume de controle.

As leis básicas para um sistema devem fazer parte de seus estudos anteriores de física, mecânica e termodinâmica. O nosso enfoque, no desenvolvimento das formulações matemáticas dessas leis para um volume de controle, será obter uma formulação geral que nos permita converter uma análise de sistema em outra de volume de controle.

4.1 LEIS BÁSICAS PARA UM SISTEMA

As leis básicas para um sistema são resumidas brevemente; por questão de conveniência, cada uma das equações básicas para um sistema é escrita como uma equação de taxa, ou seja, de variação de uma grandeza com o tempo.

4.1.1 Conservação de Massa

Como um sistema é, por definição, uma porção arbitrária de matéria de identidade fixa, ele é constituído da mesma quantidade de matéria em todos os instantes. A conservação de massa exige que a massa, M, do sistema seja constante. Numa base de taxa, temos

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = 0 \qquad (4.1a)$$

onde

$$M_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} dm = \int_{V\!\!\!\!-(\text{sistema})} \rho\, dV\!\!\!\!- \qquad (4.1b)$$

4.1.2 A Segunda Lei de Newton

Para um sistema movendo-se em relação a uma estrutura inercial de referência, a segunda lei de Newton afirma que a soma de todas as forças externas atuando sobre o sistema é igual à taxa de variação com o tempo da sua quantidade de movimento linear,

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \qquad (4.2a)$$

onde a quantidade de movimento linear, $\vec{P}$, do sistema, é dada por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{V}\, dm = \int_{V\!\!\!\!-(\text{sistema})} \vec{V}\rho\, dV\!\!\!\!- \qquad (4.2b)$$

4.1.3 O Princípio da Quantidade de Movimento Angular

Este princípio afirma que, para um sistema, a taxa de variação com o tempo da quantidade de movimento angular é igual à soma de todos os torques atuando sobre o sistema,

$$\vec{T} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \qquad (4.3a)$$

onde a quantidade de movimento angular do sistema é dada por

$$\vec{H}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r}\times\vec{V}\, dm = \int_{V\!\!\!\!-(\text{sistema})} \vec{r}\times\vec{V}\rho\, dV\!\!\!\!- \qquad (4.3b)$$

O torque pode ser produzido por forças de superfície e de massa, assim como por eixos que cruzam a fronteira do sistema.

$$\vec{T} = \vec{r}\times\vec{F}_s + \int_{M(\text{sistema})} \vec{r}\times\vec{g}\, dm + \vec{T}_{\text{eixo}} \qquad (4.3c)$$

4.1.4 A Primeira Lei da Termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica é um enunciado de conservação da energia para um sistema,

$$\delta Q - \delta W = dE$$

Na forma de variação com o tempo, a equação pode ser escrita como

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.4a}$$

onde a energia total do sistema é dada por

$$E_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} e\,dm = \int_{\forall(\text{sistema})} e\rho\,d\forall \tag{4.4b}$$

e

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz \tag{4.4c}$$

Na Eq. 4.4a, $\dot{Q}$ (a taxa de transferência de calor) é positiva quando o calor é adicionado ao sistema pelo meio ambiente ao seu redor; $\dot{W}$ (a taxa de trabalho) é positiva quando o trabalho é realizado pelo sistema sobre o meio ambiente. Na Eq. 4.4c, u é a energia interna específica, V a velocidade e z a altura relativa a uma referência conveniente de uma partícula de substância de massa dm.

4.1.5 A Segunda Lei da Termodinâmica

Se uma quantidade de calor, δQ, for transferida para um sistema à temperatura T, a segunda lei da termodinâmica estabelece que a variação de entropia, dS, do sistema é dada por

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

Numa base de taxa, podemos escrever

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{\text{sistema}} \geq \frac{1}{T}\dot{Q} \tag{4.5a}$$

onde a entropia total do sistema é dada por

$$S_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} s\,dm = \int_{\forall(\text{sistema})} s\rho\,d\forall \tag{4.5b}$$

4.2 A RELAÇÃO ENTRE AS DERIVADAS DO SISTEMA E A FORMULAÇÃO PARA VOLUME DE CONTROLE

Na seção anterior resumimos as equações básicas para um sistema. Descobrimos que, quando escritas numa base de taxa, cada equação envolve a derivada em relação ao tempo de uma propriedade extensiva do sistema (a massa total, a quantidade de movimento linear, a quantidade de movimento angular, a energia, ou a entropia do sistema). A fim de desenvolver a formulação para volume de controle de cada lei básica partindo da formulação para sistema, usaremos o símbolo N para designar qualquer propriedade extensiva do sistema. A propriedade intensiva correspondente (propriedade extensiva por unidade de massa) será designada por η. Assim,

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \eta\,dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \eta\rho\,d\forall \tag{4.6}$$

Comparando a Eq. 4.6 com as Eqs. 4.1b, 4.2b, 4.3b, 4.4b e 4.5b, constatamos que se:

$N = M$,	então $\eta = 1$
$N = \vec{P}$,	então $\eta = \vec{V}$
$N = \vec{H}$,	então $\eta = \vec{r} \times \vec{V}$
$N = E$,	então $\eta = e$
$N = S$,	então $\eta = s$

A tarefa principal ao passarmos de sistema para volume de controle é expressar a taxa de variação da propriedade extensiva arbitrária, N, para um sistema, em termos de variações desta propriedade associadas com o volume de controle. Como a massa cruza a fronteira do volume de controle, as variações com o tempo da propriedade N, associada ao volume de controle, envolvem o fluxo de massa e as propriedades que a massa conduz por convecção. Um modo conveniente de computar o fluxo de massa é utilizar um processo de limite envolvendo um sistema e um volume de controle que coincidam em um certo instante. As quantidades de fluxo em regiões de superposição e naquelas envolvendo o volume de controle são, então, formuladas de forma aproximada, e o processo de limite é aplicado para obter resultados exatos. A equação final relaciona a taxa de variação da propriedade extensiva arbitrária, N, para um sistema, com as variações temporais dessa propriedade associadas com o volume de controle.

4.2.1 Derivação

O sistema e o volume de controle a serem empregados na análise são mostrados na Fig. 4.1. O campo de escoamento, $\vec{V}(x, y, z, t)$, é arbitrário em relação às coordenadas x, y e z. O volume de controle é fixo no espaço em relação ao sistema de coordenadas xyz; por definição, o sistema deve sempre consistir das mesmas partículas fluidas e, conseqüentemente, deve mover-se com o campo de escoamento. Na Fig. 4.1, as fronteiras do sistema são mostradas em dois instantes diferentes, t_0 e $t_0 + \Delta t$. Em t_0, as fronteiras do sistema e do volume de controle coincidem; em $t_0 + \Delta t$, o sistema ocupa as regiões II e III. O sistema foi escolhido de modo que a massa na região I entra no volume de controle durante o intervalo de tempo Δt, e a massa na região III deixa o volume de controle durante o mesmo intervalo.

Lembre-se que o nosso objetivo é relacionar a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva arbitrária, N, do sistema, com as variações temporais dessa propriedade associadas com o volume de controle. Da definição de derivada, a taxa de variação de N_{sistema} é dada por

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_s)_{t_0+\Delta t} - N_s)_{t_0}}{\Delta t} \tag{4.7}$$

Por conveniência, o índice s foi usado para denotar o sistema na definição de derivada na Eq. 4.7.

Em $t_0 + \Delta t$, o sistema ocupa as regiões II e III; em t_0, o sistema e o volume de controle coincidem. Assim,

$$N_s)_{t_0+\Delta t} = (N_{\text{II}} + N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} = (N_{\text{VC}} - N_{\text{I}} + N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}$$

e

$$N_s)_{t_0} = (N_{\text{VC}})_{t_0}$$

Substituindo na definição da derivada do sistema, Eq. 4.7, obtemos

$$\left.\frac{dN}{dt}\right]_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(N_{\text{VC}} - N_{\text{I}} + N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} - N_{\text{VC}})_{t_0}}{\Delta t} \tag{4.8}$$

Sabendo-se que o limite da soma é igual à soma dos limites, podemos escrever

$$\left.\frac{dN}{dt}\right]_s = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\text{VC}})_{t_0+\Delta t} - N_{\text{VC}})_{t_0}}{\Delta t}}_{①} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{②} - \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\text{I}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{③} \tag{4.9}$$

A nossa tarefa agora é avaliar cada um dos três termos da Eq. 4.9.

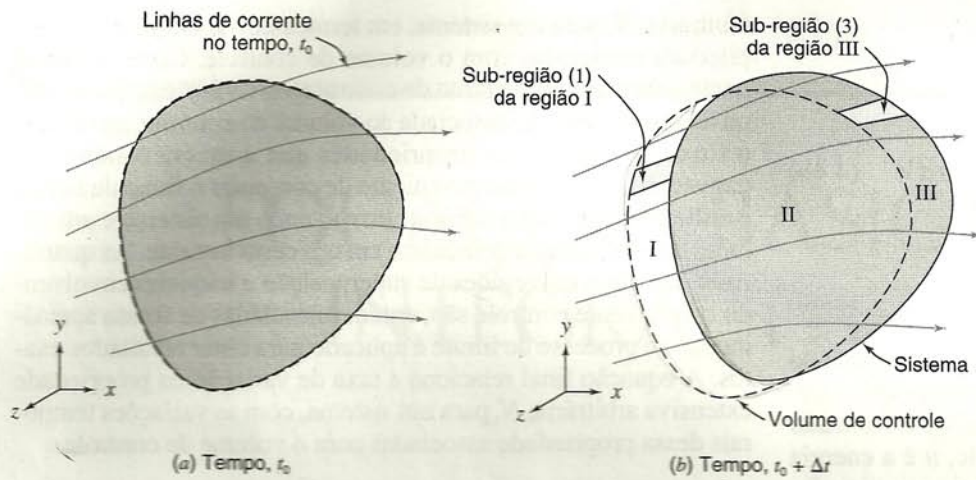



Fig. 4.1 Configuração de sistema e de volume de controle.

O termo ① na Eq. 4.9 é simplificado para

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\text{VC}})_{t_0+\Delta t} - N_{\text{VC}})_{t_0}}{\Delta t} = \frac{\partial N_{\text{VC}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta\rho\, d\mathcal{V}$$

Para avaliar o termo ② primeiramente desenvolveremos uma expressão para $N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}$ pelo exame da vista ampliada de uma sub-região típica da região III mostrada na Fig. 4.2. O vetor $d\vec{A}$ tem magnitude igual ao elemento de área, dA, da superfície de controle; a direção de $d\vec{A}$ é a da normal à superfície, para fora do elemento. O ângulo α é aquele entre $d\vec{A}$ e o vetor velocidade, $\vec{V}$. Como a massa na região III é a que *sai* do volume de controle durante o intervalo Δt, o ângulo α será sempre inferior a $\pi/2$ em toda a área da superfície de controle limitando a região III.

Para a sub-região (3) podemos escrever

$$dN_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} = (\eta\rho\, d\mathcal{V})_{t_0+\Delta t} = [\eta\rho(\Delta l \cos\alpha\, dA)]_{t_0+\Delta t}$$

uma vez que $d\mathcal{V} = \Delta l \cos \alpha\, dA$. Então, para toda a região III,

$$N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{\text{SC}_{\text{III}}} \eta\rho\, \Delta l \cos\alpha\, dA\right]_{t_0+\Delta t}$$

onde SC_{III} é a superfície comum à região III e ao volume de controle. Nessa expressão, Δl é a distância percorrida durante o intervalo de tempo Δt ao longo de uma linha de corrente existente no instante t_0, por uma partícula fluida que estava sobre a superfície do sistema nesse mesmo instante.

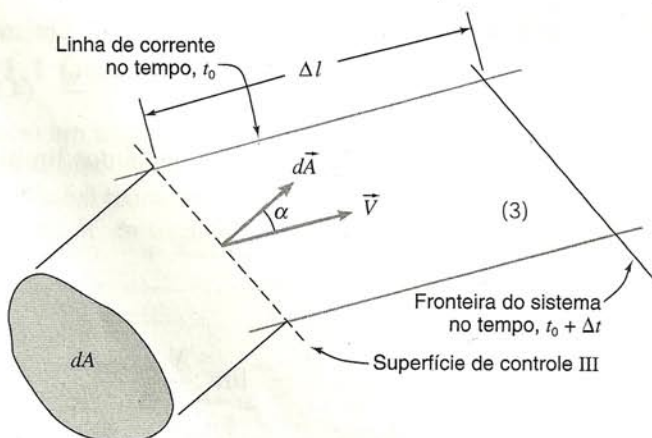



Fig. 4.2 Vista ampliada da sub-região (3) da Fig. 4.1.

Agora que temos uma expressão para $N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}$, podemos avaliar o termo ② na Eq. 4.9:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{\text{SC}_{\text{III}}} \eta\rho\, \Delta l \cos\alpha\, dA}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \int_{\text{SC}_{\text{III}}} \eta\rho \frac{\Delta l}{\Delta t} \cos\alpha\, dA$$

$$= \int_{\text{SC}_{\text{III}}} \eta\rho |\vec{V}| \cos\alpha |d\vec{A}|$$

A última igualdade decorre do fato que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = |\vec{V}| \qquad \text{e} \qquad dA = |d\vec{A}|$$

O termo ③ na Eq. 4.9 é avaliado da mesma maneira que o termo ②. Para avaliar $N_{\text{I}})_{t_0+\Delta t}$, observe a vista ampliada de uma sub-região típica da região I mostrada na Fig. 4.3. O vetor $d\vec{A}$ tem magnitude igual ao elemento de área, dA, da superfície de controle; o sentido de $d\vec{A}$ é o da normal à área da superfície de controle traçada para fora do elemento. O ângulo α é o ângulo entre $d\vec{A}$ e o vetor velocidade, $\vec{V}$. Como a massa na região I flui *para dentro* do volume de controle durante o intervalo Δt, o ângulo α será sempre maior do que $\pi/2$ em toda a área da superfície de controle limitando a região I.

Para a sub-região (1) podemos escrever

$$dN_{\text{I}})_{t_0+\Delta t} = (\eta\rho\, d\mathcal{V})_{t_0+\Delta t} = [\eta\rho\, \Delta l(-\cos\alpha)\, dA]_{t_0+\Delta t}$$

uma vez que $d\mathcal{V} = \Delta l(-\cos\alpha)\, dA$. Por que o sinal negativo? Lembre-se que o volume é uma quantidade escalar que deve ter

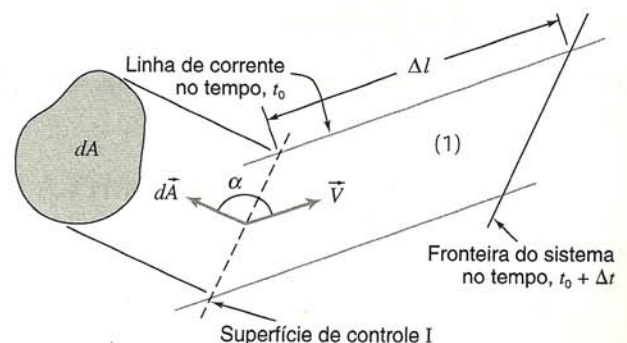



Fig. 4.3 Vista ampliada da sub-região (1) da Fig. 4.1.

um valor numérico positivo. Como $\alpha > \pi/2$, então cos α será negativo.

Então, para toda a região I,

$$N_{\mathrm{I}})_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{\mathrm{SC_I}} -\eta\rho\,\Delta l\cos\alpha\,dA\right]_{t_0+\Delta t}$$

onde SC_I é a superfície comum à região I e ao volume de controle. Nessa expressão, Δl é a distância percorrida por uma partícula sobre a superfície do sistema durante o intervalo Δt, ao longo de uma linha de corrente que existia no instante t_0.

Agora que temos uma expressão para $N_{\mathrm{I}})_{t_0+\Delta t}$, podemos avaliar o termo ③ na Eq. 4.9:

$$-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{\mathrm{I}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\mathrm{SC_I}} -\eta\rho\,\Delta l\cos\alpha\,dA}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathrm{SC_I}}\eta\rho\frac{\Delta l}{\Delta t}\cos\alpha\,dA =$$

$$= \int_{\mathrm{SC_I}}\eta\rho|\vec{V}|\cos\alpha|d\vec{A}|$$

A última igualdade decorre do fato que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t} = |\vec{V}| \qquad \text{e} \qquad dA = |d\vec{A}|$$

Agora que já obtivemos expressões para cada um dos três termos no lado direito, a Eq. 4.9 pode ser escrita

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{VC}}\eta\rho\,d\forall + \int_{\mathrm{SC_I}}\eta\rho|\vec{V}|\cos\alpha|d\vec{A}| + \int_{\mathrm{SC_{III}}}\eta\rho|\vec{V}|\cos\alpha|d\vec{A}|$$

Toda a superfície de controle, SC, consiste em três superfícies,

$$\mathrm{SC} = \mathrm{SC_I} + \mathrm{SC_{III}} + \mathrm{SC}_p$$

onde SC_p é caracterizada pela inexistência de fluxo através da superfície, onde $\alpha = \pi/2$, ou $\vec{V} = 0$.

Conseqüentemente, podemos escrever

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{VC}}\eta\rho\,d\forall + \int_{\mathrm{SC}}\eta\rho|\vec{V}|\cos\alpha|d\vec{A}| \qquad (4.10)$$

Reconhecendo que $\left|\vec{V}\right|\cos\alpha\left|d\vec{A}\right| = \vec{V}\cdot d\vec{A}$, a Eq. 4.10 torna-se

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{VC}}\eta\rho\,d\forall + \int_{\mathrm{SC}}\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.11)$$

A Eq. 4.11 é a relação que buscávamos obter. Essa é a relação fundamental entre a taxa de variação de uma propriedade extensiva arbitrária, N, de um sistema, e as variações dessa propriedade associadas com um volume de controle. Alguns autores referem-se à Eq. 4.11 como sendo o Teorema de Transporte de Reynolds.

4.2.2 Interpretação Física

Consumimos diversas páginas para deduzir a Eq. 4.11. Lembre-se que o nosso objetivo era obter uma relação geral entre a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva arbitrária, N, de um sistema, e as variações dessa propriedade associadas com o volume de controle. A principal razão para deduzi-la foi reduzir o algebrismo necessário à obtenção das formulações para volume de controle das equações básicas. Uma vez que a forma de trabalho de cada uma das equações básicas para aplicação a volumes de controle é desenvolvida a partir da Eq. 4.11, consideramos essa equação como "básica" e a reescrevemos a fim de ressaltar a sua importância:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{VC}}\eta\rho\,d\forall + \int_{\mathrm{SC}}\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.11)$$

É importante lembrar que na dedução da Eq. 4.11 o processo de limite (tomando o limite como $\Delta t \to 0$) garantiu a validade da relação no instante em que o sistema e o volume de controle coincidem. Ao utilizarmos a Eq. 4.11 na passagem das formulações das leis básicas aplicadas ao sistema para as formulações aplicadas ao volume de controle, reconhecemos que ela relaciona a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva, N, do sistema, com variações dessa propriedade associadas com o volume de controle no instante em que o sistema e o volume de controle coincidem. Isto é verdade, pois, quando $\Delta t \to 0$, o sistema e o volume de controle ocupam o mesmo volume e têm as mesmas fronteiras.

Antes de empregarmos a Eq. 4.11 para desenvolvermos as formulações para o volume de controle das leis básicas, certifiquemo-nos de que entendemos cada um dos termos e símbolos na equação:

$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}}$ é a taxa de variação total de qualquer propriedade extensiva arbitrária do sistema.

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{VC}}\eta\rho\,d\forall$ é a taxa de variação com o tempo da propriedade extensiva arbitrária, N, dentro do volume de controle.

: η é a propriedade intensiva correspondente a N; $\eta = N$ por unidade de massa.

: $\rho d\forall$ é um elemento de massa contido no volume de controle.

: $\int_{\mathrm{VC}}\eta\rho d\forall$ é a quantidade total da propriedade extensiva, N, contida no volume de controle.

$\int_{\mathrm{SC}}\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$ é a taxa líquida de fluxo da propriedade extensiva, N, através da superfície de controle.

: $\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$ é a taxa de fluxo através do elemento de área $d\vec{A}$ (reconhecemos que o produto indicado é escalar; o sinal de $\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$ depende do sentido do vetor velocidade, $\vec{V}$, em relação ao vetor área, $d\vec{A}$).

: $\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$ é a taxa de fluxo da propriedade extensiva, N, através da área $d\vec{A}$.

Um comentário adicional sobre a Eq. 4.11 deve ser feito. A velocidade, $\vec{V}$, é medida em relação à superfície do volume de controle. Ao desenvolvermos a Eq. 4.11, consideramos um volume de controle fixo em relação às coordenadas de referência, x, y e z. Uma vez que o campo de velocidade foi especificado com relação às mesmas coordenadas, decorre que a velocidade $\vec{V}$ é medida em relação ao volume de controle.

Ressaltaremos ainda esse ponto na dedução da formulação de volume de controle de cada uma das leis básicas. Em cada caso, começaremos com a formulação familiar de sistema e usaremos a Eq. 4.11 para relacionar derivadas do sistema a taxas de varia-

ções com o tempo associadas com um volume de controle fixo no instante em que o sistema e o volume de controle coincidem.[1]

4.3 A CONSERVAÇÃO DE MASSA

O primeiro princípio físico ao qual aplicamos a relação entre as formulações de sistema e de volume de controle é a conservação de massa. É intuitivo que massa não pode ser criada nem destruída; se a vazão em massa para dentro de um volume de controle excede aquela que sai, a massa acumular-se-á dentro do VC.

Lembre-se que a conservação de massa declara, simplesmente, que a massa em um sistema é constante,

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = 0 \tag{4.1a}$$

onde

$$M_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \rho \, d\forall \tag{4.1b}$$

As formulações de sistema e de volume de controle são relacionadas pela Eq. 4.11,

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta \rho \, d\forall + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.11}$$

onde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \eta \, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \eta \rho \, d\forall \tag{4.6}$$

Para deduzir a formulação de volume de controle da conservação de massa, estabelecemos

$$N = M \qquad \text{e} \qquad \eta = 1$$

Com esta substituição, obtemos

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \rho \, d\forall + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.12}$$

Comparando as Eqs. 4.1a e 4.12, chegamos à formulação de volume de controle da conservação de massa:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \rho \, d\forall + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Na Eq. 4.13, o primeiro termo representa a taxa de variação de massa dentro do volume de controle; o segundo termo representa a taxa de fluxo de massa ou vazão em massa através da superfície de controle. A conservação de massa exige que a soma da taxa de variação de massa dentro do volume de controle com a taxa líquida de fluxo de massa através da superfície de controle seja nula.

Enfatizamos que a velocidade, $\vec{V}$, na Eq. 4.13, é medida em relação à superfície de controle. Além disso, o produto $\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ é escalar. O sinal depende do sentido do vetor velocidade, $\vec{V}$, em relação ao vetor área, $d\vec{A}$. Referindo-nos novamente à dedução da Eq. 4.11, vemos que o produto escalar, $\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$, é positivo quando o fluxo é para fora através da superfície de controle, negativo quando o fluxo é para dentro e nulo quando é tangente à superfície de controle.

[1]A Eq. 4.11 foi deduzida para um volume de controle fixo no espaço relativamente às coordenadas *xyz*. Para o caso de um volume de controle *deformável*, cuja forma varia com o tempo, a Eq. 4.11 pode ser aplicada, desde que a velocidade, $\vec{V}$, na integral do fluxo, seja medida em relação à superfície de controle local através da qual o fluxo ocorre.

4.3.1 Casos Especiais

Em casos especiais é possível simplificar a Eq. 4.13. Considere, em primeiro lugar, o caso do escoamento incompressível no qual a massa específica permanece constante. Quando ρ é uma constante, não é função do espaço nem do tempo. Conseqüentemente, para escoamento incompressível, a Eq. 4.13 pode ser escrita como

$$0 = \rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} d\forall + \rho \int_{\text{SC}} \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.14a}$$

A integral de $d\forall$ em todo o volume de controle é simplesmente o volume do volume de controle. Assim, dividindo por ρ, escrevemos a Eq. 4.14a como

$$0 = \frac{\partial \forall}{\partial t} + \int_{\text{SC}} \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.14b}$$

Para um volume de controle não deformável, isto é, um volume de controle de forma e tamanho fixos, $\forall$ = constante. A conservação de massa para escoamento incompressível através de um volume de controle fixo torna-se,

$$0 = \int_{\text{SC}} \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.14c}$$

Note que não fizemos a suposição de o escoamento ser permanente ao reduzirmos a Eq. 4.13 à forma 4.14c. Impusemos, apenas, a restrição de escoamento incompressível. Assim, a Eq. 4.14c é uma expressão da conservação de massa para um escoamento incompressível que pode ser permanente ou transiente.

As dimensões do integrando na Eq. 4.14c são L^3/t. A integral $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ sobre uma seção da superfície de controle é comumente chamada de *taxa de fluxo de volume* ou *vazão em volume*. Assim, para escoamento incompressível, a vazão em volume para dentro de um volume de controle deve ser igual à vazão em volume para fora do volume de controle. A vazão em volume, Q, através de uma seção de uma superfície de controle de área A, é dada por

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.15a}$$

A magnitude da velocidade média, $\bar{V}$, em uma seção é definida por

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A}\int_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.15b}$$

Considere agora o caso geral de escoamento permanente compressível. Uma vez que o escoamento é permanente, significa que, no máximo, $\rho = \rho(x, y, z)$. Por definição, nenhuma das propriedades do fluido varia com o tempo num escoamento permanente. Conseqüentemente, o primeiro termo da Eq. 4.13 deve ser zero e, assim, para escoamento permanente, o enunciado da conservação de massa reduz-se a

$$0 = \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.16}$$

Então, para escoamento permanente, a vazão em massa para dentro do volume de controle deve ser igual à vazão em massa para fora do volume de controle.

Como ressaltamos em nossa discussão anterior sobre campos de velocidade na Seção 2.2, a idealização de escoamento unifor-

me em uma seção fornece, freqüentemente, um modelo matemático adequado do escoamento. Escoamento uniforme numa seção implica velocidade constante através de toda a área da seção. Quando a massa específica também é constante numa seção, a integral da vazão em massa na Eq. 4.13 pode ser substituída por um produto. Então, quando se supõe escoamento uniforme numa seção n,

$$\int_{A_n} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho_n \vec{V}_n \cdot \vec{A}_n$$

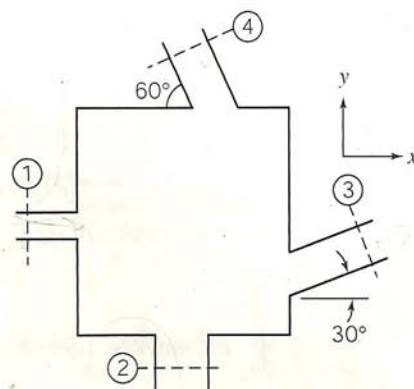
ou usando grandezas escalares

$$\int_{A_n} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \pm |\rho_n V_n A_n \cos \alpha|$$

Note de novo que quando $\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ é negativo, a massa escoa para dentro através da superfície de controle. A massa escoa para fora em regiões onde $\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ é positivo. Esse fato fornece uma verificação rápida dos sinais dos diversos termos de fluxo numa análise.

A escolha mais simples da superfície de controle é aquela normal ao vetor velocidade de forma que $\cos \alpha = \pm 1$.

EXEMPLO 4.1 — Fluxo de Massa através de Dispositivo com Múltiplas Aberturas

Considere o escoamento permanente de água através do dispositivo mostrado no diagrama. As áreas são: $A_1 = 0{,}2$ pé², $A_2 = 0{,}5$ pé² e $A_3 = A_4 = 0{,}4$ pé². A vazão em massa através da seção ③ é dada como 3,88 slug/s. A vazão em volume entrando pela seção ④ é de 1 pé³/s, e $\vec{V}_1 = 10\hat{i}$ pés/s. Determine a velocidade do escoamento na seção ②.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.1

DADO: Escoamento permanente de água através do dispositivo.

$A_1 = 0{,}2$ pé² $\qquad A_2 = 0{,}5$ pé²

$A_3 = A_4 = 0{,}4$ pé² $\qquad \rho = 1{,}94$ slug/pé³

$\dot{m}_3 = 3{,}88$ slug/s (fluxo para fora)

$\vec{V}_1 = 10\hat{i}$ pés/s

Vazão em volume entrando em ④ = 1,0 pé³/s

DETERMINAR: A velocidade na seção ②.

SOLUÇÃO:

Vamos escolher um volume de controle fixo. Duas possibilidades são mostradas pelas linhas tracejadas.

Equação básica: $0 = \dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$

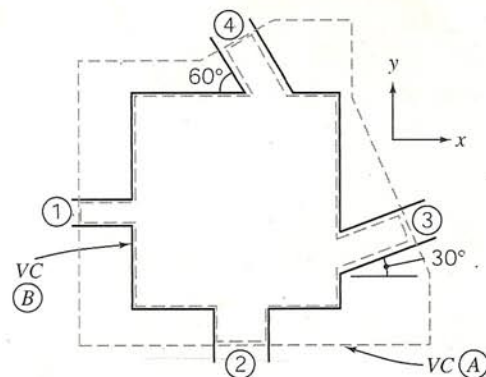
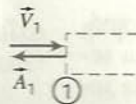
Considerações: (1) Escoamento permanente (dado)
(2) Escoamento incompressível
(3) Propriedades uniformes em cada seção onde o fluido cruza as fronteiras do VC.

Para escoamento permanente, o primeiro termo é zero por definição, logo,

$$0 = \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

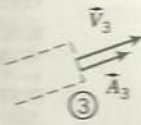
Observando ambos os volumes de controle, verificamos que há quatro seções onde a massa flui através da superfície de controle. Então, escrevemos

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_3} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_4} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{1}$$

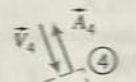
Olhemos de novo para estas integrais, uma de cada vez, com as considerações de propriedades uniformes em cada área e ρ = constante.

$$\int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\int_{A_1} |\rho V\, dA| = -|\rho V_1 A_1|$$

{O sinal de $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ é negativo na superfície ①.}

{Com as indicações de módulo e sinal, os sentidos de $\vec{V}$ e $d\vec{A}$ de são levados em conta no produto escalar.}

Uma vez que não conhecemos o sentido de , deixaremos a seção ② de lado por um instante.

$$\int_{A_3} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_3} |\rho V\, dA| = |\rho V_3 A_3| = \dot{m}_3$$

{O sinal de $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ é positivo na superfície ③, visto que o fluxo é para fora.}

$$\int_{A_4} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\int_{A_4} |\rho V\, dA| = -|\rho V_4 A_4|$$

$$= -\rho |V_4 A_4| = -\rho |Q_4|$$

{O sinal de $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ é negativo na superfície ④.}

onde Q é a vazão em volume.

Da Eq. 1 temos,

$$\int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{A_3} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{A_4} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

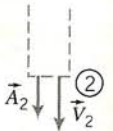
$$= +|\rho V_1 A_1| - \dot{m}_3 + \rho |Q_4|$$

$$= \left| 1{,}94 \frac{\text{slug}}{\text{pé}^3} \times \frac{10\,\text{pés}}{\text{s}} \times 0{,}2\,\text{pé}^2 \right| - 3{,}88 \frac{\text{slug}}{\text{s}} + 1{,}94 \frac{\text{slug}}{\text{pé}^3} \left| 1{,}0 \frac{\text{pé}^3}{\text{s}} \right|$$

$$\int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 1{,}94 \text{ slug/s}$$

Uma vez que o resultado é positivo, $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ na seção ② é positivo. O fluxo é para fora, conforme mostrado no esquema:

$$\int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_2} |\rho V\, dA| = |\rho V_2 A_2| = 1{,}94 \text{ slug/s}$$

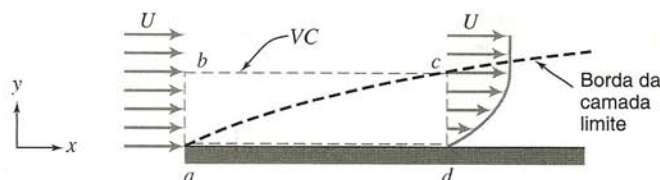
$$|V_2| = \frac{1{,}94 \text{ slug/s}}{\rho A_2} = 1{,}94 \frac{\text{slug}}{\text{s}} \times \frac{\text{pé}^3}{1{,}94\,\text{slug}} \times \frac{1}{0{,}5\,\text{pé}^2} = 2\,\text{pés/s}$$

Uma vez que V_2 é no sentido de y negativo, segue-se que

$$\vec{V}_2 = -2\hat{j} \text{ pés/s}$$

{Este problema ilustra o procedimento recomendado na avaliação de $\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$.}

EXEMPLO 4.2 — Vazão em Massa em Camada Limite

O fluido em contato direto com uma fronteira sólida estacionária tem velocidade zero; não há deslizamento na fronteira. Então, o escoamento sobre uma placa plana adere à superfície da placa e forma uma camada limite, como mostrado abaixo. O escoamento à montante da placa é uniforme com velocidade $\vec{V} = U\hat{i}$; $U = 30$ m/s. A distribuição de velocidade dentro da camada limite ($0 \leq y \leq \delta$) ao longo de cd é aproximado por $u/U = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$.

A espessura da camada limite na posição d é $\delta = 5$ mm. O fluido é o ar com massa específica $\rho = 1{,}24$ kg/m³. Supondo que a largura da placa perpendicular ao papel seja $w = 0{,}6$ m, calcule a vazão em massa através da superfície bc do volume de controle $abcd$.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.2

DADOS: Escoamento permanente, incompressível, sobre uma placa plana, $\rho = 1{,}24$ kg/m³.
Largura da placa, $w = 0{,}6$ m.
Velocidade uniforme à montante da placa: $\vec{V} = U\hat{i}$, $U = 30$ m/s.
Em $x = x_d$:

$\delta = 5 \text{ mm}$

$\dfrac{u}{U} = 2\left(\dfrac{y}{\delta}\right) - \left(\dfrac{y}{\delta}\right)^2$

DETERMINAR: A vazão em massa através da superfície *bc*.

SOLUÇÃO:

O volume de controle fixo é selecionado, conforme mostrado pelas linhas tracejadas.

Equação básica: $0 = \dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{\text{VC}} \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$

Considerações: (1) Escoamento permanente (dado)
(2) Escoamento incompressível (dado)
(3) Escoamento bidimensional; as propriedades são independentes de z

Para escoamento permanente,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \rho\, d\forall = 0 \text{ e então } \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

(nenhum escoamento através de *da*)

Admitindo que não exista escoamento na direção z, tem-se

$$0 = \int_{A_{ab}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{bc}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{cd}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{da}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\therefore \dot{m}_{bc} = \int_{A_{bc}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\int_{A_{ab}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{A_{cd}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (1)$$

{Precisamos avaliar as integrais no lado direito da equação.}

Para profundidade w na direção z, obtemos

$$\int_{A_{ab}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\int_{A_{ab}} |\rho u\, dA| = -\int_{y_a}^{y_b} |\rho u w\, dy|$$

$$= -\int_0^{\delta} |\rho u w\, dy| = -\left|\int_0^{\delta} \rho U w\, dy\right|$$

$\left\{\begin{matrix}\vec{V}.d\vec{A} \text{ é negativo} \\ dA = wdy\end{matrix}\right\}$

$\{u = U \text{ sobre a área } ab\}$

$$\int_{A_{ab}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -|[\rho U w y]_0^{\delta}| = -\rho U w \delta$$

$$\int_{A_{cd}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_{cd}} |\rho u\, dA| = \int_{y_d}^{y_c} |\rho u w\, dy|$$

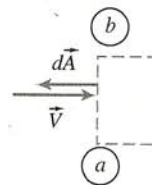
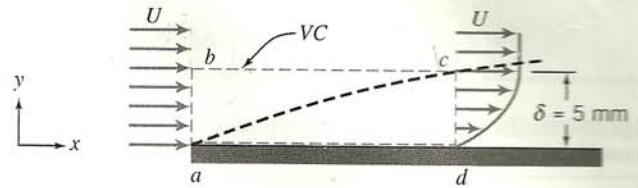
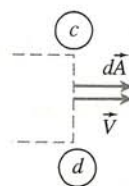
$$= \int_0^{\delta} |\rho u w\, dy| = \int_0^{\delta} \left|\rho w U \left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] dy\right|$$

$\left\{\begin{matrix}\vec{V} \cdot d\vec{A} \text{ é positivo} \\ dA = wdy\end{matrix}\right\}$

$$\int_{A_{cd}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left|\rho w U \left[\frac{y^2}{\delta} - \frac{y^3}{3\delta^2}\right]_0^{\delta}\right| = \left|\rho w U \delta \left[1 - \frac{1}{3}\right]\right| = \frac{2\rho U w \delta}{3}$$

Substituindo na Eq. 1, obtemos

$$\therefore \dot{m}_{bc} = \rho U w \delta - \frac{2\rho U w \delta}{3} = \frac{\rho U w \delta}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \times 1{,}24\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}6\text{ m} \times 5\text{ mm} \times \frac{\text{m}}{1000\text{ mm}}$$

$$\dot{m}_{bc} = 0{,}0372 \text{ kg/s} \qquad \leftarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Sinal positivo indica fluxo para fora} \\ \text{através da superfície } bc.\end{array}\right\} \qquad \dot{m}_{bc}$$

{Este problema ilustra a aplicação da formulação de volume de controle da conservação de massa para o caso de escoamento não uniforme em uma seção.}

EXEMPLO 4.3 — Variação de Massa Específica em Tanque de Ventilação

Um tanque de 0,05 m³ contém ar a 800 kPa (absolutos) e 15°C. Em $t = 0$, o ar escapa do tanque através de uma válvula com área de escoamento de 65 mm². O ar que passa pela válvula tem uma velocidade de 311 m/s e uma massa específica de 6,13 kg/m³. As propriedades no resto do tanque podem ser consideradas uniformes a cada instante. Determine a taxa instantânea de variação da massa específica do ar no tanque, em $t = 0$.

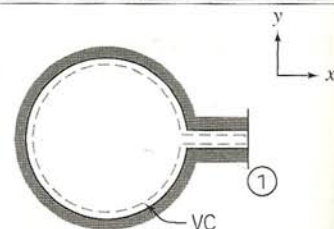
PROBLEMA-EXEMPLO 4.3

DADO: Um tanque de volume $\forall = 0{,}05$ m³ contendo ar a $p = 800$ kPa (absolutos), $T = 15$°C. Em $t = 0$, o ar escapa por uma válvula, saindo com uma velocidade $V = 311$ m/s e massa específica $\rho = 6{,}13$ kg/m³ através de uma área $A = 65$ mm².

DETERMINAR: A taxa de variação da massa específica do ar no tanque em $t = 0$.

SOLUÇÃO:
Vamos escolher um volume de controle fixo conforme mostrado pela linha tracejada.

Equação básica:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) As propriedades no tanque são uniformes, porém dependentes do tempo
(2) Escoamento uniforme na seção ①

Uma vez que as propriedades são consideradas uniformes no tanque em qualquer instante, podemos tirar ρ para fora da integral do primeiro termo,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_{\text{VC}} \int_{\text{VC}} d\forall\right] + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

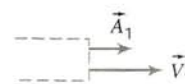
Como $\int_{\text{VC}} d\forall = \forall$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)_{\text{VC}} + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

O único lugar onde massa atravessa a fronteira do volume de controle é na superfície ①. Então,

$$\int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall) + \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Na superfície ① o sinal de $\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ é positivo, logo,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall) + \int_{A_1} |\rho V\, dA| = 0$$

Como o escoamento é considerado uniforme na superfície ①, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall) + |\rho_1 V_1 A_1| = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall) = -|\rho_1 V_1 A_1|$$

Uma vez que o volume, $\forall$, do tanque não é uma função do tempo,

$$\forall \frac{\partial \rho}{\partial t} = -|\rho_1 V_1 A_1|$$

e

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{|\rho_1 V_1 A_1|}{\forall}$$

Em $t = 0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -6{,}13\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 311\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 65\text{ mm}^2 \times \frac{1}{0{,}05\text{ m}^3} \times \frac{\text{m}^2}{10^6\text{ mm}^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -2{,}48\ (\text{kg/m}^3)/\text{s} \qquad \{\text{A massa específica está diminuindo.}\} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Este problema ilustra a aplicação do princípio de conservação de massa com formulação de volume de controle a um escoamento transiente.

4.4 A EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO PARA UM VOLUME DE CONTROLE INERCIAL

Desejamos desenvolver uma formulação matemática da segunda lei de Newton adequada para um volume de controle. Nesta seção, a nossa dedução ficará restrita a um volume de controle inercial, fixo no espaço em relação a um sistema de coordenadas *xyz* que não está se acelerando em relação a uma referência estacionária *XYZ*.

Na dedução da formulação de volume de controle da segunda lei de Newton, o procedimento é análogo ao procedimento seguido na dedução da formulação matemática para a conservação de massa aplicada a um volume de controle. Começamos com a formulação matemática para um sistema e, então, empregamos a Eq. 4.11 para passar à formulação para volume de controle.

Lembre-se que a segunda lei de Newton para um sistema que se move em relação a um sistema de coordenadas inerciais foi dada pela Eq. 4.2a como

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.2a}$$

onde a quantidade de movimento linear do sistema dada por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{V}\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{V} \rho\, d\forall \tag{4.2b}$$

e a força resultante, $\vec{F}$, inclui todas as forças de campo e de superfície atuando sobre o sistema,

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B$$

As formulações para sistema e volume de controle são relacionadas pela Eq. 4.11,

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.11}$$

Para obter a formulação para volume de controle da segunda lei de Newton, estabelecemos

$$N = \vec{P} \qquad \text{e} \qquad \eta = \vec{V}$$

Da Eq. 4.11, com essas substituições, obtemos

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V} \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.17}$$

Da Eq. 4.2a,

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \left.\vec{F}\right)_{\text{sobre o sistema}} \tag{4.2a}$$

Como, na dedução da Eq. 4.11, o sistema e o volume de controle coincidiam em t_0, segue-se que

$$\left.\vec{F}\right]_{\text{sobre o sistema}} = \left.\vec{F}\right]_{\text{sobre o volume de controle}}$$

À luz disso, as Eqs. 4.2a e 4.17 podem ser combinadas, fornecendo a formulação da segunda lei de Newton para um volume de controle não submetido à aceleração

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V} \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.18}$$

Essa equação estabelece que a soma de todas as forças (de superfície e de campo) atuando sobre um volume de controle não submetido à aceleração, é igual à soma da taxa de variação da quantidade de movimento no interior do volume de controle com a taxa líquida do fluxo de quantidade de movimento saindo da superfície de controle.

A dedução da equação da quantidade de movimento para um volume de controle foi simples. A aplicação dessa equação básica na solução de problemas não será difícil se você tomar certos cuidados no seu emprego.

Ao utilizar qualquer equação básica para uma análise de volume de controle, o primeiro passo deve ser desenhar as suas fronteiras e designar os sentidos apropriados do sistema de coordenadas. Na Eq. 4.18, a força, $\vec{F}$, representa todas as forças atuando sobre o volume de controle. Inclui tanto as de superfície quanto as de campo. Como no caso do diagrama de corpo livre da mecânica básica, todas as forças (e momentos) agindo sobre o volume de controle devem ser mostradas de forma tal que possam ser consideradas sistematicamente na aplicação das equações básicas. Se denotarmos por $\vec{B}$ as forças de campo, podemos escrever, para uma unidade de massa

$$\vec{F}_B = \int \vec{B}\, dm = \int_{\text{VC}} \vec{B} \rho\, d\forall$$

Quando a força da gravidade é a única força de campo atuante, então a força de campo por unidade de massa é $\vec{g}$. A força de superfície decorrente da pressão é dada por

$$\vec{F}_S = \int_A -p\, d\vec{A}$$

A natureza das forças que atuam sobre o volume de controle influenciará, sem dúvida, na escolha das suas fronteiras.

Todas as velocidades, $\vec{V}$, na Eq. 4.18, são medidas em relação ao volume de controle. O fluxo da quantidade de movimento, $\vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$, através de um elemento de área da superfície de controle, $d\vec{A}$, é um vetor. O sinal do produto escalar, $\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$, depende do sentido do vetor velocidade, $\vec{V}$, em relação ao vetor área, $d\vec{A}$. Os sinais dos componentes da velocidade, $\vec{V}$, dependem do sistema de coordenadas escolhido.

A equação da quantidade de movimento é vetorial. Como todas as equações vetoriais, pode ser escrita na forma de três equações componentes escalares. As componentes escalares da Eq. 4.18, em relação a um sistema de coordenadas *xyz*, são

$$F_x = F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} u \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

$$F_y = F_{S_y} + F_{B_y} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} v\rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.19b)$$

$$F_z = F_{S_z} + F_{B_z} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} w\rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} w\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.19c)$$

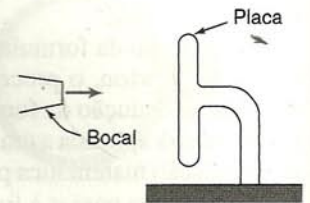
Para usar as equações escalares, é necessário, de início, escolher um sistema de coordenadas. Os sentidos positivos das componentes da velocidade, u, v e w, e as componentes das forças, F_x, F_y e F_z, são então estabelecidos em relação ao sistema de coordenadas selecionado. Como assinalamos anteriormente, o sinal do produto escalar, $\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$, depende do sentido do vetor velocidade, $\vec{V}$, em relação ao do vetor área, $d\vec{A}$. Dessa forma, o termo de fluxo da Eq. 4.18 ou Eqs. 4.19 é um produto de duas quantidades que têm, ambas, sinais algébricos. Sugerimos que você proceda em duas etapas para determinar o fluxo da quantidade de movimento através de uma porção qualquer de uma superfície de controle.

1. A primeira etapa é determinar o sinal de $\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$,

$$\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \rho|V\,dA|\cos\alpha = \pm|\rho V\,dA\cos\alpha|$$

2. A segunda etapa é determinar o sinal de cada componente da velocidade, u, v e w. O sinal, que depende da escolha do sistema de coordenadas, deve ser considerado quando se substituir os valores numéricos nos termos $u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = u\{\pm|\rho V\,dA\cos\alpha|\}$, e assim por diante.

EXEMPLO 4.4 — Escolha de Volume de Controle para Análise de Quantidade de Movimento

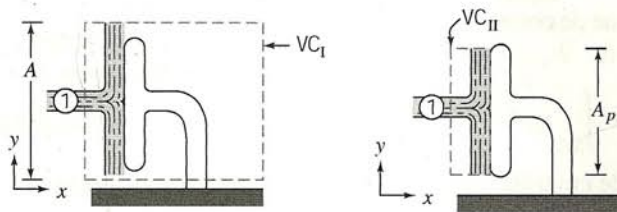
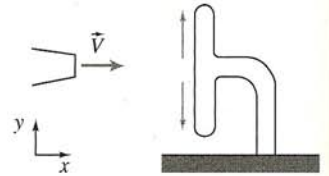
A água que sai de um bocal estacionário atinge uma placa plana, conforme mostrado. A água deixa o bocal a 15 m/s; a área do bocal é 0,01 m². Supondo que a água é dirigida normal à placa, e que flui ao longo desta, determine a força horizontal sobre o suporte.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.4

DADO: Água de um bocal estacionário é dirigida normalmente contra uma placa plana; o escoamento subseqüente é paralelo à placa.

Velocidade do jato, $\vec{V} = 15\hat{i}$ m/s
Área do bocal, $A_n = 0{,}01$ m²

DETERMINAR: A força horizontal sobre o suporte.

SOLUÇÃO:

Escolhemos um sistema de coordenadas ao definir o problema acima. Devemos agora escolher um volume de controle adequado. Duas escolhas possíveis são mostradas pelas linhas tracejadas abaixo.

Em ambos os casos, a água proveniente do bocal cruza a superfície de controle através da área A_1 (admitida igual à área do bocal), e considera-se que ela deixa o volume de controle tangencialmente à superfície da placa no sentido $+y$ ou $-y$. Antes de tentarmos decidir sobre qual o "melhor" volume de controle, escrevamos as equações básicas.

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}\rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento uniforme em cada seção onde o fluido cruza as fronteiras do VC

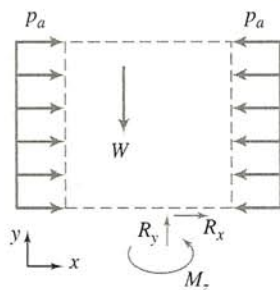
A despeito da nossa escolha do volume de controle, o escoamento é permanente e as equações básicas tornam-se

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \int_{\text{SC}} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \text{e} \qquad \int_{\text{SC}} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

A avaliação do fluxo da quantidade de movimento conduzirá ao mesmo resultado para ambos os volumes de controle. Devemos escolher o volume de controle que permite a avaliação mais direta das forças.

Lembre-se, ao aplicar a equação da quantidade de movimento, que a força, $\vec{F}$, representa todas as forças atuando *sobre* o volume de controle. Resolvamos o problema utilizando cada um dos volumes de controle.

VC_I

O volume de controle foi selecionado de modo que a área da superfície esquerda seja igual à área da superfície direita. Simbolizemos esta área por A.

O volume de controle corta o suporte. Denominemos as componentes da força de reação do suporte sobre o volume de controle por R_x e R_y, e admitamos que ambas são positivas. (A força do volume de controle sobre o suporte é igual e oposta a R_x e R_y.) M_z é o momento de reação (em relação ao eixo z) do suporte sobre o volume de controle.

A pressão atmosférica age sobre todas as superfícies do volume de controle. (A força distribuída devido à pressão atmosférica foi mostrada somente nas faces verticais.)

A força de campo no volume de controle é simbolizada por W.

Como procuramos a força horizontal, escrevemos a componente x da equação da quantidade de movimento para escoamento permanente

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Não há forças de campo na direção x, logo, $F_{B_x} = 0$, e

$$F_{S_x} = \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Para avaliar F_{S_x}, devemos incluir todas as forças de superfície atuando sobre o volume de controle

$$F_{S_x} = p_aA - p_aA + R_x$$

F_{S_x} =	p_aA	− p_aA	+ R_x
	força devida à pressão atmosférica; atua para a direita (sentido positivo) sobre a superfície esquerda	força devida à pressão atmosférica; atua para a esquerda (sentido negativo) sobre a superfície direita	força do suporte sobre o volume de controle (considerada positiva)

Conseqüentemente, $F_{S_x} = R_x$, e

$$R_x = \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$ {Para massa cruzando as superfícies superior e inferior, $u = 0$}

$$= \int_{A_1} u\{-|\rho V_1\, dA|\}$$ {Em ①, $\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -|\rho V_1 dA|$ visto que os sentidos de $\vec{V}_1$ e de $d\vec{A}_1$ formam 180°.}

$$= -u_1|\rho V_1 A_1|$$ {propriedades uniformes em A_1}

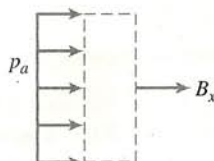
$$= -15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\left|\,999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\times 0{,}01\,\text{m}^2\,\right|\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$ $\{u_1 = 15\text{ m/s}\}$

$$R_x = -2{,}25\text{ kN}$$ {R_x atua no sentido oposto ao considerado.}

A força horizontal sobre o suporte é

$$K_x = -R_x = 2{,}25\text{ kN}$$ {a força sobre o suporte atua para a direita} K_x

VC_{II} com as Forças Horizontais Mostradas

O volume de controle foi selecionado de modo que as áreas das superfícies esquerda e direita sejam iguais à área da placa. Simbolizemos esta área por A_p.

O volume de controle está em contato com a placa sobre toda a superfície da mesma. Simbolizemos a força de reação horizontal da placa sobre o volume de controle por B_x (considerada positiva).

A pressão atmosférica age sobre a superfície esquerda do volume de controle (e sobre as duas superfícies horizontais).

A força de campo sobre o volume de controle não tem componente na direção x.

Desse modo, a componente x da equação da quantidade de movimento,

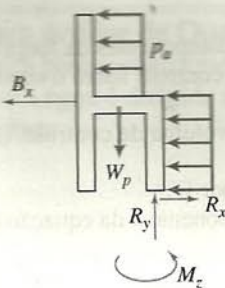
$$F_{S_x} = \int_{SC} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

resulta em

$$F_{S_x} = p_a A_p + B_x = \int_{A_1} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u\{-|\rho V_1 dA|\} = -2{,}25 \text{ kN}$$

Então,

$$B_x = -p_a A_p - 2{,}25 \text{ kN}$$

Para determinar a força líquida sobre a placa, precisamos de um diagrama de corpo livre da placa:

$$\sum F_x = 0 = -B_x - p_a A_p + R_x$$

$$R_x = p_a A_p + B_x$$

$$R_x = p_a A_p + (-p_a A_p - 2{,}25 \text{ kN}) = -2{,}25 \text{ kN}$$

Portanto, a força horizontal sobre o suporte é $K_x = -R_x = 2{,}25$ kN.

Note que a escolha de VC_{II} resultou na necessidade de um novo diagrama de corpo livre. Em geral é vantajoso selecionar o volume de controle de forma que a força aja explicitamente sobre o volume de controle.

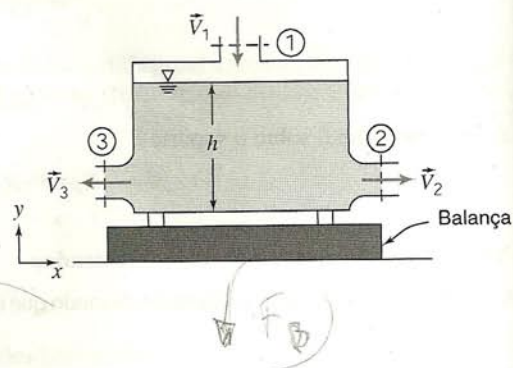
{ Este problema ilustra a aplicação da equação da quantidade de movimento a um volume de controle inercial, com ênfase na escolha adequada do volume de controle. }

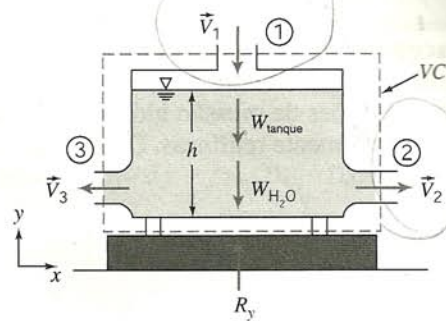
Exemplo 4.5 — Tanque sobre Balança: Força de Campo

Um recipiente de metal com 2 pés de altura e seção reta interna de 1 pé², pesa 5 lbf quando vazio. O recipiente é colocado sobre uma balança e água é escoada para o seu interior através de uma abertura no topo e para fora através de duas aberturas iguais nas laterais, conforme mostrado no diagrama. Sob condições de escoamento permanente, a altura da água no tanque é $h = 1{,}9$ pé. Determine a leitura da balança.

$$A_1 = 0{,}1 \text{ pé}^2$$

$$\vec{V}_1 = -5\hat{j} \text{ pé/s}$$

$$A_2 = A_3 = 0{,}1 \text{ pé}^2$$

PROBLEMA-EXEMPLO 4.5

DADO: Recipiente metálico com altura de 2 pés e seção reta $A = 1$ pé², pesando 5 lbf quando vazio. O recipiente repousa sobre uma balança. Sob condições de escoamento permanente, a profundidade da água é $h = 1{,}9$ pé. A água entra verticalmente na seção ① e sai horizontalmente através das seções ② e ③.

DETERMINAR: A leitura da balança.

SOLUÇÃO:

Vamos escolher um volume de controle como mostrado; R_y é a força da balança sobre o volume de controle (exercida pelos suportes sobre o volume de controle) e é admitida como positiva.

O peso do tanque é designado por W_{tanque}; o peso da água no tanque é W_{H_2O}.

A pressão atmosférica age uniformemente sobre todas as superfícies do volume de controle. (Essa força de pressão não foi mostrada no volume de controle.) Não existe força líquida sobre o volume de controle devido a pressão atmosférica.

Equações básicas:

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B = \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho\, d\forall} + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$0 = \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall} + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

{Na solução de problemas, é nossa prática geral começar com as equações básicas, simplificando com base nas informações dadas ou em considerações apropriadas e prosseguindo para obter uma expressão algébrica antes de substituir os valores numéricos. Quando os termos são simplificados, nós indicamos a base para a simplificação entre parênteses. No presente caso, cada um dos dois termos nulos vêm diretamente da condição de regime permanente.}

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento uniforme em cada seção onde o fluido cruza as fronteiras do VC

Escrevamos a componente y da equação da quantidade de movimento

$$F_{S_y} + F_{B_y} = \int_{SC} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{1}$$

$F_{S_y} = R_y$ {Não há força líquida devida à pressão atmosférica.}

$F_{B_y} = -W_{\text{tanque}} - W_{H_2O}$ {Ambas as forças de campo atuam na direção negativa de y.}

$$W_{H_2O} = \rho g\forall = \gamma A h$$

$$\int_{SC} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} v\{-|\rho_1 V_1 dA|\}$$

{$\vec{V}\cdot d\vec{A}$ é negativo em ①. $v = 0$ nas seções ② e ③.}

$$= -v_1|\rho_1 V_1 A_1|$$

{Estamos admitindo propriedades uniformes em ①.}

Substituindo na Eq. 1, resulta

$$R_y - W_{\text{tanque}} - \gamma A h = -v_1|\rho_1 V_1 A_1|$$

ou

$$R_y = W_{\text{tanque}} + \gamma A h - v_1|\rho_1 V_1 A_1|$$

Introduzindo os valores numéricos com $v_1 = -5$ pés/s, temos

$$R_y = 5\ \text{lbf} + 62{,}4\ \frac{\text{lbf}}{\text{pé}^3} \times 1\ \text{pé}^2 \times 1{,}9\ \text{pé} - \left(\frac{-5\ \text{pés}}{\text{s}}\right)\left| 1{,}94\ \frac{\text{slug}}{\text{pé}^3}\left(-5\ \frac{\text{pés}}{\text{s}}\right) 0{,}1\ \text{pé}^2 \right| \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{pé}}$$

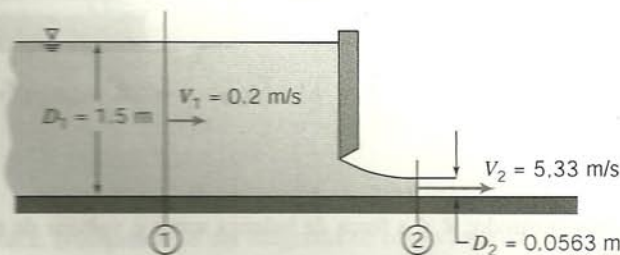
$R_y = 128$ lbf {A força da balança sobre o VC é para cima.}

A força do volume de controle sobre a balança é $K_y = -R_y = -128$ lbf.

O sinal de menos indica que a força sobre a balança é para baixo no nosso sistema de coordenadas. Por conseguinte, a leitura da balança é 128 lbf.

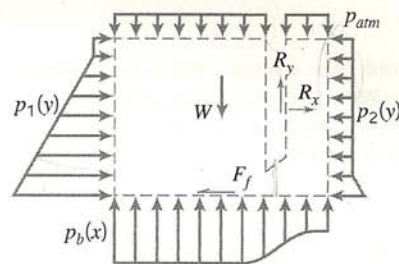
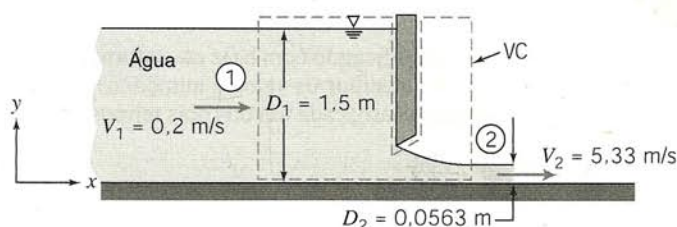
{Este problema ilustra a aplicação da equação da quantidade de movimento a um volume de controle inercial com a inclusão de forças de campo.}

EXEMPLO 4.6 — Escoamento sob uma Comporta: Força da Pressão Hidrostática

Água em um canal aberto escoa sob uma comporta, conforme mostrado no diagrama. O escoamento é incompressível e uniforme nas seções ① e ②. Distribuições de pressão hidrostática podem ser admitidas nas seções ① e ② porque as linhas de corrente do escoamento são, ali, essencialmente retilíneas. Determine a magnitude e o sentido da força exercida pelo escoamento sobre a comporta, por unidade de largura.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.6

DADOS: Escoamento sob uma comporta. Largura = w.

DETERMINAR: A força horizontal exercida (por unidade de largura) sobre a comporta.

SOLUÇÃO:
Vamos escolher o VC e o sistema de coordenadas mostrados para a análise.

As forças agindo sobre o VC incluem

- Força da gravidade W
- Força de atrito F_f
- Componentes R_x e R_y da força de reação da comporta
- Pressão atmosférica uniforme p_a em toda a superfície
- Distribuição de pressão hidrostática nas superfícies verticais (consideração 6)
- Distribuição de pressão $p_b(x)$ ao longo da superfície horizontal inferior

Apliquemos a componente x da equação da quantidade de movimento.

Equação básica:

$$F_{S_x} + \underbrace{F_{B_x}}_{=0(2)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} u\rho\, d\forall}_{=0(3)} + \int_{\text{SC}} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) F_f desprezível (despreze o atrito no fundo do canal)
(2) $F_{B_x} = 0$
(3) Escoamento permanente
(4) Escoamento incompressível (dado)
(5) Escoamento uniforme em cada seção (dado)
(6) Distribuições de pressão hidrostática em ① e ② (dado)

Então,

$$F_{S_x} = u_1\{-|\rho V_1 w D_1|\} + u_2\{|\rho V_2 w D_2|\}$$

As forças de superfície atuando sobre o VC devem-se à pressão e à força desconhecida, R_x. Da consideração (6),

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \qquad p = p_0 + \rho g(y_0 - y) = p_{\text{atm}} + \rho g(D - y)$$

Avaliando F_{S_x}, temos

$$F_{S_x} = \int_0^{D_1} p_1\,dA_1 - \int_0^{D_2} p_2\,dA_2 - p_{\text{atm}}(D_1 - D_2)w + R_x$$

$$= \int_0^{D_1} [p_{\text{atm}} + \rho g(D_1 - y)]w\,dy - \int_0^{D_2} [p_{\text{atm}} + \rho g(D_2 - y)]w\,dy - p_{\text{atm}}(D_1 - D_2)w + R_x$$

$$F_{S_x} = \cancel{p_{\text{atm}}D_1 w} + \frac{\rho g D_1^2}{2}w - \cancel{p_{\text{atm}}D_2 w} - \frac{\rho g D_2^2}{2}w - \cancel{p_{\text{atm}}D_1 w} + \cancel{p_{\text{atm}}D_2 w} + R_x$$

ou

$$F_{S_x} = R_x + \frac{\rho g w}{2}(D_1^2 - D_2^2)$$

Substituindo na equação da quantidade de movimento, com $u_1 = V_1$ e $u_2 = V_2$, obtemos

$$R_x + \frac{\rho g w}{2}(D_1^2 - D_2^2) = -V_1|\rho V_1 w D_1| + V_2|\rho V_2 w D_2|$$

ou

$$R_x = \rho w(V_2^2 D_2 - V_1^2 D_1) - \frac{\rho g w}{2}(D_1^2 - D_2^2)$$

e

$$\frac{R_x}{w} = \rho(V_2^2 D_2 - V_1^2 D_1) - \frac{\rho g}{2}(D_1^2 - D_2^2)$$

$$= 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left[(5{,}33)^2(0{,}0563 - (0{,}2)^2(1{,}5)\right]\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\text{m} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$-\frac{1}{2} \times 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left[(1{,}5)^2 - (0{,}0563)^2\right]\text{m}^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

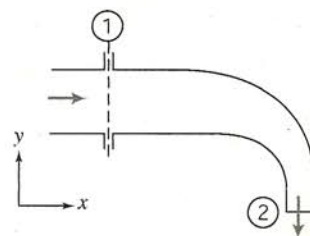
$$\frac{R_x}{w} = -9{,}47\ \text{kN/m}$$

R_x é a força externa desconhecida atuando *sobre* o volume de controle. É aplicada ao volume de controle pela comporta. Portanto, a força de todos os fluidos sobre a comporta é K_x, onde $K_x = -R_x$. Então,

$$\frac{K_x}{w} = -\frac{R_x}{w} = 9{,}47\ \text{kN/m} \qquad \{\text{aplicada para a direita}\} \qquad \xleftarrow{\hspace{3em}} \frac{K_x}{w}$$

{Este problema ilustra a aplicação da equação da quantidade de movimento a um volume de controle no qual a pressão não é uniforme sobre toda a superfície de controle.}

EXEMPLO 4.7 — Escoamento através de um Cotovelo de 90°: Uso de Pressão Manométrica

Água escoa em regime permanente através do cotovelo redutor de 90° mostrado no diagrama. Na entrada do cotovelo, a pressão absoluta é 221 kPa e a área da seção transversal é 0,01 m². Na saída, a área da seção transversal é 0,0025 m² e a velocidade média é 16 m/s. O cotovelo descarrega para a atmosfera. Determine a força necessária para manter o cotovelo no lugar.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.7

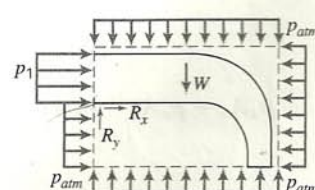
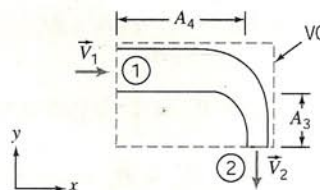
DADO: Escoamento permanente de água através de um cotovelo redutor de 90°.

$$p_1 = 221\ \text{kPa (abs)} \qquad A_1 = 0{,}01\ \text{m}^2 \qquad \vec{V}_2 = -16\hat{j}\ \text{m/s} \qquad A_2 = 0{,}0025\ \text{m}^2$$

DETERMINAR: A força requerida para manter o cotovelo no lugar.

SOLUÇÃO:

Escolhamos um volume de controle como o mostrado pela linha tracejada.

A_3 é a área dos lados verticais do VC excluindo A_1; $A_{\text{lados verticais}} = A_1 + A_3$.
A_4 é a área dos lados verticais do VC excluindo A_2; $A_{\text{lados horizontais}} = A_2 + A_4$.

As forças agindo sobre o volume de controle são aquelas devido a

- Pressão p_1 agindo na área A_1.
- Pressão atmosférica agindo sobre o restante da superfície de controle.
- Componentes das forças de reação R_x e R_y da base de sustentação agindo no volume de controle. (Essas componentes de força, requeridas para segurar o cotovelo no lugar, são supostas positivas.)

Note que desde que o cotovelo esteja fixo no tubo de suprimento, existirá também um momento de reação da base de sustentação agindo sobre o volume de controle.

Equações básicas:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \overset{=0(4)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho\, d\forall} + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$0 = \overset{=0(4)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall} + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) Escoamento uniforme em cada seção
(2) Pressão atmosférica, $p_a = 101$ kPa (absoluta)
(3) Escoamento incompressível
(4) Escoamento permanente (dado)
(5) Desprezar o peso do cotovelo e da água contida no mesmo

Escrevendo a componente x da equação da quantidade de movimento resulta em

$$F_{S_x} = \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \{F_{B_x} = 0 \text{ e } u_2 = 0\}$$

$$p_1A_1 + p_aA_3 - p_a(A_1 + A_3) + R_x = \int_{A_1} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

{A pressão no lado direito é p_a. No lado esquerdo, é p_1 em A_1 e p_a em A_3.}

$$(p_1 - p_a)A_1 + R_x = \int_{A_1} u\{-|\rho V_1\, dA|\} \qquad \{\vec{V}\cdot d\vec{A} \text{ é negativo em } A_1.\}$$

$$R_x = -p_{1_g}A_1 - u_1|\rho V_1 A_1| \qquad \{p_1 - p_a = p_{1_{man}}.\}$$

Para determinar V_1, usamos a equação da continuidade:

$$\int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0 = \int_{A_1} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\therefore 0 = -\int_{A_1} |\rho V\, dA| + \int_{A_2} |\rho V\, dA| = -|\rho V_1 A_1| + |\rho V_2 A_2|$$

e

$$|V_1| = |V_2|\frac{A_2}{A_1} = 16\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{0{,}0025}{0{,}01} = 4 \text{ m/s} \qquad \therefore \vec{V}_1 = 4\hat{i} \text{ m/s}$$

$$R_x = -p_{1_g}A_1 - u_1|\rho V_1 A_1|$$

$$= -1{,}20\times 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 0{,}01\text{ m}^2 - 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\left|999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}01\text{ m}^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}\right|$$

$$R_x = -1{,}36 \text{ kN}$$

{R_x atua para a esquerda para segurar o cotovelo) R_x

Escrevendo a componente y da equação da quantidade de movimento, obtemos

$$F_{S_y} + F_{B_y} = \int_{SC} v\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_2} v\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \{v_1 = 0\}$$

$$p_aA_4 + p_aA_2 - p_aA_4 - p_aA_2 + F_{B_y} + R_y = \int_{A_2} v\{|\rho V\, dA|\}$$

$$F_{B_y} + R_y = v_2|\rho V_2 A_2|$$

{A pressão é p_a no topo e no fundo do VC. $\vec{V}\cdot d\vec{A}$ é positivo em ②.}

$$R_y = -F_{B_y} + v_2|\rho V_2 A_2|$$

{Uma vez que não conhecemos o volume ou a massa do cotovelo, não podemos avaliar F_{B_y}.}

Introduzindo valores numéricos, reconhecendo que $\vec{V}_2 = -16\hat{j}$ m/s e daí que $v_2 = -16$ m/s

$$R_y = -F_{B_y} + \left(-16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left|999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left(-16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)0{,}0025\ \text{m}^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}\right|$$

$$R_y = -F_{B_y} - 639\ \text{N}$$

Desprezando F_{B_y}, obtemos

$$R_y = -639\ \text{N}$$

{R_y atua para baixo para segurar o cotovelo} R_y

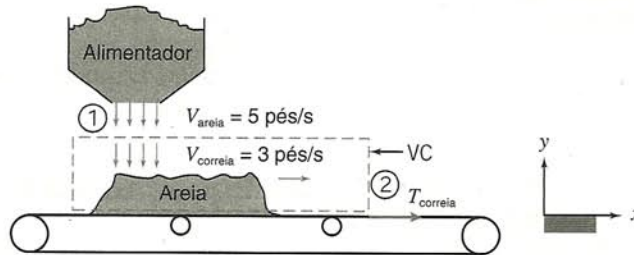
Este problema ilustra a aplicação da equação da quantidade de movimento a um volume de controle inercial no qual a pressão não é a atmosférica em toda a superfície de controle.

Uma vez que as forças de pressão sobre toda a superfície de controle devem ser incluídas na análise, o emprego de pressões manométricas em todas as superfícies fornece resultados corretos (e freqüentemente mais diretos).

EXEMPLO 4.8 — Enchimento de Correia Transportadora: Taxa de Variação da Quantidade de Movimento no Volume de Controle

Uma correia transportadora horizontal movendo-se a 3 pés/s recebe areia de um carregador. A areia cai verticalmente sobre a correia a uma velocidade de 5 pés/s e com vazão em massa de 500 lbm/s (a massa específica da areia é de aproximadamente 2.700 lbm/jarda cúbica). A correia transportadora está inicialmente vazia, mas começa a encher com areia. Se o atrito no sistema de acionamento e nos roletes for desprezível, determine a tração necessária para puxar a correia enquanto é carregada.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.8

DADO: Correia transportadora e carregador mostrados no esquema.

DETERMINAR: $T_{correia}$ no instante mostrado.

SOLUÇÃO:

Use o volume de controle e coordenadas mostrados. Aplique a componente x da equação da quantidade de movimento.

Equações básicas:

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(2)} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall + \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) $F_{S_x} = T_{correia} = T$
(2) $F_{B_x} = 0$
(3) Escoamento uniforme na seção ①
(4) Toda a areia na correia move-se com $V_{correia} = V_b$

Então,

$$T = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall + u_1\{-|\rho V_1 A_1|\} + u_2\{|\rho V_2 A_2|\}$$

Como $u_1 = 0$ e não existe fluxo na seção ②, então

$$T = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall$$

Da consideração (4), dentro do VC, $u = V_b$ = constante, e portanto

$$T = V_b \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathrm{VC}} \rho \, d\forall = V_b \frac{\partial M_s}{\partial t}$$

onde M_s é a massa de areia na correia (dentro do VC). A partir da equação da continuidade,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathrm{VC}} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} M_s = -\int_{\mathrm{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \dot{m}_s = 500 \text{ lbm/s}$$

Portanto,

$$T = V_b \dot{m}_s = \frac{3 \text{ pés}}{\text{s}} \times \frac{500 \text{ lbm}}{\text{s}} \times \frac{\text{slug}}{32{,}2 \text{ lbm}} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}}$$

$$T = 46{,}6 \text{ lbf}$$

Este problema ilustra uma aplicação da equação da quantidade de movimento a um problema no qual a taxa de variação da quantidade de movimento dentro do volume de controle não é igual a zero.

*4.4.1 Análise de Volume de Controle Diferencial

Consideramos diversos exemplos nos quais a conservação da massa e a equação da quantidade de movimento foram aplicadas a volumes de controle finitos. Contudo, o volume de controle escolhido não precisa ser de tamanho finito.

A aplicação das equações básicas a um volume de controle diferencial leva a equações diferenciais que descrevem o relacionamento entre as propriedades do campo de escoamento. Em alguns casos, a equação diferencial pode ser solucionada fornecendo-se informações detalhadas a respeito de variações de propriedades no campo de escoamento. Para o caso de um escoamento permanente, incompressível e sem atrito ao longo de uma linha de corrente, a integração de uma dessas equações diferenciais conduz uma relação útil entre a velocidade, a pressão e a elevação em um campo de escoamento. Esse caso é apresentado a fim de ilustrar o emprego de volumes de controle diferenciais.

Apliquemos as equações da continuidade e da quantidade de movimento a um escoamento permanente, incompressível e sem atrito, conforme mostrado na Fig. 4.4. O volume de controle escolhido é fixo no espaço e limitado pelas linhas de corrente do escoamento, sendo, portanto, um elemento de um tubo de corrente. O comprimento do volume de controle é ds.

Sendo o volume de controle limitado por linhas de corrente, escoamentos cruzando as superfícies limitadoras ocorrem somente nas seções das extremidades. Essas se localizam nas coordenadas s e $s + ds$, medidas ao longo da linha de corrente central.

Valores simbólicos arbitrários são atribuídos às propriedades na seção de entrada. Admite-se que na seção de saída as propriedades aumentam de uma quantidade diferencial. Então, em $s + ds$, a velocidade do escoamento é admitida como $V_s + dV_s$, e assim por diante. As variações diferenciais, dp, dV_s e dA, são todas consideradas positivas na formulação do problema. (Como numa análise de diagrama de corpo livre na estática ou dinâmica, o sinal algébrico real de cada variação diferencial será determinado pelos resultados da análise.)

Apliquemos, agora, a equação da continuidade e a componente s da equação da quantidade de movimento ao volume de controle da Fig. 4.4.

a. Equação da Continuidade

Equação básica:

$$0 = \cancelto{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{\mathrm{VC}} \rho \, d\forall + \int_{\mathrm{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

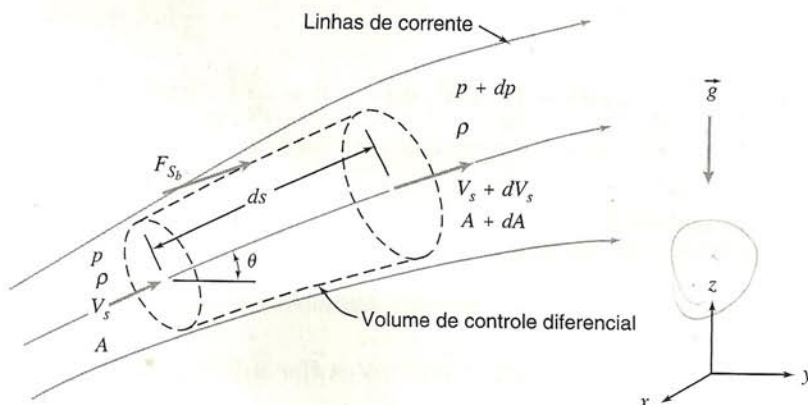



Fig. 4.4 Volume de controle diferencial para análise de quantidade de movimento no escoamento em um tubo de corrente.

*Esta seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Não há escoamento cruzando as linhas de corrente limitadoras
(3) Escoamento incompressível, ρ = constante

Então,

$$0 = \{-|\rho V_s A|\} + \{|\rho(V_s + dV_s)(A + dA)|\}$$

e

$$\rho V_s A = \rho(V_s + dV_s)(A + dA) \qquad (4.20a)$$

Expandindo o lado direito e simplificando, obtemos:

$$0 = V_s\, dA + A\, dV_s + dA\, dV_s$$

Porém, $dAdV_s$ é um produto de diferenciais que pode ser desprezado, comparado com $V_s dA$ ou AdV_s. Assim,

$$0 = V_s\, dA + A\, dV_s \qquad (4.20b)$$

b. Componente da Equação da Quantidade de Movimento na Direção da Linha de Corrente

Equação básica:

$$F_{S_s} + F_{B_s} = \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u_s \rho\, dV} + \int_{SC} u_s \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.21)$$

Consideração: (4) Não existe atrito, portanto, F_{S_s} é devida somente às forças de pressão.

A força de superfície (devida somente à pressão) terá três termos:

$$F_{S_s} = pA - (p + dp)(A + dA) + \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA \qquad (4.22a)$$

O primeiro e o segundo termos da Eq. 4.22a são as forças de pressão sobre as faces extremas da superfície de controle. O terceiro termo, F_{S_b}, é a força de pressão atuando na direção s sobre a superfície de corrente limitadora do volume de controle. A sua magnitude é o produto da pressão média agindo na superfície de corrente, $p + \frac{1}{2}dp$, pela componente da área da superfície de corrente na direção s, dA. A Eq. 4.22a é simplificada para

$$F_{S_s} = -A\, dp - \tfrac{1}{2} dp\, dA \qquad (4.22b)$$

A componente da força de campo na direção s é

$$F_{B_s} = \rho g_s\, dV = \rho(-g \operatorname{sen}\theta)\left(A + \frac{dA}{2}\right) ds$$

Mas sen $\theta\, ds = dz$, de modo que

$$F_{B_s} = -\rho g\left(A + \frac{dA}{2}\right) dz \qquad (4.22c)$$

O fluxo de momento será

$$\int_{SC} u_s \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = V_s\{-|\rho V_s A|\} + (V_s + dV_s)\{|\rho(V_s + dV_s)(A + dA)|\}$$

uma vez que não há fluxo de massa cruzando as superfícies de corrente limitadoras. Os termos entre chaves são iguais devido à continuidade, Eq. 4.20a, então

$$\int_{SC} u_s \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = V_s(-\rho V_s A) + (V_s + dV_s)(\rho V_s A)$$
$$= \rho V_s A\, dV_s \qquad (4.23)$$

Substituindo as equações 4.22b, 4.22c e 4.23 na equação de quantidade de movimento obtém-se

$$-A\, dp - \tfrac{1}{2} dp\, dA - \rho g A\, dz - \tfrac{1}{2}\rho g\, dA\, dz = \rho V_s A\, dV_s$$

Dividindo por ρA e percebendo que os produtos de diferenciais podem ser desprezados quando comparados com os termos restantes, obtemos

$$-\frac{dp}{\rho} - g\, dz = V_s\, dV_s = d\left(\frac{V_s^2}{2}\right)$$

ou

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V_s^2}{2}\right) + g\, dz = 0 \qquad (4.24)$$

Para escoamentos incompressíveis, essa equação pode ser integrada para obter

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + gz = \text{constante}$$

ou, retirando o subscrito s,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad (4.25)$$

Essa equação está sujeita às seguintes restrições:

1. Escoamento permanente
2. Ausência de atrito
3. Escoamento ao longo de uma linha de corrente
4. Escoamento incompressível

Aplicando a equação da quantidade de movimento a um volume de controle infinitesimal, na forma de um tubo de corrente para escoamento permanente, incompressível e sem atrito, deduzimos uma relação entre pressão, velocidade e elevação. Essa relação é muito poderosa e útil. Por exemplo, ela poderia ter sido empregada para avaliar a pressão na entrada do cotovelo redutor analisado no Problema-Exemplo 4.7 ou para determinar a velocidade da água saindo da comporta no Problema-Exemplo 4.6. Em ambas as situações, as restrições requeridas para a dedução da Eq. 4.25 são idealizações razoáveis do comportamento real do escoamento. As restrições devem ser fortemente destacadas porque nem sempre formam um modelo realista do comportamento do escoamento; em conseqüência, elas devem ser justificadas com cuidado cada vez que a Eq. 4.25 for aplicada.

A Eq. 4.25 é uma forma da equação de Bernoulli. Ela será deduzida novamente, em detalhe, no Cap. 6, uma vez que é ferramenta de grande utilidade na análise de escoamentos e, também, porque uma dedução alternativa fornecerá esclarecimentos adicionais quanto aos cuidados necessários para a sua aplicação.

EXEMPLO 4.9 — Escoamento num Bocal: Aplicação da Equação de Bernoulli

Água escoa em regime permanente através de um bocal horizontal que descarrega para a atmosfera. Na entrada, o bocal tem diâmetro D_1 e na saída, D_2. Deduza uma expressão para a pressão manométrica mínima necessária, na entrada do bocal, para produzir uma dada vazão volumétrica, Q. Avalie a pressão manométrica se $D_1 = 3{,}0$ pol., $D_2 = 1{,}0$ pol., se a vazão volumétrica desejada for 0,7 pé³/s.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.9

DADO: Escoamento permanente de água através de um bocal horizontal, descarregando para a atmosfera.

$D_1 = 3{,}0$ pol. $\qquad D_2 = 1{,}0$ pol. $\qquad p_2 = p_{atm}$

DETERMINAR: (a) p_{1_g} como função da vazão em volume, Q.

(b) p_{1_g} para $Q = 0{,}7$ pé³/s.

SOLUÇÃO:

Equações básicas:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

$$= 0(1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Considerações:
(1) Escoamento permanente (dado)
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento sem atrito
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(5) $z_1 = z_2$
(6) Escoamento uniforme nas seções ① e ②

Apliquemos a equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente entre os pontos ① e ② para avaliarmos p_1. Então,

$$p_{1_g} = p_1 - p_{atm} = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho}{2}V_1^2\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1\right]$$

Aplicando a equação da continuidade,

$$0 = \{-|\rho V_1 A_1|\} + \{|\rho V_2 A_2|\} \quad \text{ou} \quad V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q$$

de modo que

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{e} \quad V_1 = \frac{Q}{A_1}$$

Então,

$$p_{1_g} = \frac{\rho Q^2}{2A_1^2}\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]$$

Como $A = \pi D^2/4$, então

$$p_{1_g} = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 D_1^4}\left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right] \quad p_{1_g}$$

Com $D_1 = 3{,}0$ pol., $D_2 = 1{,}0$ pol. e $\rho = 1{,}94$ slug/pé³,

$$p_{1_g} = \frac{8}{\pi^2} \times 1{,}94\,\frac{\text{slug}}{\text{pé}^3} \times \frac{1}{(3)^4\,\text{pol.}^4} \times Q^2\left[(3{,}0)^4 - 1\right]\frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{pé}} \times 144\,\frac{\text{pol.}^2}{\text{pé}^2}$$

$$p_{1_g} = 224\, Q^2\, \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{pol.}^2\cdot\text{pé}^6}$$

Com $Q = 0{,}7$ pé³/s, então $\quad p_{1_g} = 110$ lbf/pol.² $\quad p_{1_g}$

Este problema ilustra a aplicação da equação de Bernoulli a um escoamento onde as restrições de regime permanente, incompressibilidade e atrito ao longo de uma linha de corrente constituem um modelo razoável do escoamento.

4.4.2 Volume de Controle Movendo-se a Velocidade Constante

Nos problemas precedentes, que ilustram a aplicação da equação da quantidade de movimento, consideramos apenas volumes de controle estacionários. Um volume de controle (fixo em relação a um sistema de referência xyz) movendo-se a velocidade constante, $\vec{V}_{rf}$, em relação a um sistema de referência fixo (inercial) XYZ, também é inercial, visto que não possui aceleração com respeito a XYZ.

A Eq. 4.11, que expressa as derivadas do sistema em termos das variáveis do volume de controle, é válida para qualquer movimento do sistema de coordenadas xyz (fixo ao volume de controle), desde que todas as velocidades sejam medidas *em relação* ao volume de controle. Para ressaltar esse ponto, reescrevemos a Eq. 4.11 da forma

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta\rho\, dV\!\!\!/ + \int_{\text{SC}} \eta\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \quad (4.26)$$

Uma vez que todas as velocidades devem ser relativas ao volume de controle, ao se usar essa equação para se obter a equação de quantidade de movimento para um volume de controle inercial partindo da formulação de sistema, devemos estabelecer

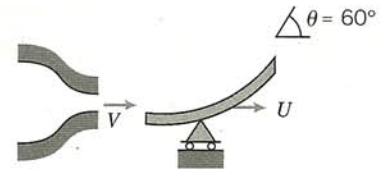
$$N = \vec{P}_{xyz} \qquad \text{e} \qquad \eta = \vec{V}_{xyz}$$

A equação para o volume de controle é então escrita como

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}_{xyz}\rho\, dV\!\!\!/ + \int_{\text{SC}} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \quad (4.27)$$

A Eq. 4.27 é a formulação da segunda lei de Newton aplicada a qualquer volume de controle inercial (estacionário ou movendo-se a velocidade constante). É idêntica à Eq. 4.18, exceto pela inclusão do índice xyz para assinalar que as quantidades devem ser medidas em relação ao volume de controle. (É útil imaginar que as velocidades são aquelas que seriam vistas por um observador movendo-se a velocidade constante com o volume de controle.) A equação da quantidade de movimento é aplicada a um volume de controle inercial movendo-se a velocidade constante no Problema-Exemplo 4.10.

EXEMPLO 4.10 — Pá Defletora Movendo-se a Velocidade Constante

O diagrama mostra uma pá defletora com ângulo de curvatura de 60°. Ela se move a velocidade constante, $U = 10$ m/s, e recebe um jato de água que deixa um bocal estacionário com velocidade $V = 30$ m/s. O bocal tem uma área de saída de 0,003 m². Determine a força que deve ser aplicada para manter a velocidade da pá constante.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.10

DADO: Pá defletora, com ângulo de curvatura $\theta = 60°$, movendo-se a velocidade constante, $\vec{U} = 10\hat{i}$ m/s. Água, proveniente de um bocal de área constante, $A = 0{,}003$ m², com velocidade $\vec{V} = 30\hat{i}$ m/s, escoa sobre a pá conforme mostrado.

DETERMINAR: As componentes da força agindo sobre a pá para mantê-la com velocidade constante.

SOLUÇÃO:

Selecione um volume de controle movendo-se com a pá a velocidade constante, $\vec{U}$, conforme mostrado pelas linhas tracejadas. Rx e Ry são as componentes da força requerida para manter a velocidade do volume de controle em $10\hat{i}$ m/s.

O volume de controle é inercial, uma vez que não está com aceleração (U = constante). Lembre-se que todas as velocidades devem ser medidas em relação ao volume de controle, quando da aplicação das equações básicas.

Equações básicas:

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}_{xyz}\rho\, dV\!\!\!/ + \int_{\text{SC}} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \rho\, dV\!\!\!/ + \int_{\text{SC}} \rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) Escoamento permanente em relação à pá defletora

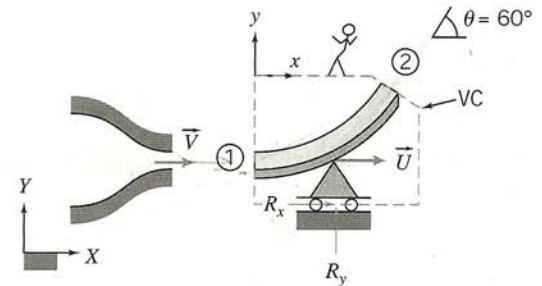
(2) A magnitude da velocidade relativa ao longo da pá é constante: $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = V - U$

(3) Propriedades uniformes nas seções ① e ②

(4) $F_{B_x} = 0$

(5) Escoamento incompressível

A componente x da equação da quantidade de movimento é

$$F_{S_x} + \underbrace{F_{B_x}}_{=0(4)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} u_{xyz}\rho\, dV\!\!\!/}_{=0(1)} + \int_{\text{SC}} u_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Não há força líquida de pressão, pois p_{atm} atua em todos os lados do VC. Assim,

$$R_x = \int_{A_1} u\{-|\rho V\, dA|\} + \int_{A_2} u\{|\rho V\, dA|\} = -u_1|\rho V_1 A_1| + u_2|\rho V_2 A_2|$$

(Todas as velocidades são medidas em relação a xyz.) Da equação da continuidade,

$$0 = \int_{A_1} \{-|\rho V\, dA|\} + \int_{A_2} |\rho V\, dA| = -|\rho V_1 A_1| + |\rho V_2 A_2|$$

ou

$$|\rho V_1 A_1| = |\rho V_2 A_2|$$

Portanto,

$$R_x = (u_2 - u_1)|\rho V_1 A_1|$$

Todas as velocidades devem ser medidas em relação ao volume de controle, logo, notamos que

$$V_1 = V - U \qquad V_2 = V - U$$

$$u_1 = V - U \qquad u_2 = (V - U)\cos\theta$$

Substituindo, resulta

$$R_x = [(V-U)\cos\theta - (V-U)]|\rho(V-U)A_1| = (V-U)(\cos\theta - 1)|\rho(V-U)A_1|$$

$$= (30-10)\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,(0{,}50-1)\ \Big|\ 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,(30-10)\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}003\ \text{m}^2\ \Big|\ \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$R_x = -599\ \text{N} \qquad \{\text{para a esquerda}\}$$

Escrevendo a componente y da equação da quantidade de movimento, obtemos

$$F_{S_y} + F_{B_y} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v_{xyz}\rho\, dV}^{=0(1)} + \int_{SC} v_{xyz}\rho \vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Denotando a massa do VC por M, segue-se que

$$R_y - Mg = \int_{SC} v\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_2} v\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \{v_1 = 0\} \qquad \begin{Bmatrix}\text{Todas as velocidades}\\ \text{são relativas a } xyz.\end{Bmatrix}$$

$$= \int_{A_2} v\,|\rho V\, dA| = v_2|\rho V_2 A_2| = v_2|\rho V_1 A_1| \qquad \{\text{Lembre-se que } |\rho V_2 A_2| = |\rho V_1 A_1|.\}$$

$$= (V-U)\,\text{sen}\,\theta|\rho(V-U)A_1|$$

$$= (30-10)\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,(0{,}866)\ \Big|\ 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,(30-10)\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}003\ \text{m}^2\ \Big|\ \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$R_y - Mg = 1{,}04\ \text{kN} \qquad \{\text{para cima}\}$$

Assim, a força vertical é

$$R_y = 1{,}04\ \text{kN} + Mg \qquad \{\text{para cima}\}$$

Desse modo, a força líquida sobre a pá (desprezando o peso da pá e da água dentro do VC) é

$$\vec{R} = -0{,}599\hat{i} + 1{,}04\hat{j}\ \text{kN}$$

$\vec{R}$

Este problema ilustra o fato de que, ao aplicar-se a equação da quantidade de movimento de um volume de controle inercial, todas as velocidades devem ser medidas em relação a ele.

4.5 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO PARA UM VOLUME DE CONTROLE COM ACELERAÇÃO RETILÍNEA

Para um volume de controle inercial (não tendo aceleração em relação a um sistema de referência estacionário), a formulação apropriada da segunda lei de Newton é dada pela Eq. 4.27,

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}\rho\, dV + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.27}$$

Nem todos os volumes de controle são inerciais; um foguete deve acelerar para sair do chão. Como estamos interessados na análise de volumes de controle que podem acelerar em relação a coordenadas inerciais, é lógico questionar se a Eq. 4.27 pode ser usada para um volume de controle em aceleração. Para respon-

der a essa pergunta, revisemos, brevemente, os dois elementos principais usados na dedução da Eq. 4.27.

Primeiro, ao relacionarmos as derivadas do sistema à formulação para volume de controle (Eq. 4.26 ou 4.11), este era fixo em relação a xyz; o campo de escoamento, $\vec{V}(x, y, z, t)$, foi especificado em relação às coordenadas, x, y e z. Nenhuma restrição foi feita quanto ao movimento do referencial xyz. Conseqüentemente, a Eq. 4.26 (ou Eq. 4.11) é válida em qualquer instante para qualquer movimento arbitrário das coordenadas x, y e z, desde que todas as velocidades na equação sejam medidas em relação ao volume de controle.

Segundo, a equação para o sistema

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.2a}$$

onde a quantidade de movimento linear do sistema é dada por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{V}\, dm = \int_{\forall\,(\text{sistema})} \vec{V}\rho\, d\forall \tag{4.2b}$$

é válida apenas para velocidades medidas em relação a um referencial inercial de coordenadas. Assim, se denotarmos o referencial inercial de coordenadas por XYZ, a segunda lei de Newton estabelece que

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}_{XYZ}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.28}$$

Uma vez que as derivadas temporais de $\vec{P}_{XYZ}$ e $\vec{P}_{xyz}$ não são iguais quando o referencial xyz está acelerando em relação ao referencial inercial, a Eq. 4.27 não é válida para um volume de controle em aceleração.

Para desenvolver a equação da quantidade de movimento para um volume de controle com aceleração linear, é necessário relacionar $\vec{P}_{XYZ}$ do sistema com $\vec{P}_{xyz}$ do sistema. A derivada do sistema $d\vec{P}_{xyz}/dt$ pode ser relacionada com as variáveis do volume de controle pela Eq. 4.26. Começaremos escrevendo a segunda lei de Newton para um sistema, lembrando que a aceleração deve ser medida em relação ao referencial inercial que designamos por XYZ. Escrevemos

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}_{XYZ}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{d}{dt}\int_{M(\text{sistema})} \vec{V}_{XYZ}\, dm$$

$$= \int_{M(\text{sistema})} \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\, dm \tag{4.29}$$

As velocidades relativas ao referencial inercial (XYZ) e às coordenadas do volume de controle (xyz) são relacionadas pela equação do movimento relativo

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{xyz} + \vec{V}_{rf} \tag{4.30}$$

onde $\vec{V}_{rf}$ é a velocidade do referencial do volume de controle.

Como o movimento de xyz é de translação pura, sem rotação, relativa ao referencial inercial XYZ, então

$$\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} = \vec{a}_{XYZ} = \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{rf}}{dt} = \vec{a}_{xyz} + \vec{a}_{rf} \tag{4.31}$$

onde

$\vec{a}_{XYZ}$ é a aceleração retilínea do sistema em relação ao referencial inercial XYZ,

$\vec{a}_{xyz}$ é a aceleração retilínea do sistema em relação ao referencial não-inercial xyz, e

$\vec{a}_{rf}$ é a aceleração retilínea do referencial não-inercial xyz em relação ao referencial inercial XYZ.

Substituindo da Eq. 4.31 na Eq. 4.29, resulta

$$\vec{F} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{a}_{rf}\, dm + \int_{M(\text{sistema})} \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\, dm$$

ou

$$\vec{F} - \int_{M(\text{sistema})} \vec{a}_{rf}\, dm = \left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.32a}$$

onde a quantidade de movimento linear é dada por

$$\vec{P}_{xyz})_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{V}_{xyz}\, dm =$$

$$= \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall \tag{4.32b}$$

e a força, $\vec{F}$, inclui todas as forças de campo e de superfície agindo sobre o sistema.

Para deduzir a formulação de volume de controle da segunda lei de Newton, estabelecemos

$$N = \vec{P}_{xyz} \quad \text{e} \quad \eta = \vec{V}_{xyz}$$

Da Eq. 4.26, com essa substituição, obtemos

$$\left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.33}$$

Da equação de sistema,

$$\left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \vec{F}_{\text{no sistema}} - \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{a}_{rf}\rho\, d\forall \tag{4.32a}$$

Como o sistema e o volume de controle coincidem no instante t_0,

$$\vec{F}_{\text{no sistema}} - \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{a}_{rf}\rho\, d\forall = \vec{F}_{\text{no VC}} - \int_{\text{VC}} \vec{a}_{rf}\rho\, d\forall$$

À luz disso, as Eqs. 4.32a e 4.33 podem ser combinadas para dar a formulação da segunda lei de Newton para um volume de controle acelerando, sem rotação, em relação a um referencial inercial:

$$\vec{F} - \int_{\text{VC}} \vec{a}_{rf}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Desde que $\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B$, esta equação torna-se

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B - \int_{\text{VC}} \vec{a}_{rf}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.34}$$

Comparando a equação da quantidade de movimento para um volume de controle com aceleração retilínea, Eq. 4.34, com aquela para um volume de controle sem aceleração, Eq. 4.27, constatamos que a única diferença é a presença de um termo adicional na Eq. 4.34. Quando o volume de controle não está acelerando

em relação ao referencial inercial XYZ, então $\vec{a}_{rf} = 0$ e a Eq. 4.34 reduz-se à Eq. 4.27.

As precauções concernentes ao emprego da Eq. 4.27 também se aplicam quanto ao uso da Eq. 4.34. Antes de tentar utilizar qualquer delas, deve-se desenhar as fronteiras do volume de controle e designar direções e sentidos apropriados para as coordenadas de referência. Para um volume de controle em aceleração, deve-se designar dois conjuntos de coordenadas: um (xyz) sobre o volume de controle, e o outro (XYZ) inercial.

Na Eq. 4.34, $\vec{F}_S$ representa todas as forças de superfície atuando sobre o volume de controle. Uma vez que a massa dentro do volume de controle pode variar com o tempo, ambos os termos remanescentes no lado esquerdo da equação podem ser funções do tempo. Além disso, a aceleração, $\vec{a}_{rf}$, do referencial xyz em relação ao referencial inercial, será, em geral, função do tempo.

Todas as velocidades na Eq. 4.34 são medidas em relação ao volume de controle. O fluxo da quantidade de movimento, $\vec{V}_{xyz}\,\rho\,\vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$, através de um elemento de área da superfície de controle, $d\vec{A}$, *é* um vetor. Os sinais dos componentes do produto escalar, $\rho\,\vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$, dependem da direção do vetor velocidade, $\vec{V}_{xyz}$, relativa ao vetor área, $d\vec{A}$. Os sinais das componentes do vetor velocidade, $\vec{V}_{xyz}$, dependem do sistema de coordenadas escolhido.

A equação da quantidade de movimento é vetorial. Como com todas as equações vetoriais, pode ser escrita na forma de três componentes escalares. As componentes escalares da Eq. 4.34 são:

$$F_{S_x} + F_{B_x} - \int_{\text{VC}} a_{rf_x}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} u_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} u_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \qquad (4.35a)$$

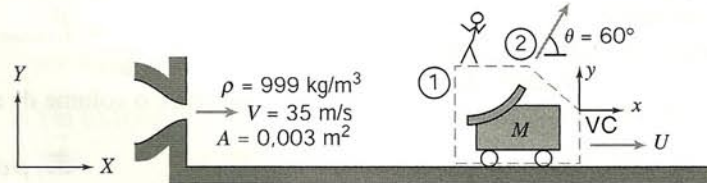
$$F_{S_y} + F_{B_y} - \int_{\text{VC}} a_{rf_y}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} v_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} v_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \qquad (4.35b)$$

$$F_{S_z} + F_{B_z} - \int_{\text{VC}} a_{rf_z}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} w_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} w_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \qquad (4.35c)$$

EXEMPLO 4.11 — Pá Defletora Movendo-se com Aceleração Retilínea

Uma pá defletora, com ângulo de curvatura $\theta = 60°$, é fixada a um carrinho. O carrinho e a pá, de massa $M = 75$ kg, rolam sobre uma pista nivelada. O atrito e a resistência do ar podem ser desprezados. A pá recebe um jato d'água que parte horizontalmente de um bocal estacionário com $V = 35$ m/s. A área de saída do bocal é $A = 0{,}003$ m². Determine a velocidade do carrinho como função do tempo e trace um gráfico dos resultados.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.11

DADOS: Pá defletora e carrinho conforme mostrado na figura, com $M = 75$ kg.

DETERMINAR: $U(t)$ e plotar os resultados.

SOLUÇÃO:

Escolha o volume de controle e sistema de coordenadas mostrados para a análise. Note que XY é fixo, enquanto xy move-se com o carrinho. Aplique a componente x da equação da quantidade de movimento.

Equação básica:

$$\underbrace{F_{S_x}}_{=0(1)} + \underbrace{F_{B_x}}_{=0(2)} - \int_{\text{VC}} a_{rf_x}\rho\, d\forall = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} u_{xyz}\rho\, d\forall}_{\simeq 0(4)} + \int_{\text{SC}} u_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) $F_{S_x} = 0$, visto que não há resistência presente

(2) $F_{B_x} = 0$

(3) Massa de água em contato com a pá desprezível em relação à massa do carrinho

(4) Taxa de variação da quantidade de movimento do líquido dentro do volume de controle desprezível

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} u_{xyz}\rho\, d\forall \simeq 0$$

(5) Escoamento uniforme nas seções ① e ②

(6) A velocidade da corrente d'água não é retardada pelo atrito com a pá, assim $\left|\vec{V}_{xyz1}\right| = \left|\vec{V}_{xyz2}\right|$

(7) $A_2 = A_1 = A$

Então

$$-\int_{VC} a_{rf_x} \rho \, d\forall = u_{xyz_1}\{-|\rho V_{xyz_1} A_1|\} + u_{xyz_2}\{|\rho V_{xyz_2} A_2|\}$$

onde todas as velocidades devem ser medidas em relação ao referencial xyz. Eliminando os subscritos rf e xyz, obtemos

$$-\int_{VC} a_x \rho \, d\forall = u_1\{-|\rho V_1 A_1|\} + u_2\{|\rho V_2 A_2|\} \qquad (1)$$

Avaliando estes termos separadamente, obtém-se

$$-\int_{VC} a_x \rho \, d\forall = -a_x M_{VC} = -a_x M = -\frac{dU}{dt} M$$

$$u_1\{-|\rho V_1 A_1|\} = (V - U)\{-|\rho(V - U)A|\} = -\rho(V - U)^2 A$$

$$u_2\{|\rho V_2 A_2|\} = (V - U)\cos\theta\{|\rho(V - U)A|\} = \rho(V - U)^2 A \cos\theta$$

Os sinais de valores absolutos foram descartados dos termos de fluxo, uma vez que $V \geq U$. Substituindo na Eq. 1, resulta

$$-M\frac{dU}{dt} = -\rho(V - U)^2 A + \rho(V - U)^2 A \cos\theta$$

ou

$$-M\frac{dU}{dt} = (\cos\theta - 1)\rho(V - U)^2 A$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{dU}{(V - U)^2} = \frac{(1 - \cos\theta)\rho A}{M} dt = b\,dt \qquad \text{onde } b = \frac{(1 - \cos\theta)\rho A}{M}$$

Note que, sendo V = constante, $dU = -d(V - U)$. Integrando entre os limites $U = 0$ para $t = 0$, e $U = U$ para $t = t$,

$$\int_0^U \frac{dU}{(V - U)^2} = \int_0^U \frac{-d(V - U)}{(V - U)^2} = \frac{1}{(V - U)}\Bigg]_0^U = \int_0^t b\,dt = bt$$

ou

$$\frac{1}{(V - U)} - \frac{1}{V} = \frac{U}{V(V - U)} = bt$$

Resolvendo para U, obtemos

$$\frac{U}{V} = \frac{Vbt}{1 + Vbt}$$

Avaliando Vb, resulta

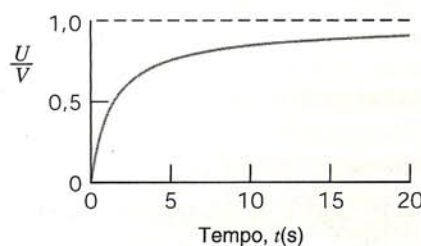
$$Vb = V\frac{(1 - \cos\theta)\rho A}{M}$$

$$Vb = 35\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{(1 - 0{,}5)}{75\text{ kg}} \times 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0{,}003\text{ m}^2 = 0{,}699\text{ s}^{-1}$$

Assim,

$$\frac{U}{V} = \frac{0{,}699t}{1 + 0{,}699t} \qquad (t \text{ em segundos})$$

$U(t)$

Gráfico:

O gráfico mostra um rápido crescimento inicial na velocidade da pá defletora. A velocidade da pá, U, aproxima-se assintoticamente da velocidade do jato, V, quando a vazão mássica cruzando o volume de controle tende a zero.

EXEMPLO 4.12 — Foguete Lançado Verticalmente

Um pequeno foguete, com uma massa inicial de 400 kg, deve ser lançado verticalmente. Na ignição, o foguete consome combustível a uma taxa de 5 kg/s e ejeta gás à pressão atmosférica com uma velocidade de 3500 m/s relativa ao foguete. Determine a aceleração inicial do foguete e a sua velocidade após 10 s, se a resistência do ar for desprezada.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.12

DADO: Um pequeno foguete acelera verticalmente, partindo do repouso.
Massa inicial, $M_0 = 400$ kg.
A resistência do ar pode ser desprezada.
Taxa de consumo de combustível, $\dot{m}_e = 5$ kg/s.
Velocidade de descarga, $V_e = 3500$ m/s, relativa ao foguete, saindo à pressão atmosférica.

DETERMINAR: (a) A aceleração inicial do foguete.
(b) A velocidade do foguete após 10 s.

SOLUÇÃO:

Escolha um volume de controle como mostrado pelas linhas tracejadas. Como o volume de controle está acelerando, defina um sistema de coordenadas inerciais XY e outro, xy, ligado ao VC. Aplique a componente y da equação da quantidade de movimento.

Equação básica:

$$F_{S_y} + F_{B_y} - \int_{VC} a_{rf_y} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v_{xyz} \rho \, d\forall + \int_{SC} v_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) A pressão atmosférica atua em todas as superfícies do VC; como a resistência do ar é desprezada, segue-se que $F_{S_y} = 0$
(2) A gravidade é a única força de campo; g é constante
(3) O fluxo deixando o foguete é uniforme, e V_e é constante

Com essas considerações, a equação da quantidade de movimento reduz-se a

$$F_{B_y} - \int_{VC} a_{rf_y} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v_{xyz} \rho \, d\forall + \int_{SC} v_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \qquad (1)$$

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Examinemos a equação termo a termo:

Ⓐ $F_{B_y} = -\int_{VC} g\rho \, d\forall = -g\int_{VC} \rho \, d\forall = -gM_{VC}$ {uma vez que g é constante}

A massa do VC será uma função do tempo porque ela sai do VC a uma taxa $\dot{m}_e$. Para determinar M_{VC} como função do tempo, utilizamos a equação da conservação de massa

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall = -\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\int_{A_e} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\int_{A_e} \{|\rho V \, dA|\} = -|\dot{m}_e|$$

O sinal de menos indica que a massa do VC está diminuindo com o tempo. Uma vez que a massa do VC é somente função do tempo, podemos escrever

$$\frac{dM_{VC}}{dt} = -|\dot{m}_e|$$

Para determinar a massa do VC em um instante qualquer, t, integramos

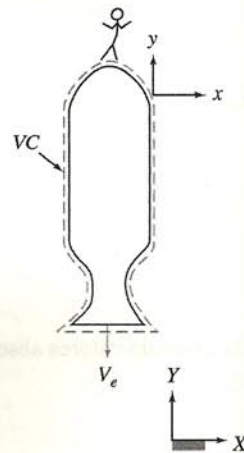
$$\int_{M_0}^{M} dM_{VC} = -\int_0^t |\dot{m}_e| dt \qquad \text{onde para } t = 0, M_{VC} = M_0 \text{ e, para } t = t, M_{VC} = M$$

Portanto, $M - M_0 = -|\dot{m}_e|t$ ou $M = M_0 - \dot{m}_e t$.
{Como $\dot{m}_e$ é positivo, eliminamos a notação de valor absoluto.}

Substituindo a expressão para M no termo Ⓐ, obtém-se

$$F_{B_y} = -\int_{VC} g\rho \, d\forall = -gM_{VC} = -g(M_0 - \dot{m}_e t)$$

Ⓑ $-\int_{VC} a_{rf_y} \rho \, d\forall$

A aceleração, a_{rf_y}, do VC é aquela vista por um observador no sistema de coordenadas XY.

Assim, a_{rf_y} não é uma função das coordenadas xyz, e

$$-\int_{VC} a_{rf_y}\rho\, d\forall = -a_{rf_y}\int_{VC}\rho\, d\forall = -a_{rf_y}M_{VC} = -a_{rf_y}(M_0 - \dot{m}_e t)$$

Ⓒ $$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v_{xyz}\rho\, d\forall$$

é a taxa de variação da quantidade de movimento do fluido no volume de controle segundo y, medida em relação ao volume de controle.

Mesmo que a quantidade de movimento em relação a y do fluido dentro do VC, medida em relação ao VC, seja um número grande, ela não varia apreciavelmente com o tempo. Para verificar isso, devemos reconhecer que:

(1) O combustível não-queimado e a estrutura do foguete têm quantidade de movimento nula em relação ao foguete.
(2) A velocidade do gás na saída do bocal permanece constante com o tempo, assim como a velocidade nos vários pontos do bocal.

Conseqüentemente, é razoável admitir que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v_{xyz}\rho\, d\forall \approx 0$$

Ⓓ $$\int_{SC} v_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} = \int_{A_e} v_{xyz}|\rho V_{xyz}\, dA| = v_{xyz}|\dot{m}_e|$$

Como $\vec{V}_e = -V_e\hat{j}$,

$$v_{xyz}|\dot{m}_e| = -V_e|\dot{m}_e| = -V_e\dot{m}_e$$

Substituindo os termos de Ⓐ a Ⓓ na Eq. 1, obtemos

$$-g(M_0 - \dot{m}_e t) - a_{rf_y}(M_0 - \dot{m}_e t) = -V_e\dot{m}_e$$

ou

$$a_{rf_y} = \frac{V_e\dot{m}_e}{M_0 - \dot{m}_e t} - g \tag{2}$$

No instante $t = 0$

$$a_{rf_y}\Big)_{t=0} = \frac{V_e\dot{m}_e}{M_0} - g = \frac{3500\ \text{m}}{\text{s}} \times \frac{5\ \text{kg}}{\text{s}} \times \frac{1}{400\ \text{kg}} - \frac{9{,}81\ \text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{rf_y}\Big)_{t=0} = 33{,}9\ \text{m/s}^2$$

$a_{rf_y})_{t=0}$

A aceleração do VC é, por definição,

$$a_{rf_y} = \frac{dV_{VC}}{dt}$$

Substituindo da Eq. 2,

$$\frac{dV_{VC}}{dt} = \frac{V_e\dot{m}_e}{M_0 - \dot{m}_e t} - g$$

Separando variáveis e integrando, resulta

$$V_{VC} = \int_0^{V_{VC}} dV_{VC} = \int_0^t \frac{V_e\dot{m}_e\, dt}{M_0 - \dot{m}_e t} - \int_0^t g\, dt = -V_e \ln\left[\frac{M_0 - \dot{m}_e t}{M_0}\right] - gt$$

Para $t = 10$s,

$$V_{VC} = -\frac{3500\ \text{m}}{\text{s}} \times \ln\left[\frac{350\ \text{kg}}{400\ \text{kg}}\right] - \frac{9{,}81\ \text{m}}{\text{s}^2} \times 10\ \text{s}$$

$$V_{VC} = 369\ \text{m/s}$$

$V_{VC})_{t=10\text{ s}}$

Este problema ilustra a aplicação da equação da quantidade de movimento a um volume de controle com aceleração linear.

*4.6 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO PARA UM VOLUME DE CONTROLE SOB ACELERAÇÃO ARBITRÁRIA

Na Seção 4.5 formulamos a equação da quantidade de movimento para um volume de controle com aceleração retilínea. O propósito desta seção é estender a formulação de modo a incluir rotação e aceleração angular do volume de controle, além da translação e da aceleração retilínea.

Primeiro, desenvolveremos uma expressão para a segunda lei de Newton em um sistema de coordenadas arbitrário, não-inercial. Em seguida, empregaremos a Eq. 4.26 para completar a formulação para um volume de controle. A segunda lei de Newton para um sistema movendo-se em relação a referências coordenadas inerciais é dada por

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{XYZ}}{dt}\Bigg)_{\text{sistema}}$$

*Esta seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

Como

$$\vec{P}_{XYZ_{\text{sistema}}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{V}_{XYZ}\, dm$$

e M(sistema) é constante, segue-se que

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{M(\text{sistema})} \vec{V}_{XYZ}\, dm = \int_{M(\text{sistema})} \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\, dm$$

ou

$$\vec{F} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{a}_{XYZ}\, dm \tag{4.36}$$

O problema básico é relacionar $\vec{a}_{XYZ}$ com a aceleração $\vec{a}_{xyz}$, medida em relação a um sistema de referência não-inercial. Para esse fim, considere o sistema de referência não-inercial, xyz, mostrado na Fig. 4.5.

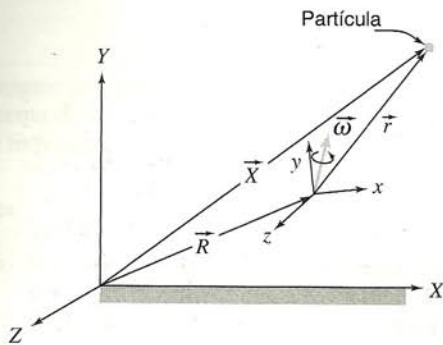



Fig. 4.5 Localização de uma partícula nos referenciais inercial (XYZ) e não-inercial (xyz).

O sistema não-inercial, xyz, é localizado em relação ao sistema fixo pelo vetor posição $\vec{R}$. O sistema não-inercial gira com velocidade angular $\vec{\omega}$.[2] A partícula é localizada em relação ao sistema de referência móvel pelo vetor posição $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$. Em relação ao sistema de referência inercial XYZ, a posição da partícula é denotada pelo vetor posição $\vec{X}$. Da geometria da figura, $\vec{X} = \vec{R} + \vec{r}$.

A velocidade da partícula, relativa a um observador no sistema XYZ é

$$\vec{V}_{XYZ} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{rf} + \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4.37}$$

Devemos ser cuidadosos na avaliação de $d\vec{r}/dt$ porque tanto a magnitude, $|\vec{r}|$, quanto a orientação dos vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, são funções do tempo. Assim,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) =$$

$$= \hat{i}\frac{dx}{dt} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \tag{4.38a}$$

Os termos dx/dt, dy/dt e dz/dt são as componentes da velocidade da partícula em relação a xyz. Assim,

$$\vec{V}_{xyz} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} \tag{4.38b}$$

Você deve se lembrar da dinâmica (veja o Problema-Exemplo 4.13) que, para um sistema de coordenadas em rotação,

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \tag{4.38c}$$

Combinando as Eqs. 4.38a, 4.38b e 4.38c, obtemos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{4.38d}$$

Substituindo na Eq. 4.37 resulta

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{rf} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{4.39}$$

A aceleração da partícula relativa a um observador no sistema XYZ é

$$\vec{a}_{XYZ} = \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{rf}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

ou

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{rf} + \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{4.40}$$

Tanto $\vec{V}_{xyz}$ quanto $\vec{r}$ são medidos em relação a xyz; dessa forma, aplicam-se os mesmos cuidados observados no desenvolvimento da Eq. 4.38d. Então,

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} = \vec{a}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} \tag{4.41a}$$

e

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{4.41b}$$

Substituindo as Eqs. 4.41a e 4.41b na Eq. 4.40, obtemos

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{rf} + \vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \tag{4.42}$$

O significado físico de cada termo da Eq. 4.42 é

$\vec{a}_{XYZ}$	: Aceleração retilínea absoluta de uma partícula em relação ao sistema de referência fixo XYZ
$\vec{a}_{rf}$	: Aceleração retilínea absoluta da origem do sistema de referência móvel, xyz, em relação ao sistema de referência fixo, XYZ
$\vec{a}_{xyz}$	: Aceleração retilínea de uma partícula *em relação* ao sistema de referência móvel xyz (essa aceleração seria aquela vista por um observador colocado sobre a referência móvel xyz)
$2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}$	: Aceleração de Coriolis decorrente do movimento da partícula *dentro* do sistema de referência móvel xyz
$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$	: Aceleração centrípeta devida à rotação do sistema de referência móvel xyz
$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$	: Aceleração tangencial devida à aceleração angular do sistema de referência móvel xyz

Substituindo $\vec{a}_{XYZ}$, conforme dado pela Eq. 4.42, na Eq. 4.36, obtemos

[2]Note que qualquer movimento arbitrário de corpo rígido pode ser decomposto em movimentos de translação e de rotação.

$$\vec{F}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} [\vec{a}_{rf} + \vec{a}_{xyz} + \\ + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm$$

ou

$$\vec{F} - \int_{M(\text{sistema})} [\vec{a}_{rf} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \\ + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm = \int_{M(\text{sistema})} \vec{a}_{xyz}\, dm \tag{4.43a}$$

Porém,

$$\int_{M(\text{sistema})} \vec{a}_{xyz}\, dm = \int_{M(\text{sistema})} \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\, dm = \\ = \frac{d}{dt}\int_{M(\text{sistema})} \vec{V}_{xyz}\, dm = \left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.43b}$$

Combinando as Eqs. 4.43a e 4.43b, obtemos

$$\vec{F} - \int_{M(\text{sistema})} [\vec{a}_{rf} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \\ + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm = \left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}}$$

ou

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B - \int_{V(\text{sistema})} [\vec{a}_{rf} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \\ + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\rho\, dV = \left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.44}$$

A Eq. 4.44 é uma formulação da segunda lei de Newton para um sistema. A derivada do sistema, $d\vec{P}_{xyz}/dt$, representa a taxa de variação da quantidade de movimento, $\vec{P}_{xyz}$, do sistema, medida em relação a *xyz*, como vista por um observador em *xyz*. Essa derivada do sistema pode ser relacionada com as variáveis do volume de controle por meio da Eq. 4.26,

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho\, dV + \int_{SC} \eta\rho\vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.26}$$

Para obter a formulação para o volume de controle, estabelecemos $N = \vec{P}_{xyz}$ e $\eta = \vec{V}_{xyz}$. Então, as Eqs. 4.26 e 4.44 podem ser combinadas para dar

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B - \int_{VC} [\vec{a}_{rf} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \\ + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\rho\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}\rho\, dV + \\ + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.45}$$

A Eq. 4.45 é a formulação mais geral da segunda lei de Newton para um volume de controle. Comparando a equação da quantidade de movimento para um volume de controle movendo-se com aceleração arbitrária, Eq. 4.45, com aquela para um volume de controle movendo-se com aceleração retilínea, Eq. 4.34, constatamos que a única diferença é a presença de três termos adicionais no lado esquerdo da Eq. 4.45. Esses termos resultam do movimento angular do sistema de referência não-inercial, *xyz*. Note que a Eq. 4.45 reduz-se à Eq. 4.34 quando os termos angulares são nulos, e à Eq. 4.27 para um volume de controle inercial.

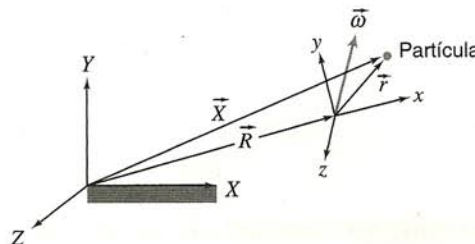
As precauções concernentes ao emprego das Eqs. 4.27 e 4.34 também se aplicam no uso da Eq. 4.45. Antes de tentar utilizar essa equação, deve-se desenhar as fronteiras do volume de controle e designar apropriadamente as direções e sentidos das coordenadas. Para um volume de controle movendo-se com aceleração arbitrária, deve-se designar um sistema de coordenadas (*xyz*) sobre ele e um sistema de referência inercial (*XYZ*).

EXEMPLO 4.13 — Velocidade em Sistemas de Referência Fixo e Não-inercial

Um sistema de referência, *xyz*, move-se arbitrariamente com respeito a um outro sistema, fixo, *XYZ*. Uma partícula move-se com velocidade $\vec{V}_{xyz} = (dx/dt)\hat{i} + (dy/dt)\hat{j} + (dz/dt)\hat{k}$, em relação ao sistema *xyz*. Mostre que a velocidade absoluta da partícula é dada por

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{rf} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

PROBLEMA-EXEMPLO 4.13

DADO: Sistemas fixo e não-inercial, conforme mostrado.

DETERMINAR: $\vec{V}_{XYZ}$ em termos de $\vec{V}_{xyz}$, $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ e $\vec{V}_{rf}$.

SOLUÇÃO:
Da geometria da figura, $\vec{X} = \vec{R} + \vec{r}$, logo

$$\vec{V}_{XYZ} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{rf} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Como

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

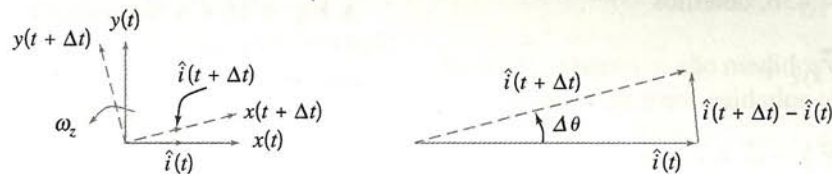
segue-se que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}$$

ou

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{xyz} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}$$

O problema agora consiste em avaliar $d\hat{i}/dt$, $d\hat{j}/dt$ e $d\hat{k}/dt$ devidos ao movimento angular do referencial xyz. Para avaliar essas derivadas, devemos considerar a rotação de cada vetor unitário, decorrente das três componentes da velocidade angular, $\vec{\omega}$, do referencial xyz.

Considere o vetor unitário, $\hat{i}$. Ele girará no plano xy por causa de ω_z, como segue:

Agora, do diagrama

$$\hat{i}(t + \Delta t) - \hat{i}(t) = (1)\,\text{sen}\,\Delta\theta\,\hat{j} + (1)(1 - \cos\Delta\theta)(-\hat{i})$$

Porém, para ângulos pequenos, $\cos\Delta\theta \approx 1 - [(\Delta\theta)^2/2]$ e $\text{sen}\,\Delta\theta \approx \Delta\theta$, então

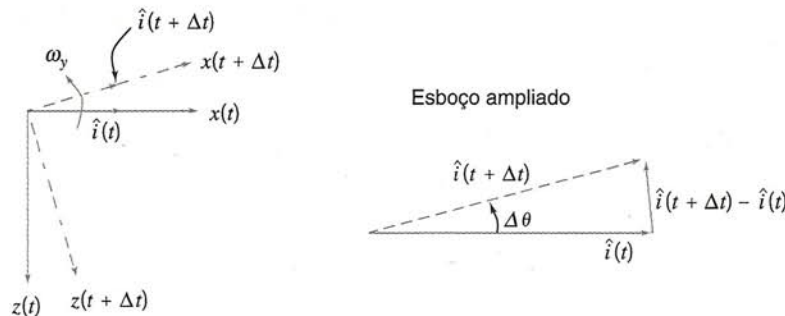
$$\hat{i}(t + \Delta t) - \hat{i}(t) = (1)\,\Delta\theta\,\hat{j} + (1)\frac{(\Delta\theta)^2}{2}(-\hat{i}) = (1)\,\Delta\theta\left[\hat{j} - \frac{\Delta\theta}{2}\hat{i}\right]$$

No limite, quando $\Delta t \to 0$, sendo $\Delta\theta = \omega_z \Delta t$,

$$\left.\frac{d\hat{i}}{dt}\right]_{\text{devido à }\omega_z} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\hat{i}(t + \Delta t) - \hat{i}(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{(1)\,\omega_z\,\Delta t\left[\hat{j} - \frac{\omega_z \Delta t}{2}\hat{i}\right]}{\Delta t}\right]$$

$$\left.\frac{d\hat{i}}{dt}\right]_{\text{devido à }\omega_z} = \hat{j}\omega_z$$

De modo semelhante, $\hat{i}$ girará no plano xz por causa de ω_y,

Esboço ampliado

Em seguida, a partir do diagrama

$$\hat{i}(t + \Delta t) - \hat{i}(t) = (1)\ \text{sen}\ \Delta\theta(-\hat{k}) + (1)(1 - \cos\ \Delta\theta)(-\hat{i})$$

Para pequenos ângulos

$$\hat{i}(t + \Delta t) - \hat{i}(t) = (1)\,\Delta\theta(-\hat{k}) + (1)\frac{(\Delta\theta)^2}{2}(-\hat{i}) = (1)\,\Delta\theta\left(-\hat{k} - \frac{\Delta\theta}{2}\hat{i}\right)$$

No limite, quando $\Delta t \to 0$, sendo sen $\Delta\theta = \omega_y\,\Delta t$,

$$\left.\frac{d\hat{i}}{dt}\right]_{\text{devido à }\omega_y} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\hat{i}(t+\Delta t)-\hat{i}(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(1)\,\omega_y\,\Delta t\left[-\hat{k}-\dfrac{\omega_y\,\Delta t}{2}\hat{i}\right]}{\Delta t}\right]$$

$$\left.\frac{d\hat{i}}{dt}\right]_{\text{devido à }\omega_y} = -\hat{k}\omega_y$$

A rotação no plano yz decorrente de ω_x não afeta $\hat{i}$. Combinando os termos,

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \omega_z\hat{j} - \omega_y\hat{k}$$

Por raciocínio similar,

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \omega_x\hat{k} - \omega_z\hat{i} \qquad \text{e} \qquad \frac{d\hat{k}}{dt} = \omega_y\hat{i} - \omega_x\hat{j}$$

Assim,

$$x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} = (z\omega_y - y\omega_z)\hat{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\hat{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\hat{k}$$

Porém,

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_y - y\omega_z)\hat{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\hat{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\hat{k}$$

Combinando esses resultados, obtemos

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{rf} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

*4.7 O PRINCÍPIO DO MOMENTO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Em seguida desenvolveremos uma expressão para o princípio do momento da quantidade de movimento ou quantidade de movimento angular aplicada a um volume de controle. Começaremos com a formulação matemática para um sistema e utilizaremos a Eq. 4.11 para completar a formulação para um volume de controle fixo (inercial) (Seção 4.7.1). A fim de obtermos a formulação para um volume de controle em rotação (não-inercial) (Seção 4.7.2), desenvolveremos primeiro uma expressão adequada do princípio do momento da quantidade de movimento aplicada a um sistema em movimento qualquer. Em seguida, utilizaremos a Eq. 4.26 para completar a formulação para um volume de controle.

4.7.1 Equação para Volume de Controle Fixo

O princípio do momento da quantidade de movimento para um sistema em um referencial inercial é

$$\vec{T} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.3a}$$

onde $\vec{T}$ = torque total exercido sobre o sistema pela sua vizinhança, e
$\vec{H}$ = momento da quantidade de movimento do sistema,

$$\vec{H} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r}\times\vec{V}\,dm = \int_{V\!\!\!\!-(\text{sistema})} \vec{r}\times\vec{V}\rho\,dV\!\!\!\!- \tag{4.3b}$$

Todas as quantidades na equação do sistema devem ser formuladas com respeito a coordenadas inerciais. Sistemas de referência em repouso ou movendo-se com velocidade linear constante são inerciais, e a Eq. 4.3b pode ser diretamente empregada a fim de desenvolver a forma para volume de controle do princípio do momento da quantidade de movimento. (Sistemas de referência em rotação são não-inerciais e serão abordados na Seção 4.7.2.)

O vetor posição, $\vec{r}$, localiza cada elemento de massa ou de volume do sistema com respeito ao sistema de coordenadas. O torque $\vec{T}$, aplicado a um sistema pode ser escrito

$$\vec{T} = \vec{r}\times\vec{F}_s + \int_{M(\text{sistema})} \vec{r}\times\vec{g}\,dm + \vec{T}_{\text{eixo}} \tag{4.3c}$$

onde $\vec{F}_s$ é a força de superfície exercida sobre o sistema.

A relação entre as formulações de sistema e de volume de controle fixo é

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta\rho\,dV\!\!\!\!- + \int_{\text{SC}} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.11}$$

onde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \eta\,dm$$

Se estabelecermos $N = \vec{H}$, então $\eta = \vec{r}\times\vec{V}$, e

$$\left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{r}\times\vec{V}\rho\,dV\!\!\!\!- + \int_{\text{SC}} \vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.46}$$

*Esta seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

Combinando as Eqs. 4.3a, 4.3c e 4.46, obtemos

$$\vec{r}\times\vec{F}_s+\int_{M(\text{sistema})}\vec{r}\times\vec{g}\,dm+\vec{T}_{\text{eixo}}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}}\vec{r}\times\vec{V}\rho\,d\forall+\int_{\text{SC}}\vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Uma vez que o sistema e o volume de controle coincidem no instante t_0,

$$\vec{T}_{\text{sistema}}=\vec{T}_{\text{VC}}$$

e

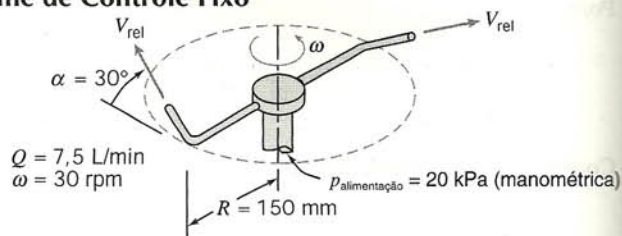
$$\vec{r}\times\vec{F}_s+\int_{\text{VC}}\vec{r}\times\vec{g}\rho\,d\forall+\vec{T}_{\text{eixo}}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}}\vec{r}\times\vec{V}\rho\,d\forall+\int_{\text{SC}}\vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\qquad(4.47)$$

A Eq. 4.47 é uma formulação geral do princípio do momento da quantidade de movimento para um volume de controle inercial. O lado esquerdo da equação expressa todos os torques que atuam sobre o volume de controle. Os termos no lado direito expressam a taxa de variação do momento da quantidade de movimento dentro do volume de controle e a taxa líquida de fluxo de momento da quantidade de movimento proveniente do volume de controle. Todas as velocidades na Eq. 4.47 são medidas em relação a um volume de controle fixo.

Para a análise de máquinas rotativas, a Eq. 4.47 é freqüentemente empregada na forma escalar, considerando apenas a componente orientada segundo o eixo de rotação. Essa aplicação é ilustrada no Cap. 10.

A aplicação da Eq. 4.47 na análise de um regador giratório de gramados é ilustrada no Problema-Exemplo 4.14. Esse mesmo problema é considerado no Problema-Exemplo 4.15 utilizando-se a formulação do princípio do momento da quantidade de movimento para um volume de controle rotativo.

EXEMPLO 4.14 — Regador Giratório de Gramados: Análise de Volume de Controle Fixo

Um pequeno regador de gramados, giratório, é mostrado no esquema adiante. Para uma pressão manométrica de entrada de 20 kPa, a vazão total em volume de água é de 7,5 litros por minuto e o aparelho gira a 30 rpm. O diâmetro de cada jato é 4 mm. Calcule a velocidade do jato em relação a cada bocal do borrifador. Avalie o torque devido ao atrito no pivô do aparelho.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.14

DADO: Um pequeno regador de grama giratório como mostrado.

DETERMINAR: (a) A velocidade do jato em relação a cada bocal.
(b) O torque devido ao atrito no pivô.

SOLUÇÃO:

Aplique as equações da continuidade e do momento da quantidade de movimento, usando o volume de controle fixo que compreende os braços do regador.

Equações básicas: $$0=\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}}\rho\,d\forall}^{=0(1)}+\int_{\text{SC}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\vec{r}\times\vec{F}_s+\int_{\text{VC}}\vec{r}\times\vec{g}\rho\,d\forall+\vec{T}_{\text{eixo}}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}}\vec{r}\times\vec{V}\rho\,d\forall+\int_{\text{SC}}\vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\qquad(1)$$

onde todas as velocidades são medidas em relação às coordenadas inerciais *XYZ*.

Considerações: (1) Escoamento incompressível
(2) Escoamento uniforme em cada seção
(3) $\vec{\omega}$ = constante

Da continuidade, a velocidade do jato em relação ao bocal é dada por

$$V_{\text{rel}}=\frac{Q}{2A_{\text{jato}}}=\frac{Q}{2}\frac{4}{\pi D_{\text{jato}}^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times 7{,}5\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\times\frac{4}{\pi}\frac{1}{(4)^2\,\text{mm}^2}\times\frac{\text{m}^3}{1000\,\text{L}}\times 10^6\,\frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2}\times\frac{\text{min}}{60\,\text{s}}$$

$$V_{\text{rel}}=4{,}97\text{ m/s}$$

V_{rel}

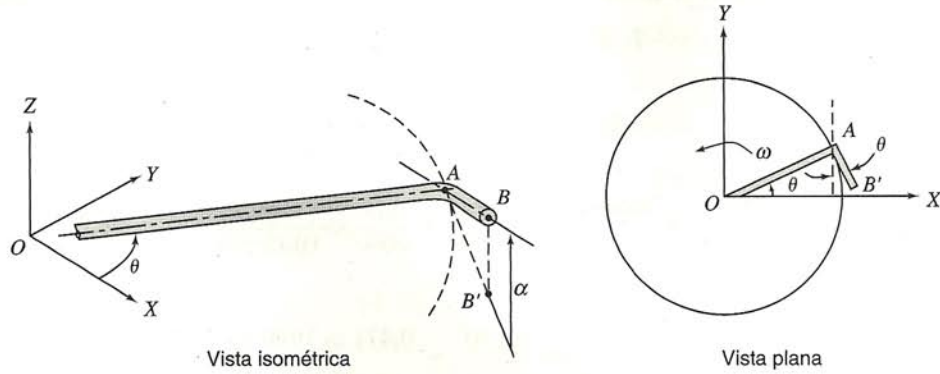
Considere, separadamente, os termos da equação do momento da quantidade de movimento. Uma vez que a pressão atmosférica atua sobre toda a superfície de controle e a força de pressão na entrada não provoca momento em torno de O, então $\vec{r}\times\vec{F}_s=0$. Os momentos das

forças de campo em cada um dos dois braços do borrifador são iguais e opostos; daí, o segundo termo no lado esquerdo da equação é nulo. O único torque externo atuando sobre o VC é o atrito no pivô. Ele se opõe ao movimento, de modo que

$$\vec{T}_{\text{eixo}} = -T_f \hat{K} \tag{2}$$

Para avaliar a integral do volume de controle no lado direito da Eq. 1, precisamos desenvolver expressões para o vetor posição, $\vec{r}$, e para o vetor velocidade, $\vec{V}$, (medido em relação ao sistema de coordenadas fixo *XYZ*) de cada elemento fluido no volume de controle.

Vista isométrica

Vista plana

OA situa-se no plano *XY*; *AB* é inclinada de um ângulo α em relação ao plano *XY*; o ponto *B'* é a projeção do ponto *B* no plano *XY*.

Vamos admitir que o comprimento, *L*, da ponta *AB*, seja pequeno quando comparado com o comprimento, *R*, do braço horizontal *OA*. Conseqüentemente, podemos desprezar o momento da quantidade de movimento do fluido nas pontas, comparado com o momento da quantidade de movimento nos braços horizontais.

Considere agora o escoamento no tubo horizontal *OA* de comprimento *R*. Denote a distância radial medida a partir de *O* por *r*. Em qualquer ponto no tubo, a velocidade do fluido em relação às coordenadas *XYZ* é a soma da velocidade relativa ao tubo $\vec{V}_t$ com a velocidade tangencial $\vec{T}_{\text{eixo}} \times \vec{r}$. Assim,

Vista plana

$$\vec{V} = \hat{I}(V_t \cos\theta - r\omega \operatorname{sen}\theta) + \hat{J}(V_t \operatorname{sen}\theta + r\omega\cos\theta)$$

O vetor posição é

$$\vec{r} = \hat{I}\, r\cos\theta + \hat{J}\, r \operatorname{sen}\theta$$

e $\vec{r} \times \vec{V} = \hat{K}(r^2\omega\cos^2\theta + r^2\omega \operatorname{sen}^2\theta) = \hat{K} r^2\omega$

Então,

$$\int_{\forall_{OA}} \vec{r} \times \vec{V} \rho\, d\forall = \int_O^R \hat{K} r^2 \omega \rho A\, dr = \hat{K} \frac{R^3\omega}{3} \rho A$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_{OA}} \vec{r} \times \vec{V} \rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{K} \frac{R^3\omega}{3}\rho A\right] = 0 \tag{3}$$

onde *A* é a área da seção transversal do tubo horizontal. Resultados idênticos são obtidos para o outro tubo horizontal no volume de controle.

Para avaliarmos o fluxo de momento da quantidade de movimento através da superfície de controle, precisamos de uma expressão para $\vec{r}_{\text{jato}} = \vec{r}_B$ e para a velocidade do jato $\vec{V}_j$, medida em relação ao sistema fixo de coordenadas *XYZ*. Da geometria do braço *OAB*,

$$\vec{r}_B = \hat{I}(R\cos\theta + L\cos\alpha \operatorname{sen}\theta) + \hat{J}(R\operatorname{sen}\theta - L\cos\alpha\cos\theta) + \hat{K} L \operatorname{sen}\alpha$$

Para $L << R$, então

$$\vec{r}_B = \hat{I} R\cos\theta + \hat{J} R \operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{V}_j = \vec{V}_{\text{rel}} + \vec{V}_{\text{ponta}} = \hat{I} V_{\text{rel}} \cos\alpha \operatorname{sen}\theta - \hat{J} V_{\text{rel}}\cos\alpha\cos\theta + \hat{K} V_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha - \hat{I}\omega R \operatorname{sen}\theta + \hat{J}\omega R\cos\theta$$

$$\vec{V}_j = \hat{I}(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\operatorname{sen}\theta - \hat{J}(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\cos\theta + \hat{K} V_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha$$

e

$$\vec{r}_B \times \vec{V}_j = \hat{I} R V_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta - \hat{J} R V_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - \hat{K} R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\vec{r}_B \times \vec{V}_j = \hat{I} R V_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta - \hat{J} R V_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - \hat{K} R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)$$

A integral de fluxo é avaliada para o escoamento que cruza a superfície de controle. Para o braço *OAB*,

$$\int_{\text{SC}} \vec{r} \times \vec{V}_j \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\hat{I} R V_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta - \hat{J} R V_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - \hat{K} R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\right] \rho \frac{Q}{2}$$

Os vetores velocidade e raio para o escoamento no braço esquerdo devem ser especificados em termos dos mesmos vetores unitários usados para o braço direito. No braço esquerdo, as componentes $\hat{I}$ e $\hat{J}$ do produto vetorial são de sinais opostos, uma vez que sen $(\theta + \pi) = -$sen θ e cos

$(\theta + \pi) = -\cos\theta$. Assim, para todo o VC,

$$\int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_j \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\hat{K}R(V_{rel}\cos\alpha - \omega R)\rho Q \quad (4)$$

Na linha de suprimento d'água, $\vec{r} \times \vec{V} = 0$ e, assim, o termo (4) representa o fluxo total de momento da quantidade de movimento através da superfície de controle.

Substituindo os termos (2), (3) e (4) na Eq. 1, obtemos

$$-T_f\hat{K} = -\hat{K}R(V_{rel}\cos\alpha - \omega R)\rho Q$$

ou

$$T_f = R(V_{rel}\cos\alpha - \omega R)\rho Q$$

Dos dados fornecidos,

$$\omega R = \frac{30 \text{ rot}}{\text{min}} \times 150 \text{ mm} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rot}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{m}}{1000 \text{ mm}} = 0{,}471 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Substituindo, temos

$$T_f = 150 \text{ mm}\left(4{,}97 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cos 30° - 0{,}471 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 7{,}5 \frac{\text{L}}{\text{min}}$$

$$\times \frac{\text{m}^3}{1000 \text{ L}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \times \frac{\text{m}}{1000 \text{ mm}}$$

$$T_f = 0{,}0718 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \longleftarrow T_f$$

Este problema foi incluído para ilustrar o emprego do princípio do momento da quantidade de movimento para um volume de controle inercial. Note que, ao usar a Eq. 4.47, o momento da quantidade de movimento, $\vec{r} \times \vec{V}$, deve ser medido em relação a um sistema de referência inercial. Este problema é abordado de novo utilizando um volume de controle não-inercial do Problema-Exemplo 4.15.

4.7.2 Equação para Volume de Controle Rotativo

Em problemas envolvendo elementos giratórios, como no caso do regador do Problema-Exemplo 4.14, é, em geral, conveniente expressar todas as velocidades do fluido em relação ao componente rotativo. O volume de controle mais conveniente é aquele não-inercial que gira com o componente. Nesta seção desenvolveremos uma formulação do princípio do momento da quantidade de movimento para um volume de controle não-inercial girando em torno de um eixo fixo no espaço.

Sistemas de referência inercial e não-inercial foram relacionados na Seção 4.6. A Fig. 4.5 mostrou a notação empregada. Para um sistema em um referencial inercial,

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \quad (4.3a)$$

O momento da quantidade de movimento de um sistema em movimento qualquer deve ser especificado em relação a coordenadas inerciais. Usando a notação da Fig. 4.5,

$$\vec{H}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} (\vec{R} + \vec{r}) \times \vec{V}_{XYZ}\, dm = \int_{V\!\!\!\!-(\text{sistema})} (\vec{R} + \vec{r}) \times \vec{V}_{XYZ}\, \rho\, dV\!\!\!\!-$$

Com $\vec{R} = 0$ o sistema xyz fica restrito à rotação dentro de XYZ, e a equação torna-se

$$\vec{H}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{XYZ}\, dm = \int_{V\!\!\!\!-(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{XYZ}\, \rho\, dV\!\!\!\!-$$

de modo que

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \frac{d}{dt}\int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{XYZ}\, dm$$

Uma vez que a massa de um sistema é constante,

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{V}_{XYZ})\, dm$$

ou

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V}_{XYZ} + \vec{r} \times \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\right) dm \quad (4.48)$$

Da análise da Seção 4.6,

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{rf} + \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.37)$$

Com xyz restrito à rotação pura, $\vec{V}_{rf} = 0$. O primeiro termo dentro da integral no lado direito da Eq. 4.48 é, então,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Assim, a Eq. 4.48 reduz-se a

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\, dm = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{a}_{XYZ}\, dm \quad (4.49)$$

Da Eq. 4.42, com $\vec{a}_{rf} = 0$ (uma vez que xyz não translada),

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

Substituindo na Eq. 4.49, obtemos

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times [\vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm$$

ou

$$\vec{T}_{\text{sistema}} - \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times [2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{a}_{xyz}\, dm = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\, dm \tag{4.50}$$

Nós podemos escrever o último termo como

$$\int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\, dm = \frac{d}{dt} \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\, dm = \left.\frac{d\vec{H}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.51}$$

O torque sobre o sistema é dado por

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \vec{r} \times \vec{F}_S + \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{g}\, dm + \vec{T}_{\text{eixo}} \tag{4.3c}$$

A relação entre as formulações de sistema e de volume de controle é

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \eta \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.26}$$

onde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \eta\, dm$$

Fazendo N igual a $\vec{H}_{xyz})_{\text{sistema}}$ e $\eta = \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}$ resulta

$$\left.\frac{d\vec{H}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz} \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.52}$$

Combinando as Eqs. 4.50, 4.51, 4.52 e 4.3c, obtemos

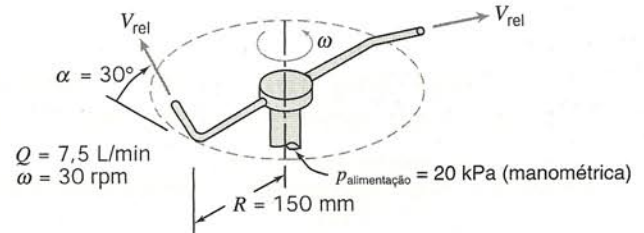
$$\vec{r} \times \vec{F}_S + \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{g}\, dm + \vec{T}_{\text{eixo}} - \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times [2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz} \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$$

Uma vez que o sistema e o volume de controle coincidem no instante t_0,

$$\vec{r} \times \vec{F}_S + \int_{\text{VC}} \vec{r} \times \vec{g} \rho\, d\forall + \vec{T}_{\text{eixo}} - \int_{\text{VC}} \vec{r} \times [2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}] \rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz} \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.53}$$

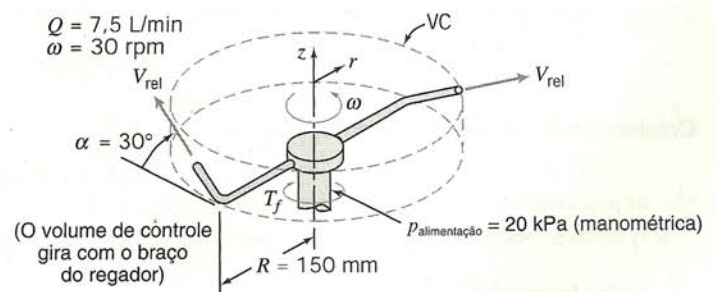
A Eq. 4.53 é a formulação do princípio do momento da quantidade de movimento para um volume de controle (não-inercial) girando em torno de um eixo fixo no espaço. Todas as velocidades do fluido e taxas de variação na Eq. 4.53 são avaliadas em relação ao volume de controle. A aplicação da equação a um regador giratório é ilustrada no Problema-Exemplo 4.15.

EXEMPLO 4.15 — Regador Giratório de Gramados: Análise de Volume de Controle Rotativo

Um pequeno regador de gramados giratório é mostrado no esquema adiante. Para uma pressão manométrica de entrada de 20 kPa, a vazão em volume total de água é de 7,5 litros por minuto, e o aparelho gira a 30 rpm. O diâmetro de cada jato é de 4 mm. Calcule a velocidade do jato em relação a cada bocal do borrifador. Avalie o torque devido ao atrito no pivô do aparelho.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.15

DADO: Um pequeno regador giratório de gramado como mostrado.

DETERMINAR: **(a)** A velocidade do jato em relação a cada bocal.
(b) O torque devido ao atrito no pivô.

SOLUÇÃO:
Aplique as equações da continuidade e do momento da quantidade de movimento usando o volume de controle fixo que compreende os braços do borrifador.

Equações básicas: $0 = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{\text{VC}} \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$ (o primeiro termo $= 0(1)$)

$$\vec{r}\times\vec{F}_S+\int_{VC}\vec{r}\times\vec{g}\rho\,d\forall+\vec{T}_{\text{eixo}}-\int_{VC}\vec{r}\times[2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})+\overbrace{\dot{\vec{\omega}}}^{=0(3)}\times\vec{r}]\rho\,d\forall$$

$$=\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)}\int_{VC}\vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\,d\forall+\int_{SC}\vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \quad (4.53)$$

Considerações: (1) Escoamento permanente em relação ao VC rotativo
(2) Escoamento uniforme em cada seção
(3) $\vec{\omega}$ = constante

Da equação da continuidade,

$$V_{\text{rel}}=\frac{Q}{2A_{\text{jato}}}=\frac{Q}{2}\frac{4}{\pi D_{\text{jato}}^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times 7{,}5\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\times\frac{4}{\pi}\frac{1}{(4)^2\,\text{mm}^2}\times\frac{\text{m}^3}{1000\,\text{L}}\times 10^6\,\frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2}\times\frac{\text{min}}{60\,\text{s}}$$

$$V_{\text{rel}}=4{,}97\text{ m/s}$$

Considere, separadamente, os termos na equação do momento da quantidade de movimento. Como no Problema-Exemplo 4.14, o único torque externo atuando sobre o VC é o devido ao atrito no pivô. Ele opõe-se ao movimento, de forma que

$$\vec{T}_{\text{eixo}}=-T_f\hat{k} \quad (1)$$

A integral à esquerda é avaliada para o escoamento *dentro* do VC. Denotemos a velocidade e a área dentro dos tubos do borrifador por V_{VC} e A_{VC}, respectivamente. Então, para *um lado*, o primeiro termo é

$$\int_{VC}\vec{r}\times[2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz}]\rho\,d\forall=\int_0^R r\hat{e}_r\times[2\omega\hat{k}\times V_{VC}\hat{e}_r]\rho A_{VC}\,dr$$

$$=\int_0^R r\hat{e}_r\times 2\omega V_{VC}\hat{e}_\theta\rho A_{VC}\,dr$$

$$=\int_0^R 2\omega V_{VC}\rho A_{VC}\,r\,dr\,\hat{k}=\omega R^2\rho V_{VC}A_{VC}\hat{k} \qquad \{\text{um lado}\}$$

(O escoamento na parte curva do tubo não tem componente r de velocidade, então, não contribui para a integral.)

Da continuidade, $Q=2V_{VC}A_{VC}$, assim, para *ambos os lados*, a integral torna-se

$$\int_{VC}\vec{r}\times[2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz}]\rho\,d\forall=\omega R^2\rho Q\hat{k} \quad (2)$$

A segunda integral é avaliada como

$$\int_{VC}\vec{r}\times[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\rho\,d\forall=\int_{VC}r\hat{e}_r\times[\omega\hat{k}\times(\omega\hat{k}\times r\hat{e}_r)]\rho\,d\forall$$

$$=\int_{VC}r\hat{e}_r\times[\omega\hat{k}\times\omega r\hat{e}_\theta]\rho\,d\forall=\int_{VC}r\hat{e}_r\times\omega^2 r(-\hat{e}_r)\rho\,d\forall=0$$

de forma que não contribui para o torque.

A integral no lado direito da Eq. 4.53 é avaliada para o escoamento cruzando a superfície de controle. Para o braço direito do borrifador,

$$\int_{SC}\vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}=R\hat{e}_r\times V_{\text{rel}}[\cos\alpha(-\hat{e}_\theta)+\text{sen}\,\alpha\hat{k}]\{+\rho V_{\text{rel}}A_{\text{jato}}\}$$

$$=RV_{\text{rel}}[\cos\alpha(-\hat{k})+\text{sen}\,\alpha(-\hat{e}_\theta)]\rho\frac{Q}{2}$$

Os vetores velocidade e raio para o escoamento no braço esquerdo devem ser especificados em termos dos mesmos vetores unitários usados para o braço direito. No braço esquerdo do borrifador, a componente θ tem a mesma magnitude, mas sinal oposto, então, se anula. Para todo o VC,

$$\int_{SC}\vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}=-RV_{\text{rel}}\cos\alpha\,\rho Q\hat{k} \quad (3)$$

Combinando os termos (1), (2) e (3), obtemos

$$-T_f\hat{k}-\omega R^2\rho Q\hat{k}=-RV_{\text{rel}}\cos\alpha\,\rho Q\hat{k}$$

ou

$$T_f=R(V_{\text{rel}}\cos\alpha-\omega R)\rho Q$$

Dos dados fornecidos,

Reg. 184.209/03
...e Federal do Rio G. do N...
...TECA CENTRAL...
...MAMEDE"

$$\omega R = 30\,\frac{\text{rot}}{\text{min}} \times 150\text{ mm} \times 2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{rot}} \times \frac{\text{min}}{60\text{ s}} \times \frac{\text{m}}{1000\text{ mm}} = 0{,}471\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Substituindo, temos

$$T_f = 150\text{ mm}\left(4{,}97\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cos 30° - 0{,}471\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 7{,}5\,\frac{\text{L}}{\text{min}}$$

$$\times \frac{\text{m}^3}{1000\text{ L}} \times \frac{\text{min}}{60\text{ s}} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} \times \frac{\text{m}}{1000\text{ mm}}$$

$$T_f = 0{,}0718\text{ N}\cdot\text{m} \qquad T_f$$

{ Este problema foi incluído para ilustrar o emprego da equação do momento da quantidade de movimento para um volume de controle rotativo (não-inercial). O resultado é idêntico ao obtido usando a análise do volume de controle fixo do Problema-Exemplo 4.14. }

4.8 A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

A primeira lei da termodinâmica é um enunciado da conservação da energia. Lembre-se que a sua formulação para um sistema é

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.4a}$$

onde a energia total do sistema é dada por

$$E_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} e\,dm = \int_{V\!\!\!-(\text{sistema})} e\rho\,dV\!\!\!- \tag{4.4b}$$

e

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Na Eq. 4.4a, a taxa de transferência de calor, $\dot{Q}$, é positiva quando calor é adicionado ao sistema pelo meio que o cerca; a taxa de trabalho, $\dot{W}$, é positiva quando trabalho é realizado pelo sistema sobre o meio que o cerca.

A fim de deduzir a formulação para volume de controle, da primeira lei da termodinâmica, estabelecemos

$$N = E \qquad \text{e} \qquad \eta = e$$

na Eq. 4.11 e obtemos

$$\left.\frac{dE}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\,dV\!\!\!- + \int_{\text{SC}} e\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.54}$$

Uma vez que o sistema e o volume de controle coincidiam no instante t_0,

$$[\dot{Q} - \dot{W}]_{\text{sistema}} = [\dot{Q} - \dot{W}]_{\text{volume de controle}}$$

À luz disso, as Eqs. 4.4a e 4.54 fornecem a formulação para volume de controle da primeira lei da termodinâmica

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\,dV\!\!\!- + \int_{\text{SC}} e\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.55}$$

onde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Note que, para escoamento permanente, o primeiro termo no lado direito da Eq. 4.55 é nulo.

É a Eq. 4.55 a forma da primeira lei utilizada na termodinâmica? Mesmo para escoamento permanente, a Eq. 4.55 não é bem a mesma forma utilizada na aplicação da primeira lei a problemas de volume de controle. Para obter uma formulação adequada e conveniente à solução de problemas, examinemos mais detidamente o termo de trabalho, $\dot{W}$.

4.8.1 Taxa de Trabalho Realizado por um Volume de Controle

O termo $\dot{W}$ na Eq. 4.55 tem um valor numérico positivo quando o trabalho é realizado pelo volume de controle sobre o meio que o cerca. A taxa de trabalho realizado sobre o volume de controle é de sinal oposto ao realizado pelo volume de controle.

A taxa de trabalho realizado pelo volume de controle é convenientemente subdividida em quatro classificações,

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_{\text{normal}} + \dot{W}_{\text{cisalhamento}} + \dot{W}_{\text{outros}}$$

Vamos considerá-las separadamente:

1. Trabalho de Eixo

Designaremos o trabalho de eixo por W_s e, assim, a taxa de trabalho transferido para fora através da superfície de controle por trabalho de eixo será $\dot{W}_s$.

2. Trabalho Realizado por Tensões Normais na Superfície de Controle

Lembre-se que o trabalho requer que uma força aja através de uma distância. Então, quando a força, $\vec{F}$, age por uma distância infinitesimal, $d\vec{s}$, o trabalho realizado é dado por

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

Para se obter a taxa em que o trabalho é realizado pela força, dividiremos pelo incremento de tempo Δt, e tomaremos o limite quando $\Delta t \to 0$. Assim, a taxa de trabalho realizado pela força, $\vec{F}$, é dada por

$$\dot{W} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{\Delta t} \qquad \text{ou} \qquad \dot{W} = \vec{F}\cdot\vec{V}$$

A taxa de trabalho realizado sobre um elemento de área, $d\vec{A}$, da superfície de controle, pelas tensões normais, é dada por

$$d\vec{F}\cdot\vec{V} = \sigma_{nn}d\vec{A}\cdot\vec{V}$$

Uma vez que o trabalho que sai através das fronteiras do volume de controle é o negativo do trabalho realizado sobre o volume de controle, a taxa total de trabalho para fora do volume de controle, decorrente das tensões normais, é dada por

$$\dot{W}_{\text{normal}} = -\int_{\text{SC}} \sigma_{nn}\, d\vec{A} \cdot \vec{V} = -\int_{\text{SC}} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

3. Trabalho Realizado por Tensões de Cisalhamento na Superfície de Controle

Assim como trabalho é realizado pelas tensões normais nas fronteiras do volume de controle, também pode ser realizado pelas tensões de cisalhamento.

A força de cisalhamento atuando sobre um elemento de área da superfície de controle é dada por

$$d\vec{F} = \vec{\tau}\, dA$$

onde o vetor tensão de cisalhamento, $\vec{\tau}$, é a tensão de cisalhamento que atua no plano de dA.

A taxa de trabalho realizado sobre toda a superfície de controle pelas tensões de cisalhamento, é dada por

$$\int_{\text{SC}} \vec{\tau}\, dA \cdot \vec{V} = \int_{\text{SC}} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA$$

Uma vez que o trabalho que sai através das fronteiras do volume de controle é o negativo do trabalho realizado sobre o volume de controle, então, a taxa total de trabalho para fora do volume de controle, decorrente das tensões de cisalhamento, é dada por

$$\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = -\int_{\text{SC}} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA$$

Essa integral é melhor expressa com três termos

$$\begin{aligned}\dot{W}_{\text{cisalhamento}} &= -\int_{\text{SC}} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA \\ &= -\int_{A(\text{eixos})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA - \int_{A(\text{superfície sólida})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA \\ &\quad - \int_{A(\text{aberturas})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA\end{aligned}$$

Nós já levamos em conta o primeiro termo, visto que incluímos $\dot{W}_S$ anteriormente. Em superfícies sólidas, $\vec{V} = 0$, de modo que o segundo termo é nulo (para um volume de controle fixo). Então,

$$\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = -\int_{A(\text{aberturas})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA$$

Esse último termo pode ser feito nulo pela escolha apropriada das superfícies de controle. Se escolhermos uma superfície de controle que corte cada passagem perpendicularmente ao escoamento, então $d\vec{A}$ é paralelo a $\vec{V}$. Uma vez que $\vec{\tau}$ está no plano de dA, segue-se que $\vec{\tau}$ é perpendicular a $\vec{V}$. Assim, para uma superfície de controle perpendicular a $\vec{V}$,

$$\vec{\tau} \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{W}_{\text{cisalhamento}} = 0$$

4. Outros Trabalhos

Energia elétrica poderia ser acrescentada ao volume de controle. Também energia eletromagnética, por exemplo, em feixes de radar ou de laser, poderia ser absorvida. Na maioria dos problemas, tais contribuições estarão ausentes, mas devemos anotá-las em nossa formulação geral.

Com a determinação de todos os termos de $\dot{W}$, obtemos

$$\dot{W} = \dot{W}_s - \int_{\text{SC}} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} + \dot{W}_{\text{cisalhamento}} + \dot{W}_{\text{outros}} \tag{4.56}$$

4.8.2 Equação do Volume de Controle

Substituindo a expressão para $\dot{W}$ da Eq. 4.56 na Eq. 4.55, obtemos

$$\dot{Q} - \dot{W}_s + \int_{\text{SC}} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{outros}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} e\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Rearranjando essa equação, obtemos

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{outros}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} e\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{\text{SC}} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Como $\rho = 1/v$, onde v é o volume específico, segue-se que

$$\int_{\text{SC}} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{SC}} \sigma_{nn} v\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Por conseguinte,

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{outros}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} (e - \sigma_{nn} v)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Os efeitos viscosos podem fazer a tensão normal, σ_{nn}, diferente do negativo da pressão termodinâmica, $-p$. Contudo, para a maioria dos escoamentos de interesse comum da engenharia, $\sigma_{nn} \simeq -p$. Então,

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{outros}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Finalmente, substituindo $e = u + V^2/2 + gz$ no último termo, obtemos a forma familiar da formulação da primeira lei para um volume de controle,

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{outros}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.57}$$

Cada termo de trabalho na Eq. 4.57 representa a taxa de trabalho realizado pelo volume de controle sobre o meio à sua volta.

EXEMPLO 4.16 — Compressor: Análise da Primeira Lei

Ar a 14,7 psia, 70°F, entra num compressor com velocidade desprezível e é descarregado a 50 psia, 100°F através de um tubo com 1 pé² de área. A vazão em massa é 20 lbm/s. A potência fornecida ao compressor é de 600 hp. Determine a taxa de transferência de calor.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.16

DADO: Ar entrando em um compressor em ① e saindo em ② com as condições conforme mostrado. A razão em massa de ar é de 20 lbm/s e a potência fornecida ao compressor é de 600 hp.

DETERMINAR: A taxa de transferência de calor.

SOLUÇÃO:

Equações Básicas:

$$0 = \cancelto{0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{\text{VC}} \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \cancelto{0(4)}{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}} = \cancelto{0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Considerações:
(1) Escoamento permanente
(2) Propriedades uniformes nas seções de entrada e saída
(3) Trate o ar como um gás ideal, $p = \rho RT$
(4) A área do VC em ① e ② é perpendicular à velocidade, então $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = 0$
(5) $z_1 = z_2$
(6) A energia cinética é desprezível na entrada

Com as considerações listadas, a primeira lei torna-se:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{\text{SC}} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{\text{SC}} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad \{h \equiv u + pv\}$$

ou

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \int_{\text{SC}} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Para propriedades uniformes (consideração 2), podemos escrever

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \left(h_1 + \cancelto{\approx 0(6)}{\frac{V_1^2}{2}} + gz_1\right)\{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right)\{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

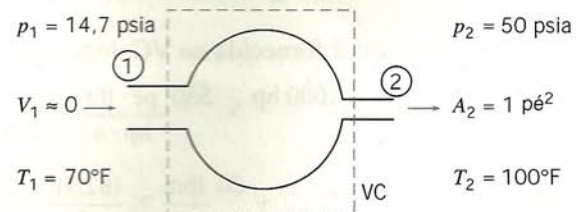
Para escoamento permanente, da conservação da massa,

$$\int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Portanto, $-|\rho_1 V_1 A_1| + |\rho_2 V_2 A_2| = 0$, ou $|\rho_1 V_1 A_1| = |\rho_2 V_2 A_2| = \dot{m}$. Então, podemos escrever

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m}\left[(h_2 - h_1) + \frac{V_2^2}{2} + g\cancelto{0(5)}{(z_2 - z_1)}\right]$$

Considere que o ar comporta-se como um gás ideal, com c_p constante. Então, $h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$, e

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m}\left[c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2}{2}\right]$$

Da equação da continuidade, $|\vec{V}_2| = \dot{m}/\rho_2 A_2$. Como $p_2 = \rho_2 R T_2$,

$$|\vec{V}_2| = \frac{\dot{m}}{A_2}\frac{RT_2}{p_2} = 20\,\frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times \frac{1}{1\,\text{pé}^2} \times 53{,}3\,\frac{\text{pé}\cdot\text{lbf}}{\text{lbm}\cdot{}^\circ\text{R}} \times 560^\circ\text{R} \times \frac{\text{pol.}^2}{50\,\text{lbf}} \times \frac{\text{pé}^2}{144\,\text{pol.}^2}$$

$$|\vec{V}_2| = 82{,}9\ \text{pés/s}$$

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m}c_p(T_2 - T_1) + \dot{m}\frac{V_2^2}{2}$$

Note que a potência é fornecida *ao* VC, logo $\dot{W}_s = -600$ hp, e

$$\dot{Q} = -600\,\text{hp} \times 550\,\frac{\text{pé}\cdot\text{lbf}}{\text{hp}\cdot\text{s}} \times \frac{\text{Btu}}{778\,\text{pé}\cdot\text{lbf}} + 20\,\frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times 0{,}24\,\frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot{}^\circ\text{R}} \times 30^\circ\text{R}$$

$$+\ 20\,\frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times \frac{(82{,}9)^2}{2}\frac{\text{pé}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{slug}}{32{,}2\,\text{lbm}} \times \frac{\text{Btu}}{778\,\text{pé}\cdot\text{lbf}} \times \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{pé}}$$

$$\dot{Q} = -277\ \text{Btu/s} \qquad \{\text{rejeição de calor}\}\ \dot{Q}$$

Além de demonstrar uma aplicação direta da primeira lei, este problema ilustra a necessidade de se manter a coerência das unidades.

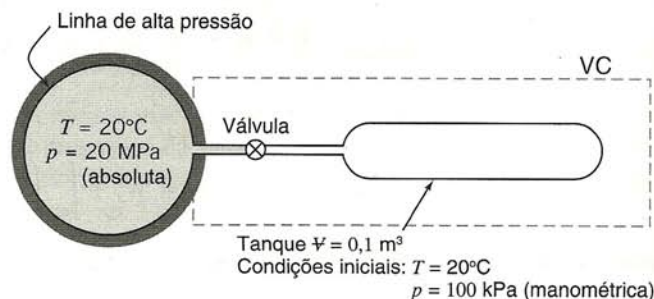
EXEMPLO 4.17 — Enchimento de um Tanque: Análise da Primeira Lei

Um tanque de 0,1 m³ de volume está ligado a uma linha de ar de alta pressão; tanto a linha quanto o tanque estão inicialmente a uma temperatura uniforme de 20°C. A pressão manométrica inicial no tanque é de 100 kPa. A pressão absoluta na linha é de 2,0 MPa; a linha é grande o bastante para que sua temperatura e sua pressão possam ser consideradas constantes. A temperatura do tanque é monitorada por um termopar de resposta rápida. No instante seguinte à abertura da válvula, a temperatura no tanque sobe à taxa de 0,05°C/s. Determine a vazão em massa instantânea de ar entrando no tanque, se a transferência de calor é desprezível.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.17

DADO: Linha de suprimento de ar e tanque conforme mostrado. Em $t = 0^+$, $\partial T/\partial t = 0{,}05$°C/s.

DETERMINAR: $\dot{m}$ em $t = 0^+$.

SOLUÇÃO:
Escolha o VC mostrado e aplique a equação da energia.

Linha de alta pressão
VC
T = 20°C
p = 20 MPa
(absoluta)
Válvula
Tanque $\forall$ = 0,1 m³
Condições iniciais: T = 20°C
p = 100 kPa (manométrica)

Equação básica:

$$\overset{=0(1)}{\cancel{\dot{Q}}} - \overset{=0(2)}{\cancel{\dot{W}_s}} - \overset{=0(3)}{\cancel{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}}} - \overset{=0(4)}{\cancel{\dot{W}_{\text{outros}}}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} (e + pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$e = u + \overset{\simeq 0(5)}{\cancel{\frac{V^2}{2}}} + \overset{\simeq 0(6)}{\cancel{gz}}$$

Considerações: (1) $\dot{Q} = 0$ (dado)
(2) $\dot{W}_s = 0$
(3) $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = 0$
(4) $\dot{W}_{\text{outros}} = 0$
(5) As velocidades na linha e no tanque são pequenas
(6) Despreze a energia potencial
(7) Escoamento uniforme na entrada do tanque
(8) Propriedades uniformes no tanque
(9) Gás ideal, $p = \rho RT$, $du = c_v dT$

Então,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u_{\text{tanque}}\, \rho\, d\text{V} + (u_{\text{linha}} + pv)\{-|\rho VA|\}$$

Mas, inicialmente, T é uniforme, logo, $u_{\text{tanque}} = u_{\text{linha}} = u$, e

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\text{V} + (u + pv)\{-|\rho VA|\}$$

Uma vez que as propriedades no tanque são uniformes, $/t$ pode ser substituído por d/dt, e

$$0 = \frac{d}{dt}[uM] - (u + pv)\dot{m}$$

ou

$$0 = u\frac{dM}{dt} + M\frac{du}{dt} - u\dot{m} - pv\dot{m} \tag{1}$$

O termo dM/dt pode ser avaliado da continuidade:

Equação básica: $0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\text{V} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$

$$0 = \frac{dM}{dt} + \{-|\rho VA|\} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dM}{dt} = \dot{m}$$

Substituindo na Eq. 1, vem

$$0 = \cancel{u\dot{m}} + M\frac{du}{dt} - \cancel{u\dot{m}} - pv\dot{m} = Mc_v\frac{dT}{dt} - pv\dot{m}$$

ou

$$\dot{m} = \frac{Mc_v(dT/dt)}{pv} = \frac{\rho \text{V} c_v(dT/dt)}{pv} = \frac{\rho \text{V} c_v(dT/dt)}{RT} \tag{2}$$

Mas em $t = 0$, $p_{\text{tanque}} = 100$ kPa (manométrica), e

$$\rho = \rho_{\text{tanque}} = \frac{p_{\text{tanque}}}{RT} = (1{,}00 + 1{,}01)10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{293\ \text{K}} = 2{,}39\ \text{kg/m}^3$$

Substituindo na Eq. 2, obtemos

$$\dot{m} = 2{,}39\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0{,}1\ \text{m}^3 \times 717\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 0{,}05\ \frac{\text{K}}{\text{s}} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{293\ \text{K}} \times 1000\ \frac{\text{g}}{\text{kg}}$$

$$\dot{m} = 0{,}102\ \text{g/s} \qquad \dot{m}$$

{Este problema ilustra a aplicação da equação da energia a uma situação de escoamento não-permanente.}

4.9 A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

Lembre-se que a formulação da segunda lei para um sistema é

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{\text{sistema}} \geq \frac{1}{T}\dot{Q} \tag{4.5a}$$

onde a entropia total do sistema é dada por

$$S_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} s\, dm = \int_{\text{V}(\text{sistema})} s\rho\, d\text{V} \tag{4.5b}$$

Para deduzir a formulação para volume de controle da segunda lei da termodinâmica, estabelecemos

$$N = S \qquad \text{e} \qquad \eta = s$$

na Eq. 4.11 e obtemos

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} s\rho\, d\text{V} + \int_{SC} s\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.58}$$

O sistema e o volume de controle coincidem em t_0; logo, na Eq. 4.5a,

$$\left.\frac{1}{T}\dot{Q}\right)_{\text{sistema}} = \left.\frac{1}{T}\dot{Q}\right)_{VC} = \int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA$$

À luz disso, as Eqs. 4.5a e 4.58 fornecem a formulação para volume de controle da segunda lei da termodinâmica

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} s\rho\, d\text{V} + \int_{SC} s\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \geq \int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA \tag{4.59}$$

Na Eq. 4.59, o termo $(\dot{Q}/A)$ representa o fluxo de calor por unidade de área entrando no volume de controle através do elemento de área dA. Para avaliar o termo

$$\int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA$$

tanto o fluxo local de calor, $(\dot{Q}/A)$, quanto a temperatura local, T, devem ser conhecidos para cada elemento de área da superfície de controle.

4.10 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o estudo do Capítulo 4, você deverá ser capaz de:

1. Escrever cada uma das cinco leis básicas (conservação da massa, segunda lei de Newton, princípio do momento da quantidade de movimento, primeira lei da termodinâmica e segunda lei da termodinâmica) para um sistema, como uma equação de taxa temporal.
2. Se a propriedade extensiva nas equações de taxa do item 1 dos Objetivos em Resumo for denotada por N, uma propriedade intensiva correspondente, designada η, é definida em cada uma das equações básicas.
3. Escrever a equação que relaciona a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva arbitrária, N, de um sistema, com as variações da propriedade associada a um volume de controle e estabelecer o significado físico de cada quantidade na equação.
4. Escrever a formulação para volume de controle da conservação da massa e declarar o significado físico de cada termo na equação. Aplicar a equação na solução de problemas de escoamento.
5. Escrever a formulação para volume de controle da equação da quantidade de movimento para um volume de controle inercial, e declarar o significado físico de cada termo na equação. Aplicar a equação na solução de problemas de escoamento.

*6. Enunciar a relação entre propriedades dos fluidos (a equação de Bernoulli) que resulta da aplicação da equação da quantidade de movimento a um volume de controle diferencial. Listar as restrições ao emprego da equação de Bernoulli.

7. Escrever a formulação para volume de controle da equação da quantidade de movimento para um volume de controle com aceleração retilínea, e enunciar o significado físico de cada termo na equação. Aplicar a equação na solução de problemas de escoamento.

*8. Escrever a formulação para volume de controle da equação da quantidade de movimento para um volume de controle com aceleração arbitrária, e enunciar o significado físico de cada termo na equação. Aplicar a equação na solução de problemas.

*9. Escrever a formulação para volume de controle do princípio do momento da quantidade de movimento para (a) um volume de controle fixo e (b) um volume de controle rotativo, e enunciar o significado físico de cada termo na equação. Aplicar a equação na solução de problemas de escoamento.

10. Escrever a formulação para volume de controle da primeira lei da termodinâmica e enunciar o significado físico de cada termo na equação. Aplicar a equação na solução de problemas de escoamento.
11. Escrever a formulação para volume de controle da segunda lei da termodinâmica e enunciar o significado físico de cada termo na equação. Aplicar a equação na solução de problemas de escoamento.
12. Resolver os problemas no final deste capítulo que se relacionam com o material que você estudou.

*Estes objetivos aplicam-se às seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

PROBLEMAS

4.1 A fim de resfriar um pacote com seis latas de refrigerante tão depressa quanto possível, ele é colocado num congelador por um período de 1 hora. Se a temperatura ambiente é de 25°C e a bebida resfriada está em uma temperatura final de 5°C, determine a variação na sua entropia específica.

4.2 Uma investigação policial de marcas de pneus mostrou que um carro, percorrendo uma rua nivelada e reta, tinha deslizado antes de parar por uma distância total de 50 m após a aplicação dos freios. O coeficiente de atrito entre os pneus e o pavimento é estimado ser $\mu = 0,6$. Qual era a velocidade mínima provável do carro quando os freios foram aplicados?

4.3 Um jato comercial Boeing 777-200 pesa, totalmente carregado, 715.000 lbf. O piloto leva as duas turbinas ao empuxo máximo de decolagem de 102.000 lbf cada, antes de soltar os freios. Desprezando as resistências aerodinâmicas e de rolamento, estime o comprimento de pista e o tempo mínimos para atingir a velocidade de decolagem de 140 mph. Considere que o empuxo das turbinas permaneça constante durante a corrida no solo.

4.4 Uma pequena bola de aço de raio r, colocada em cima de uma esfera muito maior, de raio R, começa a rolar sob a influência da gravidade. As resistências de rolamento e do ar são desprezíveis. À medida que a velocidade da bola aumenta, ela deixa a superfície da esfera e torna-se um projétil. Determine o ponto em que a bola perde o contato com a esfera.

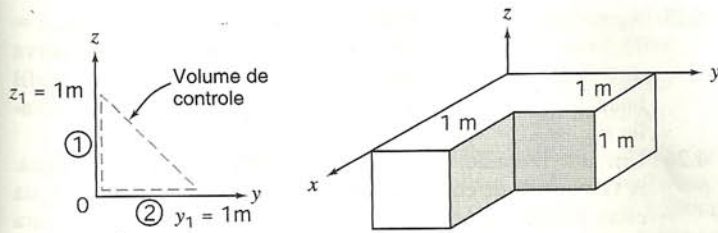
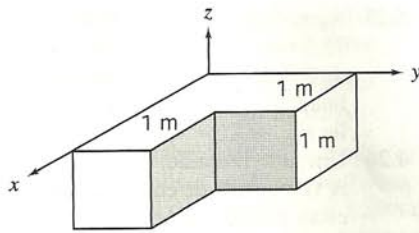
4.5 A taxa média de perda de calor do corpo humano, não trabalhando ativamente, é cerca de 300 Btu/h. Suponha que num auditório com volume de aproximadamente $1,2 \times 10^7$ pés^3, com 6000 pessoas, o sistema de ventilação falha. Qual o aumento da energia interna do ar do auditório, durante os primeiros 15 minutos após o defeito? Considerando o auditório e as pessoas como um sistema, e admitindo que não há transferência de calor para o meio ambiente, qual a variação da energia interna do sistema? Como você explicaria o fato de que a temperatura do ar aumenta? Estime a taxa de aumento de temperatura nessas condições.

4.6 Ar a 20°C e a uma pressão absoluta de 1 atm é comprimido adiabaticamente, sem atrito, até uma pressão absoluta de 3 atm. Determine a variação de energia interna.

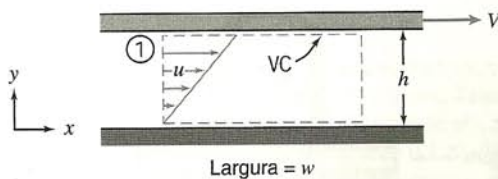
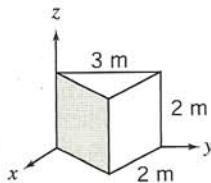
4.7 Uma lata de bebida em alumínio deve ser resfriada num refrigerador onde a temperatura é $T_r = 5$°C. A taxa de transferência de calor da lata é $\dot{Q} = -k(T - T_r)$, onde $k = 0,25$ W/°C. Calcule o tempo requerido para resfriar a lata até 7°C, se a massa da lata é equivalente a 390 g de água e sua temperatura inicial é 25°C. Calcule a energia que deve ser removida.

4.8 A massa de uma lata de bebida em alumínio é 20 g. O seu diâmetro e altura são 65 e 120 mm, respectivamente. Quando cheia, a lata contém 354 mililitros de refrigerante com densidade relativa SG = 1,05. Avalie a altura do centro de gravidade da lata como função do nível do líquido. A que nível corresponderia a menor probabilidade de a lata tombar, quando submetida a uma aceleração constante lateral? Calcule o coeficiente mínimo de atrito estático para o qual a lata cheia tom-baria em vez de deslizar sobre uma superfície horizontal. Trace um gráfico do coeficiente de atrito estático mínimo para o qual a lata tombaria em vez de deslizar em uma superfície horizontal, como função do nível de bebida dentro da lata.

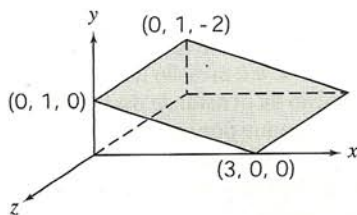
4.9 Um campo de escoamento é dado por $\vec{V} = az\hat{j} + b\hat{k}$, onde $a = 10\ s^{-1}$ e $b = 5$ m/s. Para uma profundidade w perpendicular ao diagrama, um elemento de área ① pode ser representado por $wdz\,(-\hat{j})$, e um elemento de área ② por $wdy(-\hat{k})$. (Note que ambos são traçados *para fora* do VC, daí o sinal de menos.)

(a) Encontre uma expressão para $\vec{V}\cdot d\vec{A}_1$.
(b) Avalie $\int_{A1} \vec{V}\cdot d\vec{A}_1$.
(c) Encontre uma expressão para $\vec{V}\cdot d\vec{A}_2$.
(d) Encontre uma expressão para $\vec{V}(\vec{V}\cdot d\vec{A}_2)$.
(e) Avalie $\int_{A2} \vec{V}(\vec{V}\cdot d\vec{A}_2)$.

P4.9 P4.10

4.10 A área sombreada mostrada está num escoamento onde o campo de velocidade é dado por $\vec{V} = ax\hat{i} - by\hat{j}$; $a = b = 1\ \text{s}^{-1}$, e as coordenadas são medidas em metros. Determine a vazão volumétrica e o fluxo de quantidade de movimento através da área sombreada.

4.11 Obtenha expressões para a vazão volumétrica e para o fluxo de quantidade de movimento através da seção transversal ① do VC mostrado no diagrama.

P4.11

P4.12

4.12 A área sombreada mostrada está em um escoamento onde o campo de velocidades é dado por $\vec{V} = -ax\hat{i} + by\hat{j} + c\hat{k}$; $a = b = 1\ \text{s}^{-1}$ e $c = 1$ m/s. Escreva uma expressão vetorial para um elemento da área sombreada. Determine as integrais $\int(\vec{V}\cdot d\vec{A})$ e $\int\vec{V}(\vec{V}\cdot d\vec{A})$ sobre a área sombreada.

4.13 Um campo de escoamento é dado por $\vec{V} = ay\hat{i} - b\hat{j}$, onde $a = 2\ \text{s}^{-1}$ e $b = 1$ pé/s. Determine a vazão volumétrica e o fluxo de quantidade de movimento através da superfície sombreada. Todas as dimensões são em pés.

P4.13

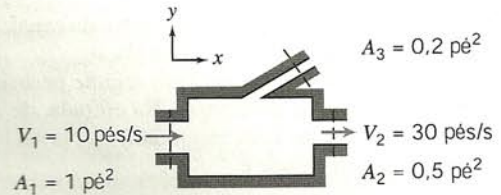
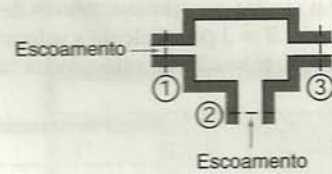
4.14 A distribuição de velocidades para escoamento laminar em um longo tubo circular de raio R é dado pela expressão unidimensional,

$$\vec{V} = u\hat{i} = u_{\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\hat{i}$$

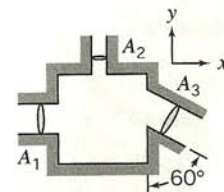
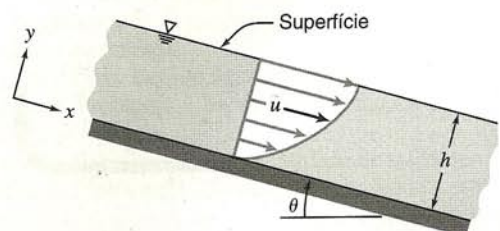
Para esse perfil, obtenha expressões para a vazão volumétrica e para o fluxo de quantidade de movimento através da seção normal ao eixo do tubo.

4.15 Para o escoamento do Problema 4.11, obtenha uma expressão para o fluxo de energia cinética, $\int(V^2/2)\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$, através da seção ① do VC mostrado.

4.16 Para o escoamento do Problema 4.14, obtenha uma expressão para o fluxo de energia cinética, $\int(V^2/2)\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$, através da seção normal ao eixo do tubo.

4.17 Considere o escoamento incompressível e permanente através do dispositivo mostrado. Determine a magnitude e o sentido da vazão volumétrica através da abertura 3.

P4.17

P4.18

4.18 No escoamento incompressível através do dispositivo mostrado, as velocidades podem ser consideradas uniformes nas entradas e saídas das seções. Se o fluido escoando for a água, obtenha uma expressão para a vazão mássica na seção ③. As seguintes condições são conhecidas: $A_1 = 0{,}1\ \text{m}^2$, $A_2 = 0{,}2\ \text{m}^2$, $A_3 = 0{,}15\ \text{m}^2$, $V_1 = 5$ m/s e $V_2 = 10 + 5\cos(4\pi t)$ m/s.

4.19 Um fluido com uma densidade de 1.050 kg/m³ está escoando em regime permanente através da seção retangular mostrada. Dados $A_1 = 0{,}05\ \text{m}^2$, $A_2 = 0{,}01\ \text{m}^2$, $A_3 = 0{,}06\ \text{m}^2$, $\vec{V}_1 = 4\hat{i}$ m/s, e $\vec{V}_2 = -8\hat{j}$ m/s, determine a velocidade $\vec{V}_3$.

P4.19

P4.20

4.20 Óleo escoa em uma fina camada, em regime permanente, para baixo em um plano inclinado. O perfil de velocidades é dado por:

$$u = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu}\left[hy - \frac{y^2}{2}\right]$$

Expresse a vazão mássica por unidade de largura em função de ρ, μ, g, θ e h.

4.21 Água entra em um canal plano e largo, com altura $2h$, com uma velocidade de 5 m/s. Na saída do canal a distribuição de velocidades é dada por:

$$\frac{u}{u_{\text{máx}}} = 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2$$

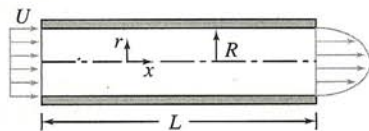
onde y é medido a partir da linha de centro do canal. Determine a velocidade na linha de centro na saída, $u_{\text{máx}}$.

4.22 Um fluido incompressível escoa em regime permanente através de um canal plano divergente. Na entrada, de altura H, o escoamento é uniforme com magnitude V_1. Na saída, de altura $2H$, o perfil de velocidade é

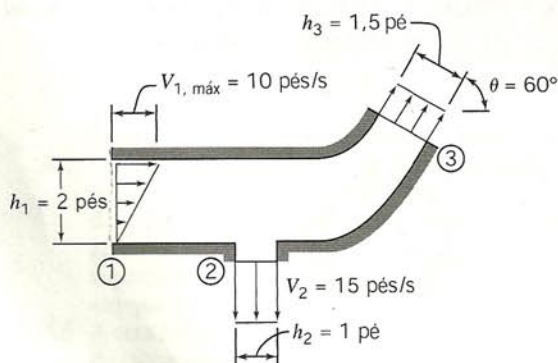
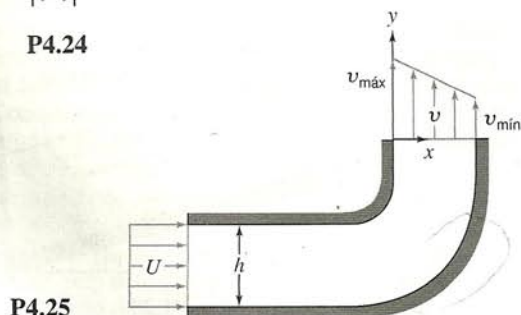
$$V_2 = V_m \cos\left(\frac{\pi y}{2H}\right)$$

onde y é medido a partir da linha de centro do canal. Expresse V_m em termos de V_1.

4.23 Água escoa em regime permanente através de um tubo de comprimento L e raio $R = 3$ pol. Calcule a velocidade uniforme na entrada, U, se a distribuição de velocidades na saída é dada por

$$u = u_{\text{máx}}\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

P4.23

e $u_{\text{máx}} = 10$ pés/s.

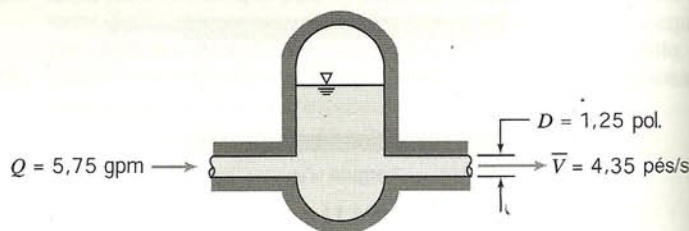
4.24 Uma curva redutora bidimensional tem um perfil de velocidade linear na seção ①. O escoamento é uniforme nas seções ② e ③. O fluido é incompressível e o escoamento, permanente. Determine a magnitude e o sentido da velocidade uniforme na seção ③.

P4.24

P4.25

4.25 Água entra num canal bidimensional de largura constante, $h = 75{,}5$ mm, com velocidade uniforme, U. O canal faz uma curva de 90° que distorce o escoamento, de modo a produzir o perfil linear de velocidade mostrado na saída, com $v_{\text{máx}} = 2v_{\text{mín}}$. Avalie $v_{\text{mín}}$, se $U = 7{,}5$ m/s.

4.26 Um tubo redondo, poroso, com $D = 60$ mm, transporta água. A velocidade de entrada é uniforme com $V_1 = 7{,}0$ m/s. A água escoa radialmente com simetria em relação ao eixo do tubo, para fora através das paredes porosas, com a distribuição de velocidade

$$v = V_0\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

onde $V_0 = 0{,}03$ m/s e $L = 0{,}950$ m. Calcule a vazão mássica dentro do tubo em $x = L$.

4.27 Um *acumulador hidráulico* é projetado para reduzir as pulsações de pressão do sistema hidráulico de uma máquina operatriz. Para o instante mostrado, determine a taxa à qual o acumulador ganha ou perde óleo hidráulico.

P4.27

4.28 Um tanque retangular, usado no suprimento de água para uma experiência de número de Reynolds, tem profundidade de 230 mm. A sua largura e comprimento são $W = 150$ mm e $L = 230$ mm. A água escoa no tubo de saída (diâmetro interno $D = 6{,}35$ mm) a um número de Reynolds $Re = 2000$, quando o tanque está metade cheio. A válvula de admissão de água no tanque é fechada. Determine a taxa de variação do nível da água no tanque nesse instante.

4.29 Líquido viscoso é drenado de um tanque circular, $D = 300$ mm de diâmetro, através de um longo tubo circular de raio $R = 50$ mm. O perfil de velocidade no tubo de descarga é

$$u = u_{\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Mostre que a velocidade média do escoamento no tubo de drenagem é $\overline{V} = \frac{1}{2}u_{\text{máx}}$. Avalie a taxa de variação do nível de líquido no tanque no instante em que $u_{\text{máx}} = 0{,}155$ m/s.

4.30 Um tanque de 0,5 m³ contém ar comprimido. Uma válvula é aberta e o ar escapa com velocidade de 300 m/s através de uma abertura de 130 mm² de área. A temperatura do ar passando pela abertura é −15°C e a pressão absoluta é 350 kPa. Determine a taxa de variação da densidade do ar no tanque nesse momento.

4.31 Ar entra num tanque por uma área de 0,2 pé² com uma velocidade de 15 pés/s e uma densidade de 0,03 slug/pé³. Sai com uma velocidade de 5 pés/s e uma densidade igual àquela no tanque. A densidade inicial no tanque é 0,02 slug/pé³. O volume total do tanque é 20 pés³ e a área de saída é 0,4 pé². Determine a taxa de variação inicial da densidade do ar no tanque.

4.32 Água é drenada de um tanque cilíndrico com 0,3 m de diâmetro, por um furo no fundo. No instante em que a profundidade da água é 0,6 m, a vazão em massa é observada como sendo 4 kg/s. Determine a taxa de variação do nível da água nesse instante.

4.33 Uma história noticiada recentemente pela TV sobre o abaixamento do nível do lago Shafer perto de Monticello, Indiana, pelo

aumento da descarga através da comporta do lago forneceu a seguinte informação para o escoamento nesta comporta:

Vazão normal	290 pés³/s
Vazão durante drenagem do lago	2000 pés³/s

(A vazão durante a drenagem foi estabelecida como sendo equivalente a 16.000 gal/s.) O repórter disse também que durante a drenagem era esperado uma queda do nível do lago à taxa de um pé a cada 8 horas. Calcule a vazão real durante a drenagem em gal/s. Estime a área superficial do lago.

4.34 Líquido é drenado de um tanque cilíndrico, de diâmetro D = 50 mm, por uma abertura, d = 5 mm, no fundo. A velocidade do líquido saindo do tanque é de aproximadamente $V = \sqrt{2gy}$, onde y é a distância vertical do fundo do tanque à superfície livre. Se o tanque estiver inicialmente cheio com água até y_0 = 0,4 m, determine a profundidade no instante t = 12 segundos. Trace um gráfico de y/y_0 em função de t com y_0 como um parâmetro para $0{,}1 \leq y_0 \leq 1$ m. Trace um gráfico de y/y_0 em função de t com D/d como um parâmetro para $2 \leq D/d \leq 10$ e y_0 = 0,4 m.

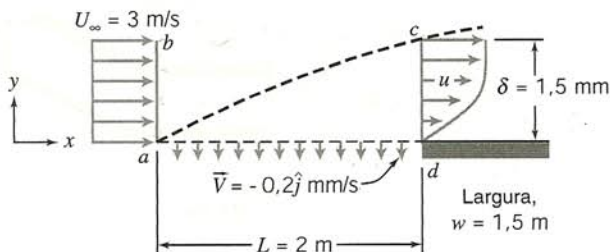
4.35 Para as condições do Problema 4.34, estime o tempo requerido para drenar o tanque até a profundidade y = 20 mm. Trace um gráfico do tempo para drenar o tanque como função de y/y_0 para $0{,}1 \leq y_0 \leq 1$ m, com d/D como um parâmetro para $0{,}1 \leq d/D \leq 0{,}5$.

4.36 Um reservatório cônico, com ângulo da geratriz, $\theta = 15°$, com diâmetro máximo D = 70 mm e altura H, deixa líquido escapar por um orifício (diâmetro d = 3,12 mm) no fundo. A velocidade do líquido deixando o reservatório é de aproximadamente $V = (2gy)^{1/2}$, onde y é a altura da superfície livre do líquido acima do orifício. Determine a taxa de variação do nível da superfície no reservatório no instante em que $y = H/2$.

4.37 Um vaso cônico contém água até uma altura H = 36,8 mm, onde o diâmetro do vaso é D = 29,4 mm. A água escoa por um orifício liso, redondo, de diâmetro d = 7,35 mm, no vértice do cone. A velocidade do escoamento na saída é de aproximadamente $V = (2gy)^{1/2}$, onde y é distância da superfície livre do líquido ao orifício. Uma corrente de água entra pelo topo do vaso a uma vazão volumétrica constante, $Q = 3{,}75 \times 10^{-7}$ m³/h. Determine a vazão em volume no fundo do vaso. Avalie o sentido e a taxa de variação do nível da superfície livre, no vaso, nesse instante.

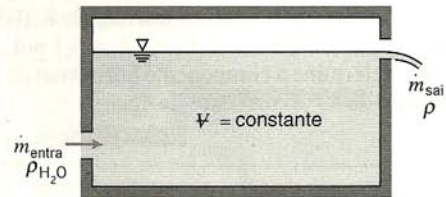
4.38 Água escoa em regime permanente através de uma placa porosa plana. Uma sucção constante é aplicada ao longo da seção porosa. O perfil de velocidade na seção cd é

$$\frac{u}{U_\infty} = 3\left[\frac{y}{\delta}\right] - 2\left[\frac{y}{\delta}\right]^{1,5}$$

Avalie a vazão em massa através da seção bc.

P4.38, 4.39

4.39 Considere um escoamento incompressível e permanente de ar padrão em uma camada limite sobre toda a extensão da superfície porosa mostrada. Suponha que a camada limite na borda a jusante da superfície tenha um perfil aproximadamente parabólico, $u/U_\infty = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$. Sucção uniforme é aplicada ao longo da superfície porosa, como mostrado. Calcule a vazão volumétrica através da superfície cd, através da superfície porosa de sucção e através da superfície bc.

4.40 Um reservatório cônico, com ângulo da geratriz θ, deixa o líquido escapar por um orifício de diâmetro d no seu vértice. A velocidade do líquido deixando o reservatório é aproximadamente $V = \sqrt{2gy}$, onde y é a altura da superfície livre acima do orifício. Inicialmente, o reservatório está cheio até uma altura y_0. Obtenha uma expressão para o tempo, t, requerido para esvaziar o reservatório. Expresse o resultado em termos do volume inicial, $\forall_0$, de líquido dentro do reservatório e da vazão em volume inicial, $Q_0 = A\sqrt{2gy_0} = AV_0$. Se o diâmetro total for d = 5 mm, trace um gráfico do tempo para esvaziar o reservatório como função de y_0 sobre a faixa $0{,}1 \leq y_0 \leq 1$ m, com o ângulo θ como um parâmetro para $15° \leq \theta \leq 45°$.

4.41 Um tanque de volume fixo contém salmoura com densidade inicial, ρ_i, maior que a da água. Água pura entra no tanque em regime permanente e mistura-se perfeitamente com a salmoura. O nível do líquido no tanque permanece constante. Deduza expressões para (a) a taxa de variação da densidade da mistura líquida no tanque, e (b) o tempo requerido para que a densidade atinja o valor ρ_f, onde $\rho_i > \rho_f > \rho_{H_2O}$.

P4.41

4.42 Com o passar do tempo, o ar migra através dos poros da borracha de pneus de alta pressão de bicicleta. Costuma-se dizer que um pneu perde pressão a uma taxa de "uma libra [1 psi] por dia". A taxa verdadeira de perda de pressão não é constante; ao contrário, a vazão em volume instantânea, de vazamento, é proporcional à densidade e à pressão manométrica do ar no pneu, $\dot{m} \propto \rho p$. Como a taxa de vazamento é baixa, o ar no pneu é aproximadamente isotérmico. Considere um pneu que está inicialmente inflado a 0,6 MPa (manométrica). Admita que a perda inicial de pressão dá-se em uma razão de 1 psi por dia. Estime a pressão que permanece no pneu no final de 30 dias. Quão preciso é "uma libra por dia" no período total de 30 dias? Plote a pressão como função do tempo para o período de 30 dias. Mostre os resultados obtidos com a regra corrente "uma libra por dia" para comparação.

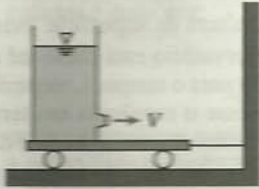
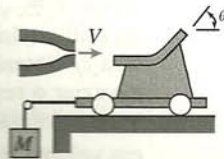
4.43 Avalie a taxa líquida de fluxo de quantidade de movimento para fora da superfície de controle do Problema 4.19.

4.44 Para as condições do Problema 4.21, avalie a razão entre o fluxo de quantidade de movimento, na direção x, na saída do canal e aquele na entrada.

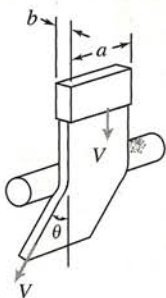
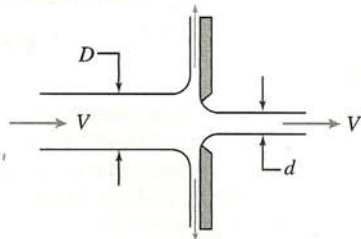
4.45 Para as condições do Problema 4.23, avalie a razão entre o fluxo de quantidade de movimento, na direção x, na saída do tubo e aquele na entrada.

4.46 Avalie o fluxo líquido de quantidade de movimento através da curva do Problema 4.24, se a profundidade normal ao diagrama for w = 3 pés.

4.47 Avalie o fluxo líquido de quantidade de movimento através do canal do Problema 4.25. Você esperaria que a pressão na saída fosse maior, menor, ou a mesma que a pressão na entrada? Por quê?

4.48 Um grande tanque de altura $h = 1$ m e diâmetro $D = 0,6$ m está fixo a um carrinho, como mostrado. Água jorra do tanque através de um bocal de diâmetro $d = 10$ mm. A velocidade do líquido saindo do tanque é aproximadamente $V = \sqrt{2gy}$, onde y é a distância vertical do bocal até a superfície livre do líquido. Determine a tração no cabo para $y = 0,8$ m. Trace um gráfico da tensão no cabo em função da profundidade de água para $0 \le y \le 0,8$ m.

P4.48

P4.49

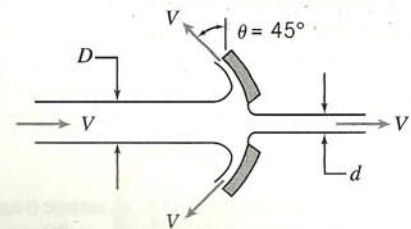
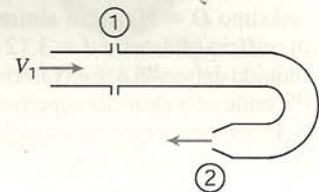
4.49 Um jato de água saindo de um bocal estacionário a 15 m/s ($A_j = 0,05$ m²) atinge uma pá defletora curva montada num carrinho, conforme mostrado. A pá desvia o jato de um ângulo $\theta = 50°$. Determine o valor de M necessário para manter o carrinho estacionário. Se o ângulo da pá, θ, for regulável, trace um gráfico da massa, M, necessária para manter o carrinho estacionário em função de θ para $0 \le \theta \le 180°$.

4.50 Um cilindro circular inserido numa corrente de água, conforme mostrado, deflete o fluxo de um ângulo θ. (Isto é chamado "efeito Coanda"). Para $a = 0,5$ pol., $b = 0,1$ pol., $V = 10$ pés/s e $\theta = 20°$, determine a componente horizontal da força sobre o cilindro devida ao escoamento da água.

P4.50

P4.51

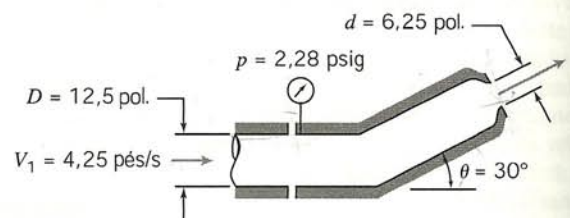
4.51 Uma placa vertical tem um orifício de bordas vivas no seu centro. Um jato d'água com velocidade V atinge a placa concentricamente. Obtenha uma expressão para a força externa necessária para manter a placa no lugar se o jato que sai do orifício também tiver velocidade V. Avalie a força para $V = 5$ m/s, $D = 100$ mm e $d = 25$ mm. Trace um gráfico da força requerida em função da razão de diâmetros para uma faixa adequada do diâmetro d.

4.52 Um fazendeiro compra 675 kg de grãos, a granel, da cooperativa local. O grão é despejado na sua caminhonete de um carregador afunilado com um diâmetro de saída de 0,3 m. O operador do carregador determina a quantidade de carga observando a massa bruta indicada da caminhonete como uma função do tempo. O fluxo de grão do carregador ($\dot{m} = 40$ kg/s) é cortado quando a leitura da balança atinge a massa bruta desejada. Se a densidade do grão é 600 kg/m³, determine a verdadeira carga paga.

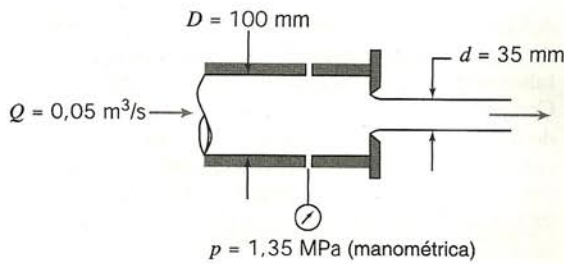
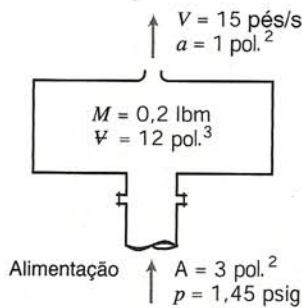
4.53 Água escoa em regime permanente através de uma mangueira de incêndio com bocal. A mangueira tem diâmetro interno de 75 mm e a ponta do bocal, 25 mm; a pressão manométrica na mangueira é 510 kPa, e a corrente deixando o bocal é uniforme. A velocidade e pressão de saída são, respectivamente, 32 m/s e atmosférica. Determine a força transmitida pelo acoplamento entre a mangueira e o bocal. Indique se o bocal está sob tração ou compressão.

4.54 Um prato raso e circular tem um orifício de bordas vivas no seu centro. Um jato d'água, de velocidade V, atinge o prato concentricamente. Obtenha uma expressão para a força externa necessária para manter o prato no lugar, se o jato que sai pelo orifício também tem velocidade V. Avalie a força para $V = 5$ m/s, $D = 100$ mm e $d = 20$ mm. Trace um gráfico da força requerida em função do ângulo θ $(0 \le \theta \le 90°)$ com a razão de diâmetros como parâmetro para uma faixa adequada do diâmetro d.

P4.54

P4.55

4.55 Água está escoando em regime permanente através de um cotovelo de 180°, conforme mostrado. Na entrada do cotovelo a pressão manométrica é 96 kPa. A água descarrega à pressão atmosférica. Admita que as propriedades são uniformes nas áreas de entrada e de saída; $A_1 = 2600$ mm², $A_2 = 650$ mm² e $V_1 = 3,05$ m/s. Determine a componente horizontal da força necessária para manter o cotovelo no lugar.

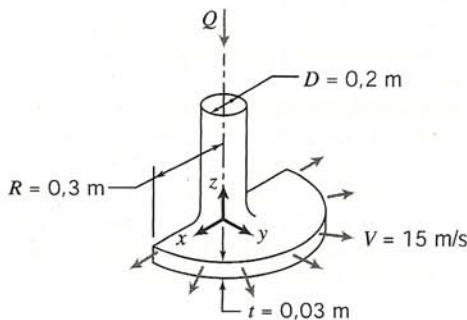
4.56 Água escoa em regime permanente através do bocal mostrado, descarregando para a atmosfera. Calcule a componente horizontal da força na junta flangeada. Indique se a junta está sob tração ou compressão.

P4.56

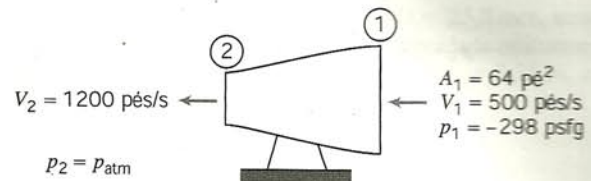
4.57 Suponha que a curva do Problema 4.25 é um segmento de um canal largo num plano horizontal. A pressão na entrada é de 170 kPa (abs), e na saída é de 130 kPa (abs). Determine a força requerida para manter a curva no lugar.

4.58 Uma placa plana com orifício de 50 mm encontra-se na extremidade de um tubo com 100 mm de diâmetro. A água escoa

P4.58

P4.59

através do tubo e do orifício a 0,05 m³/s. O diâmetro do jato a jusante do orifício é 35 mm. Calcule a força externa necessária para manter a placa no lugar. Despreze o atrito na parede do tubo.

4.59 Um sistema de borrifo é mostrado no diagrama. A água é fornecida a $p = 1{,}45$ psig através da abertura flangeada de área $A = 3$ pol.². A água sai num jato livre, em regime permanente, à pressão atmosférica. A área e a velocidade do jato são, respectivamente, $a = 1{,}0$ pol.² e $V = 15$ pés/s. A massa do sistema de borrifo é 0,2 lbm e contém $V\!\!\!/ = 12$ pol.³ de água. Determine a força exercida sobre o tubo de suprimento pelo sistema de borrifo.

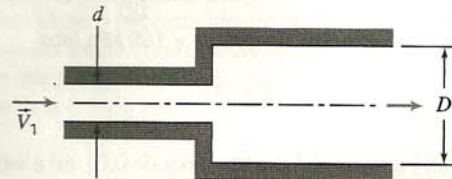
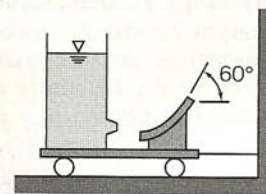
4.60 O bocal mostrado descarrega uma lâmina d'água por um arco de 180°. A velocidade da água é 15 m/s e a espessura do jato é 30 mm, em uma distância radial de 0,3 m, a partir da linha de centro do tubo de suprimento. Determine (a) a vazão em volume de água no jato em forma de lâmina e (b) a componente y da força necessária para manter o bocal no lugar.

P4.60

4.61 A figura mostra uma máquina típica para testes de motores a jato, juntamente com alguns dados obtidos. O combustível entra pelo topo da máquina verticalmente, a uma taxa igual a 2% da vazão em massa do ar de admissão. Para as condições dadas, calcule a vazão em massa de ar através da máquina e estime o empuxo produzido.

P4.61

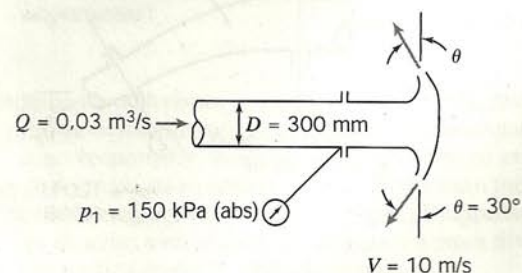
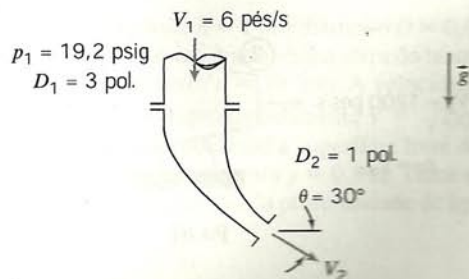
4.62 Um motor de foguete a combustível líquido consome, em empuxo nominal, 180 lbm/s de ácido nítrico como oxidante e 70 lbm/s de anilina como combustível. O escoamento sai axialmente a 6000 pés/s em relação ao bocal, e a 16,5 psia. O diâmetro de saída do bocal é $D = 2$ pés. Calcule o empuxo produzido pelo motor numa bancada de testes à pressão padrão ao nível do mar.

4.63 Considere o escoamento através da expansão súbita mostrada. Se o escoamento for incompressível e o atrito desprezível, mostre que o aumento de pressão, $\Delta p = p_2 - p_1$, é dado por

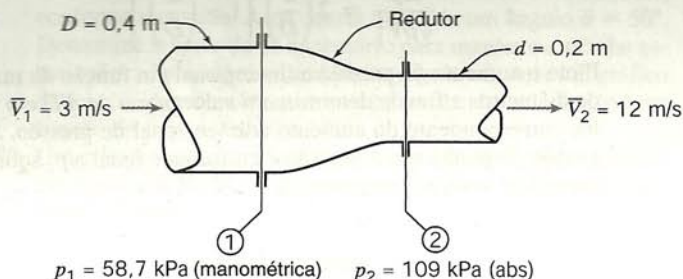
$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho \bar{V}_1^2} = 2\left(\frac{d}{D}\right)^2\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$$

Plote o aumento de pressão adimensional em função da razão de diâmetros a fim de determinar o valor ótimo de d/D e o valor correspondente do aumento adimensional de pressão. *Sugestão*: Suponha que a pressão é uniforme e igual a p_1 sobre a superfície vertical da expansão.

P4.63

P4.64

4.64 Uma pá curva, que deflete a água de 60°, está ligada ao carrinho sob as condições do Problema 4.48. Determine a tração no cabo que mantém o carrinho estacionário e a força da pá sobre ele. Trace um gráfico da tensão no cabo e da força da pá no carro como função da profundidade da água para $0 \le y \le 0{,}8$ m com o ângulo θ como um parâmetro para $0 \le \theta \le 90°$.

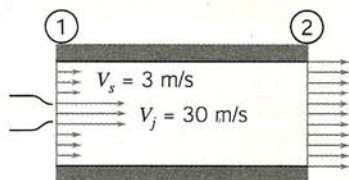
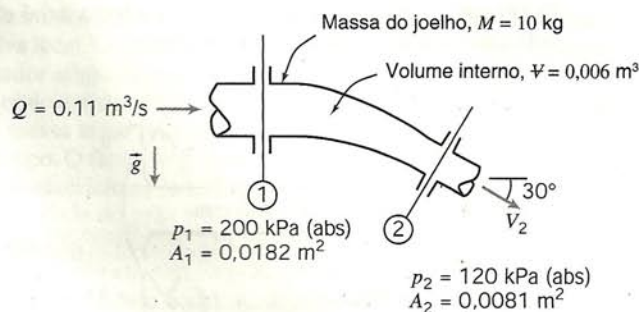
4.65 Uma cabeça borrifadora cônica é mostrada. O fluido é a água e a corrente de saída é uniforme. Avalie (a) a espessura do borrifo em cortina no raio de 400 mm e (b) a força axial exercida pela cabeça sobre o tubo de suprimento.

P4.65

P4.66

4.66 A figura mostra um conjunto de bocal curvo que descarrega para a atmosfera. O bocal pesa 10 lbf e o seu volume interno é 150 pol.³. O fluido é água. Determine a força de reação exercida pelo bocal sobre o acoplamento com o tubo de admissão.

4.67 A figura mostra um redutor montado em uma tubulação. O volume interno do redutor é 0,2 m³ e a sua massa, 25 kg. Avalie a força total que deve ser exercida pelos tubos adjacentes para suportar o redutor. O fluido é gasolina.

P4.67

4.68 Uma bomba a jato d'água tem área de 0,01 m² e velocidade do jato de 30 m/s. O jato fica dentro de uma corrente secundária de água com velocidade $V_s = 3$ m/s. A área total do duto (a soma das áreas do jato principal e corrente secundária) é de 0,075 m². A água é totalmente misturada e deixa a bomba como uma corrente uniforme. As pressões do jato e da corrente secundária são iguais na entrada da bomba. Determine a velocidade na saída da bomba e o aumento de pressão, $p_2 - p_1$.

P4.68

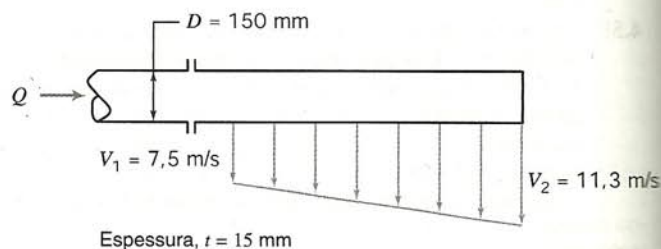
Massa do joelho, M = 10 kg
Volume interno, $\forall$ = 0,006 m³
Q = 0,11 m³/s
p_1 = 200 kPa (abs)
A_1 = 0,0182 m²
30°
V_2
p_2 = 120 kPa (abs)
A_2 = 0,0081 m²

P4.69

4.69 A figura mostra um cotovelo redutor de 30°. O fluido é a água. Avalie as componentes da força que deve ser provida pelos tubos adjacentes para manter o cotovelo no lugar.

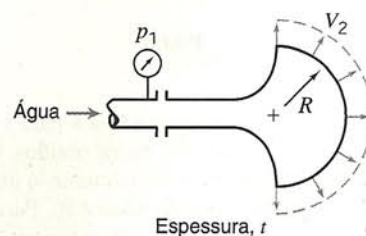
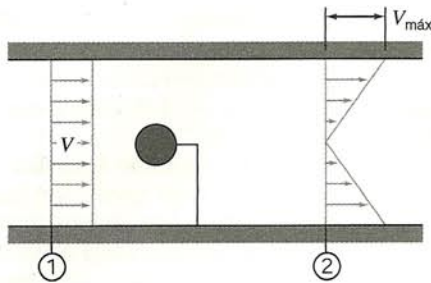
4.70 Considere o escoamento permanente e adiabático de ar através de um longo tubo retilíneo com área de seção de 0,5 pé². Na entrada, o ar encontra-se a 30 psia, 140°F, e tem velocidade de 500 pés/s. Na saída, o ar está a 11,3 psia e tem velocidade de 985 pés/s. Calcule a força axial do ar sobre o tubo. (Certifique-se de estabelecer o sentido da força com clareza.)

4.71 Uma caldeira monotubular consiste em um trecho de tubo com 20 pés de comprimento e 0,375 pol. de diâmetro interno. Água entra a taxa de 0,3 lbm/s e 500 psia. O vapor sai com 400 psig e densidade de 0,024 slug/pé³. Determine a magnitude e sentido da força exercida pelo fluido sobre o tubo.

4.72 Um gás escoa em regime permanente através de um tubo poroso aquecido de área seccional constante e igual a 0,2 m². Na entrada do tubo, a pressão absoluta é 340 kPa, a densidade, 5,1 kg/m³, e a velocidade média, 152 m/s. O fluido passa pela parede porosa em um sentido normal ao eixo do tubo, com vazão em massa total de 29,2 kg/s. Na saída do tubo a pressão absoluta é 280 kPa e a densidade, 2,6 kg/m³. Determine a força axial do fluido sobre o tubo.

4.73 Água é descarregada por um estreito entalhe em um tubo de 150 mm de diâmetro. O jato resultante, horizontal e bidimensional, tem 1 m de comprimento e espessura de 15 mm, com velocidade não uniforme. A pressão na seção de entrada é 30 kPa (manométrica). Calcule (a) a vazão em volume na seção de entrada e (b) as forças requeridas no acoplamento para manter o tubo borrifador no lugar. Despreze as massas do tubo e da água que ele contém.

P4.73

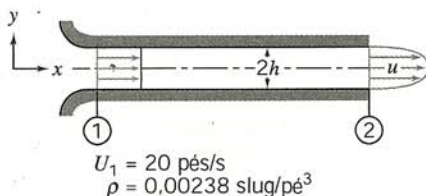
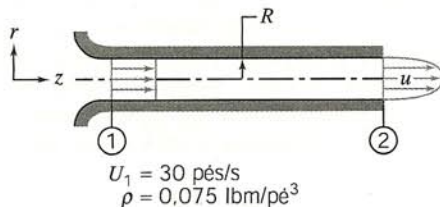
4.74 Água escoa em regime permanente através da curva plana do Problema 4.25. O escoamento na entrada é uniforme e horizontal à $p_1 = 185$ kPa (abs). O escoamento na saída é não-uniforme, vertical e à pressão atmosférica. A massa da estrutura do canal é $M_c = 2{,}05$ kg; o seu volume interno é $\forall = 0{,}00355$ m³. Avalie a força exercida pelo conjunto do canal sobre o duto de suprimento.

4.75 Um bocal de um sistema de borrifo é projetado para produzir uma cortina de água radial e plana. A cortina d'água sai do bocal com $V_2 = 10$ m/s, cobre um arco de 180° e tem espessura $t = 1{,}5$ mm. O raio da descarga do bocal é $R = 50$ mm. O tubo de suprimento d'água tem 35 mm de diâmetro e a pressão de entrada é $p_1 = 150$ kPa (abs). Avalie a força axial exercida pelo bocal borrifador sobre o acoplamento.

P4.75

P4.76

4.76 Um pequeno objeto redondo é testado num túnel de vento de 1 m de diâmetro. A pressão é uniforme nas seções ① e ②. A pressão a montante é 20 mm de H_2O (manométrica), a pressão a jusante, 10 mm de H_2O (manométrica) e a velocidade média do ar, 10 m/s. O perfil de velocidade na seção ② é linear; ele varia de zero na linha de centro do túnel a um máximo na sua parede. Calcule (a) a vazão em massa no túnel de vento, (b) a velocidade máxima na seção ② e (c) o arrasto do objeto e de sua haste de apoio. Despreze a resistência viscosa na parede do túnel.

4.77 Um fluido incompressível escoa em regime permanente na região de entrada de um canal bidimensional de altura $2h$. A velocidade uniforme na entrada do canal é $U_1 = 20$ pés/s. A distribuição de velocidade numa seção a jusante é

$$\frac{u}{u_{\text{máx}}} = 1 - \left[\frac{y}{h}\right]^2$$

Avalie a velocidade máxima na seção a jusante. Calcule a queda de pressão que existiria no canal se o atrito viscoso nas paredes fosse desprezível.

P4.77

P4.78

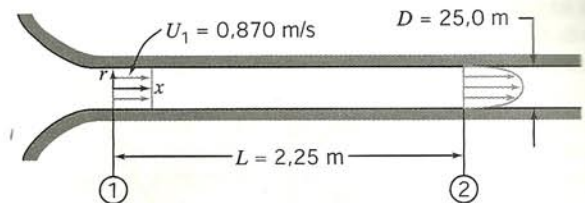
4.78 Um fluido incompressível escoa em regime permanente na região de entrada de um tubo circular de raio R. A velocidade uniforme na entrada do tubo é $U_1 = 30$ pés/s. A distribuição de velocidade em uma seção a jusante é

$$\frac{u}{u_{\text{máx}}} = 1 - \left[\frac{r}{R}\right]^2$$

Avalie a velocidade máxima na seção a jusante. Calcule a queda de pressão que existiria no tubo se o atrito viscoso nas paredes fosse desprezível.

4.79 O ar entra em um duto, de diâmetro $D = 25{,}0$ mm, através de uma entrada bem arredondada com velocidade uniforme, $U_1 = 0{,}870$ m/s. Em uma seção a jusante onde $L = 2{,}25$ m, o perfil de velocidade inteiramente desenvolvido é

$$\frac{u(r)}{U_c} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

A queda de pressão entre essas seções é $p_1 - p_2 = 1{,}92$ N/m². Determine a força total de atrito exercida pelo tubo sobre o ar.

P4.79

4.80 Ar na condição padrão escoa ao longo de uma placa plana. A velocidade da corrente livre, não perturbada, é $U_0 = 30$ m/s. Em $L = 0{,}3$ m, a jusante da borda de ataque da placa, a espessura da camada limite é $\delta = 1{,}5$ mm. O perfil de velocidade nesse local é aproximadamente $u/U_0 = y/\delta$. Calcule a componente horizontal da força por unidade de largura necessária para manter a placa estacionária.

4.81 Considere o escoamento incompressível de um fluido numa camada limite como descrito no Problema-Exemplo 4.2. Mostre que a força de arrasto devida ao atrito do fluido sobre a superfície é dada por

$$F_f = \int_0^{\delta} \rho u(U - u) w \, dy$$

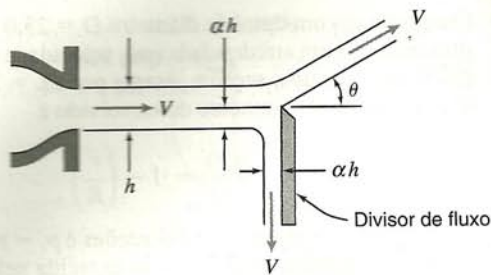
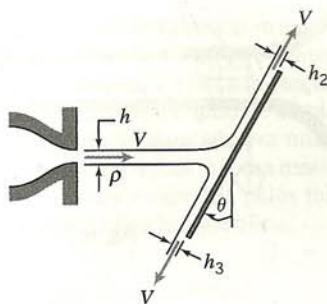
Avalie a força de arrasto para as condições do Problema-Exemplo 4.2.

4.82 Ar na condição padrão escoa ao longo de uma placa plana. A velocidade da corrente livre, não perturbada, é $U_0 = 10$ m/s. Em $L = 145$ mm, a jusante da borda de ataque da placa, a espessura da camada limite é $\delta = 2{,}3$ mm. O perfil de velocidade nesse local é

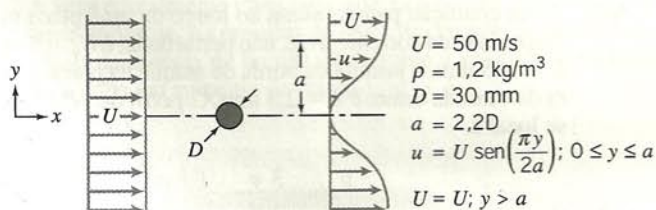
$$\frac{u}{U_0} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left[\frac{y}{\delta}\right]^3$$

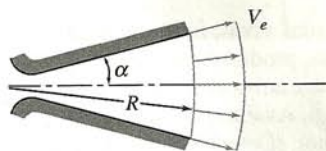
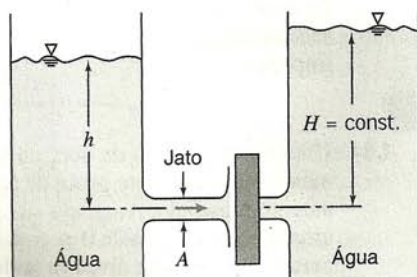
Calcule a componente horizontal da força por unidade de largura necessária para manter a placa estacionária.

4.83 Considere o jato de água e a placa vertical do Problema-Exemplo 4.4. Uma consideração implícita feita para resolver o problema foi que o jato permanece horizontal até atingir a placa. Discuta as implicações de se incluir a gravidade na solução. Enderece-se especificamente à trajetória do jato antes de atingir a placa e à velocidade do líquido sobre a placa acima e abaixo do ponto de impacto do jato. As dimensões da placa vertical são importantes? As propriedades da corrente de líquido são importantes?

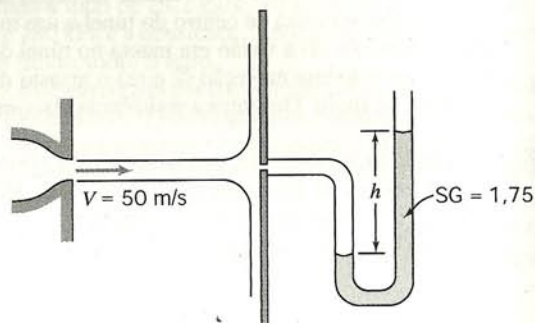
4.84 Uma placa divisora de jato, de bordas vivas, inserida parcialmente numa corrente plana de água, produz o padrão de escoamento mostrado. Analise a situação, a fim de avaliar θ, como uma função de α, onde $0 \leq \alpha < 0{,}5$. Avalie a força necessária para manter a placa divisora no lugar. (Despreze qualquer força de atrito entre a corrente de água e a placa divisora.) Trace um gráfico de θ e R_x como função de α.

P4.84

P4.85

4.85 Quando um jato plano de líquido atinge uma placa, parte-se em duas correntes de velocidades iguais, mas de espessuras desiguais. Para escoamento sem atrito não pode haver força tangencial na superfície da placa. Utilize essa consideração para desenvolver uma expressão para h_2/h como função do ângulo da placa, θ. Trace um gráfico dos resultados e comente sobre os casos limites, $\theta = 0$ e $\theta = 90°$.

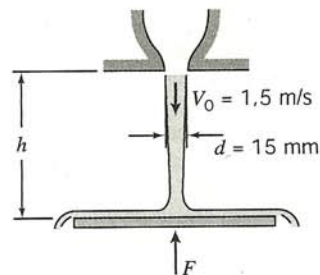
4.86 Medições experimentais são feitas em um jato de ar de baixa velocidade a fim de determinar a força de arrasto sobre um cilindro circular. As medições de velocidade em duas seções, onde as pressões são uniformes e iguais, dão os resultados mostrados. Avalie a força de arrasto sobre o cilindro, por unidade de largura.

P4.86

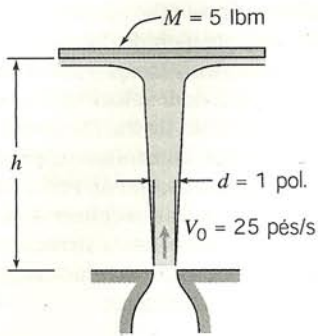
4.87 Os gases que saem do bocal de propulsão de um foguete são modelados como escoando radialmente para fora a partir de um ponto a montante da garganta do bocal. Admita que a velocidade do escoamento de saída, V_e, tem magnitude constante. Desenvolva uma expressão para o empuxo axial, T_a, gerado pelo fluxo que deixa o plano de saída do bocal. Compare o seu resultado com a aproximação unidimensional, $T = \dot{m} V_e$. Avalie o erro percentual para $\alpha = 15°$. Plote o erro percentual em função de α para $0 \leq \alpha \leq 22{,}5°$.

P4.87 P4.88

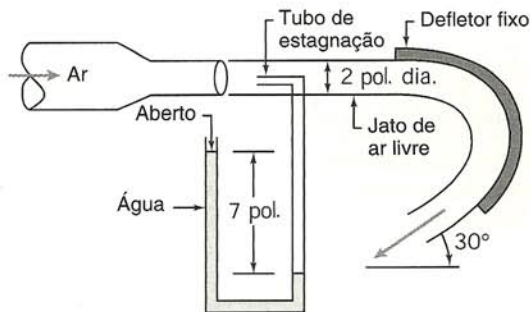
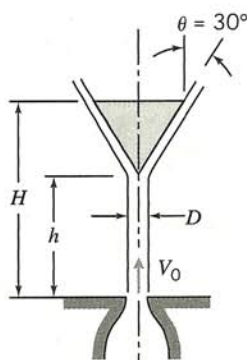
***4.88** Dois grandes tanques contendo água têm pequenos orifícios, bem arredondados, de áreas iguais. Um jato de líquido sai do tanque esquerdo. Admita que o fluxo é uniforme e não afetado por atrito. O jato atinge uma placa plana cobrindo a abertura do tanque à direita. Determine o mínimo valor da altura, h, requerida para manter a placa no lugar sobre a abertura do tanque direito.

***4.89** Um jato de ar horizontal axissimétrico com 10 mm de diâmetro atinge um disco estacionário vertical com 200 mm de diâmetro. A velocidade do jato é de 50 m/s na saída do bocal. Um manômetro é conectado ao centro do disco. Calcule (a) a deflexão, h, se o líquido do manômetro tem densidade relativa SG = 1,75 e (b) a força exercida pelo jato sobre o disco.

P4.89

***4.90** Considere um tanque cilíndrico de diâmetro interno D e massa M colocado sobre uma superfície plana e lisa. Admita que o tanque está cheio com água até um nível h. Um pequeno orifício bem arredondado de diâmetro d é feito na lateral, próximo do fundo do tanque, de modo que um jato descarrega horizontalmente. Desenvolva uma expressão para o coeficiente de atrito que permitiria o deslizamento do tanque como resultado do fluxo da quantidade de movimento do jato. Avalie para $d/D = 0{,}3$. Plote o coeficiente de atrito em função de D/d para $2 \leq D/d \leq 10$. Comente os resultados.

***4.91** Um jato uniforme de água sai por um bocal de 15 mm de diâmetro e flui diretamente para baixo. A velocidade do jato no plano de saída do bocal é 1,5 m/s. O jato atinge um disco horizontal e escoa radialmente, para fora, como uma lâmina. Obtenha uma expressão geral para a velocidade que a corrente líquida atingiria no nível do disco. Desenvolva uma expressão para a força necessária para manter o disco estacionário, desprezando a massa do disco e da lâmina d'água. Avalie para $h = 1{,}5$ m.

P4.91

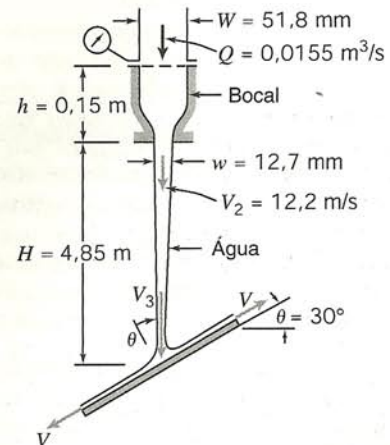
*Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

P4.92

***4.92** Um disco de 5 lbm é restringido horizontalmente, mas é livre para mover-se na direção vertical. O disco é atingido, por baixo, por um jato vertical de água. A velocidade e diâmetro do jato d'água são 25 pés/s e 1 pol. na saída do bocal. Obtenha uma expressão geral para a velocidade do jato d'água como uma função da altura, h. Determine a altura que o disco subirá e permanecerá estacionário.

P4.93

P4.94

***4.93** Uma corrente de ar na condição padrão sai de um bocal de 2 pol. de diâmetro e atinge um defletor curvo como mostrado. Um tubo de estagnação conectado a um manômetro de tubo em U é instalado no plano de saída do bocal. Calcule a velocidade do ar deixando o bocal. Estime a componente horizontal da força exercida pelo jato sobre o defletor. Comente sobre cada uma das considerações feitas na solução do problema.

***4.94** Água de um jato com diâmetro D é usada para suportar o objeto de forma cônica mostrado. Deduza uma expressão para a massa combinada do cone e da água, M, que pode ser suportada pelo jato, em termos de parâmetros associados com um volume de controle adequadamente escolhido. Use a sua expressão para calcular M quando $V_0 = 10$ m/s, $H = 1$ m, $h = 0,8$ m, $D = 50$ mm e $\theta = 30°$. Estime a massa de água no volume de controle.

***4.95** Observe uma corrente uniforme de água caindo verticalmente de uma jarra de água sobre uma bandeja mantida em um nível abaixo da corrente. Varie a altura da bandeja. O que você observa? Varie o ângulo da bandeja; comente sobre as variações na distribuição do fluxo e na geometria do escoamento observadas.

***4.96** Um bocal plano descarrega verticalmente para baixo na atmosfera. O bocal é alimentado com um fluxo permanente de água. Uma placa plana estacionária, inclinada, colocada abaixo do bocal é atingida pela corrente d'água. A corrente d'água divide-se e escoa ao longo da placa inclinada; as duas correntes deixando a placa têm espessuras *desiguais*. Efeitos de atrito são desprezíveis no bocal e no escoamento ao longo da superfície da placa. Avalie a mínima pressão manométrica requerida na saída do bocal. Calcule a magnitude e sentido da força exercida pela corrente d'água sobre a placa inclinada. Esboce a distribuição de pressão ao longo da superfície da placa. Explique por que a distribuição de pressão tem a forma esboçada.

P4.96

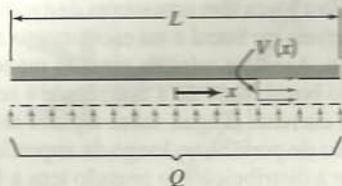
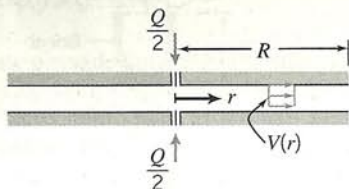
***4.97** No antigo Egito, vasos circulares cheios d'água eram às vezes utilizados como relógios primitivos. Os vasos tinham um formato tal que, à medida que a água drenava pelo fundo, o nível da superfície caía a uma taxa constante, s. Admita que a água drenava por um pequeno orifício, de área A. Determine uma expressão para o raio do vaso, r, como função do nível d'água, h. Obtenha uma expressão para o volume de água necessário para que o relógio operasse por n horas.

***4.98** Uma corrente de fluido incompressível movendo-se a baixa velocidade deixa um bocal apontado diretamente para baixo. Admita que a velocidade em qualquer seção reta é uniforme e despreze efeitos viscosos. A velocidade e a área do jato na saída do bocal são V_0 e A_0, respectivamente. Aplique a conservação da massa e a equação da quantidade de movimento a um volume de controle diferencial de comprimento dz, no sentido do escoamento. Deduza expressões para as variações da velocidade e da área do jato como funções de z. Avalie a distância na qual a área do jato é metade do seu valor original. (Tome a origem das coordenadas na saída do bocal.)

***4.99** Uma corrente de fluido incompressível movendo-se a baixa velocidade deixa um bocal apontado diretamente para cima. Admita que a velocidade em qualquer seção reta é uniforme e despreze efeitos viscosos. A velocidade e a área do jato na saída do bocal são V_0 e A_0, respectivamente. Aplique a conservação da massa e a equação da quantidade de movimento a um volume de controle diferencial de comprimento dz, no sentido

*Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

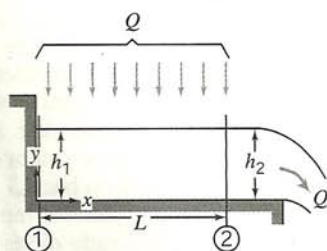
do escoamento. Deduza expressões para as variações da velocidade e da área do jato como funções de z. Avalie a distância vertical necessária para reduzir a velocidade do jato a zero. (Tome a origem das coordenadas na saída do bocal.)

***4.100** Fluido incompressível de viscosidade desprezível é bombeado em uma vazão volumétrica total, Q, através de uma superfície porosa, para o interior de uma pequena fresta entre placas paralelas estreitamente espaçadas, conforme mostrado. O fluido tem apenas movimento horizontal dentro da fresta. Admita escoamento uniforme através de qualquer seção vertical. Obtenha uma expressão para a variação de pressão como uma função de x. *Sugestão*: Aplique a conservação da massa e a equação da quantidade de movimento a um volume de controle diferencial de espessura dx, localizado na posição x.

P4.100

P4.101

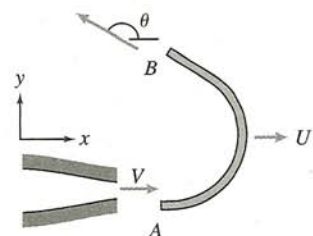
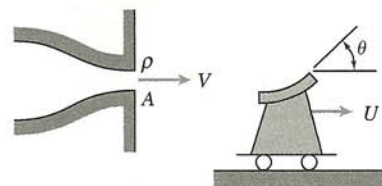
***4.101** Líquido incompressível de viscosidade desprezível é bombeado em uma vazão em volume total, Q, através de dois pequenos orifícios, para o interior de uma pequena fresta entre placas paralelas estreitamente espaçadas, conforme mostrado. O líquido que flui dos orifícios tem apenas movimento radial. Admita escoamento uniforme através de qualquer seção vertical e descarga à pressão atmosférica, em $r = R$. Obtenha uma expressão para a variação de pressão como função do raio. *Sugestão*: Aplique a conservação da massa e a equação da quantidade de movimento a um volume de controle diferencial de espessura dr, localizado no raio r.

***4.102** Líquido cai verticalmente em um canal aberto, retangular, curto e horizontal, de largura b. A vazão volumétrica total, Q, é uniformemente distribuída sobre a área bL. Despreze efeitos viscosos. Obtenha uma expressão para h_1 em termos de h_2, Q e b. *Sugestão*: Escolha um volume de controle com fronteira externa localizada em $x = L$. Esboce o perfil da superfície, $h(x)$. *Sugestão*: Use um volume de controle diferencial de largura dx.

P4.102

*Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

***4.103** A pequena fresta entre duas placas circulares, muito próximas, está inicialmente preenchida com líquido incompressível. Em $t = 0$, a placa superior começa a mover-se para baixo, em direção à placa inferior, com velocidade constante, V_0, causando a expulsão do líquido da fresta. Desprezando efeitos viscosos e admitindo escoamento uniforme na direção radial, desenvolva uma expressão para o campo de velocidade entre as placas paralelas. *Sugestão*: Aplique a conservação da massa a um volume de controle com superfície externa localizada no raio r. Note que, embora a velocidade da placa superior seja constante, o escoamento é não-permanente.

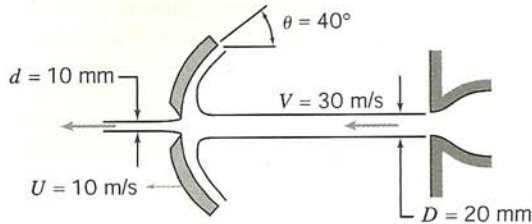
***4.104** Projete um relógio de água egípcio — um vaso do qual a água escoa por gravidade através de um orifício no fundo e que indica o tempo pelo nível da água remanescente. Especifique as dimensões do vaso e o tamanho do orifício de drenagem; indique a quantidade de água necessária para encher o vaso e o intervalo no qual ele deve ser novamente enchido. Plote o raio do vaso em função da elevação.

4.105 Um jato de água é dirigido contra uma placa defletora, que poderia ser uma pá em uma turbina ou em qualquer outra máquina hidráulica. A água sai do bocal estacionário de 50 mm de diâmetro, com uma velocidade de 20 m/s e entra no defletor tangente à superfície em A. A superfície interna da placa, em B, faz um ângulo $\theta = 150°$ com a direção x. Calcule a força que deve ser aplicada para manter a velocidade da placa constante em $U = 5$ m/s.

P4.105

P4.106, 4.107, 4.108, 4.111, 4.123, 4.151, 4.152

4.106 Água proveniente de um bocal estacionário atinge uma pá defletora móvel com curvatura $\theta = 120°$. A pá move-se com velocidade constante, afastando-se do bocal com velocidade $U =$ 30 pés/s, e recebe um jato que sai do bocal com velocidade $V =$ 100 pés/s. O bocal tem uma área de saída de 0,04 pé^2. Determine a força que deve ser aplicada para manter a velocidade da pá constante.

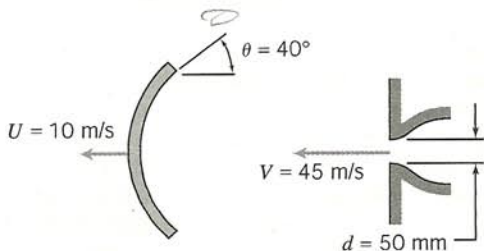
4.107 Um jato d'água saindo de um bocal estacionário encontra uma pá defletora com curvatura $\theta = 90°$ que se afasta do bocal a uma velocidade constante de 15 m/s. O jato tem área de seção de 600 mm^2 e velocidade de 30 m/s. Determine a força que deve ser aplicada para manter a velocidade da pá constante.

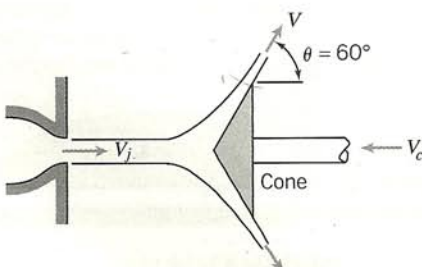
4.108 Um jato de óleo (SG = 0,8) atinge uma pá defletora que altera a direção do fluido de $\theta = 180°$. A área do jato é 1.200 mm^2 e a sua velocidade relativa ao bocal estacionário é de 20 m/s. A pá move-se em direção ao bocal a 10 m/s. Determine a força que deve ser aplicada para manter a velocidade da pá constante.

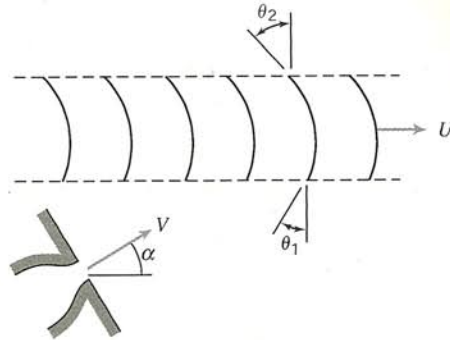
4.109 O disco circular cuja seção reta é mostrada, tem um diâmetro externo de 0,20 m. Um jato d'água com velocidade de 30 m/s atinge o disco concentricamente. O disco se move para a esquerda a 10 m/s. O diâmetro do jato é 20 mm. O disco tem um orifício no seu centro com 10 mm de diâmetro que permite a passagem de uma corrente de água, sem oferecer resistência. O restante do jato é defletido e escoa ao longo do disco. Calcule a força requerida para manter o disco em movimento.

P4.109

4.110 O avião anfíbio Canadair CL-215T é especialmente projetado para combater incêndios. É o único avião em linha de produção que pode sugar água — 1620 galões em 12 segundos — de qualquer lago, rio ou oceano. Determine o empuxo adicional requerido durante a sucção de água, como função da velocidade da aeronave, para uma faixa razoável de velocidades.

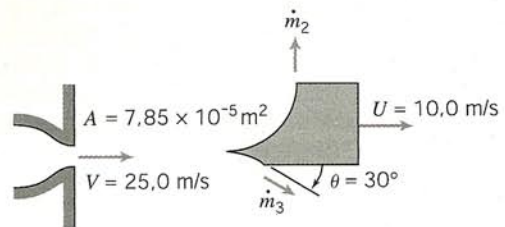
4.111 Considere uma única pá defletora com curvatura θ, movendo-se horizontalmente a velocidade constante, U, sob a influência de um jato que a atinge como no Problema 4.106. A velocidade absoluta do jato é V. Obtenha expressões gerais para a força resultante e para a potência que a pá poderá produzir. Mostre que a potência é maximizada quando $U = V/3$.

4.112 O disco circular cuja seção transversal é mostrada, tem um diâmetro externo de 0,15 m. Um jato d'água o atinge concentricamente e em seguida escoa para fora ao longo da superfície do disco. A velocidade do jato é 45 m/s e o disco move-se para a esquerda a 10 m/s. Determine a espessura da lâmina d'água no raio de 75 mm a partir do eixo do jato. Que força horizontal sobre o disco é necessária para manter esse movimento?

P4.112

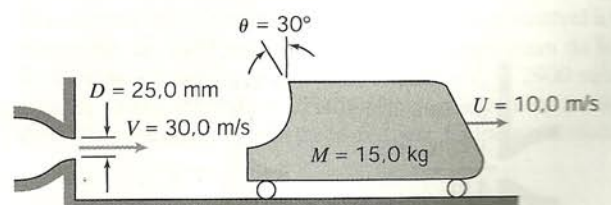
4.113 Água, em um jato de 100 mm de diâmetro e com velocidade de 30 m/s para a direita, é defletida por um cone que se move para a esquerda a 15 m/s. Determine (a) a espessura da lâmina d'água num raio de 200 mm e (b) a força externa horizontal necessária para mover o cone.

P4.113

4.114 Considere uma série de pás curvas, atingidas simultaneamente por um jato contínuo de água que sai de um bocal de 50 mm de diâmetro, a velocidade constante, $V = 86{,}6$ m/s. As pás movem-se a velocidade constante, $U = 50$ m/s. Note que toda a vazão em massa deixando o bocal cruza as pás. A curvatura das pás é descrita pelos ângulos $\theta_1 = 30°$ e $\theta_2 = 45°$, como mostrado. Avalie o ângulo do bocal, α, necessário para garantir que o jato entre tangente à borda de ataque de cada pá. Calcule a força que deve ser aplicada para manter a velocidade das pás constante.

P4.114, 4.115

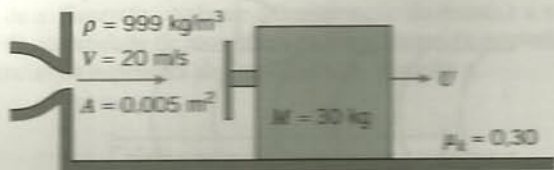
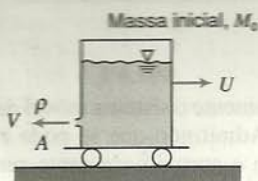
4.115 Considere novamente o sistema móvel de pás múltiplas do Problema 4.114. Admitindo que se pode encontrar um meio de tornar o ângulo α aproximadamente zero (e então, θ_1 aproximadamente 90°), avalie a velocidade das pás, U, que resultaria na máxima potência gerada pelo sistema.

4.116 Um jato plano de água atinge uma pá divisora, repartindo-se em duas correntes planas, conforme mostrado. Determine a razão entre vazões mássicas, $\dot{m}_2/\dot{m}_3$, necessária para produzir força líquida vertical nula sobre a pá divisora. Determine a força horizontal que deve ser aplicada nessas condições para manter o movimento da pá a velocidade constante.

P4.116

4.117 Um jato de solução de lixívia (SG = 1,10) com 50 mm de diâmetro tem velocidade absoluta de 15 m/s. Ele atinge uma placa plana que se move afastando-se do bocal com uma velocidade de 5 m/s. A placa faz um ângulo de 60° com a horizontal. Calcule a força sobre a placa causada pelo jato. Admita ausência de atrito ao longo da superfície da placa.

4.118 Um jato contínuo de água é empregado para propelir um carrinho ao longo de uma pista horizontal, conforme mostrado. A resistência total ao movimento do conjunto do carrinho é dada por $F_D = kU^2$, onde $k = 0{,}92$ N·s²/m². Avalie a aceleração do carrinho no instante em que a sua velocidade é $U = 10$ m/s.

P4.118 4.119, 4.122

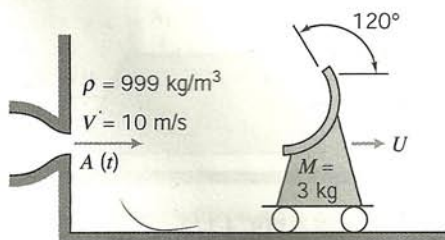
4.119 A catapulta hidráulica do Problema 4.118 é acelerada por um jato de água que atinge a pá curva. O carro move-se ao longo de uma pista horizontal com resistência desprezível. Num dado instante sua velocidade é U. Calcule o tempo requerido para acelerar o carro do repouso a $U = V/2$.

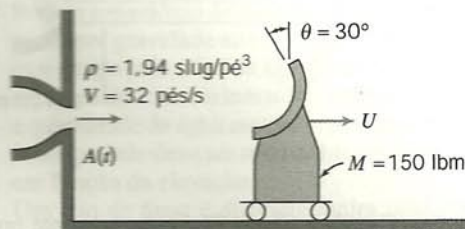
4.120 Um conjunto pá-bloco deslizante move-se sob a influência de um jato líquido, como mostrado. O coeficiente de atrito cinético para o movimento do bloco ao longo da superfície é $\mu_k = 0{,}30$. Calcule (a) a aceleração do bloco no instante em que $U = 10$ m/s e (b) a velocidade final do bloco.

P4.120, 4.131, 4.132

P4.121

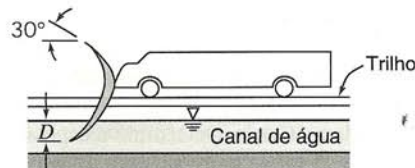
4.121 Um carrinho é propelido por um jato líquido que sai na horizontal de um tanque, como mostrado. A pista é horizontal; a resistência ao movimento pode ser desprezada. O tanque é pressurizado de modo que a velocidade do jato pode ser considerada constante. Obtenha uma expressão geral para a velocidade do carrinho à medida que ele se acelera, partindo do repouso.

4.122 Se o carro do Problema 4.118 for solto em $t = 0$, em que instante você esperaria a aceleração máxima? Esboce o que você esperaria para a curva de aceleração em função do tempo. Qual o valor de θ maximizaria a aceleração em qualquer instante? Por quê? A velocidade do carro será em algum instante igual à velocidade do jato? Explique brevemente.

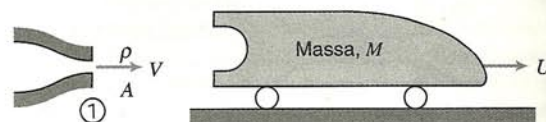
4.123 A aceleração do conjunto pá-carrinho do Problema 4.106 deve ser controlada quando ele parte do repouso pela variação do ângulo da pá, θ. Uma aceleração constante, $a = 1{,}5$ m/s², é desejada. O jato d'água deixa o bocal de área $A = 0{,}025$ m² com velocidade $V = 15$ m/s. O conjunto pá-carrinho tem massa de 55 kg; despreze o atrito. Determine θ no instante $t = 5$ s. Trace um gráfico de $\theta(t)$ para uma dada aceleração constante sobre uma faixa adequada de t.

4.124 O carrinho mostrado rola com resistência desprezível. O carrinho deve acelerar para a direita a uma taxa constante de 2 m/s². Isso deverá ser obtido pela "programação" da área do jato de água, $A(t)$, que atinge o carrinho. A velocidade do jato permanece constante em 10 m/s. Obtenha uma expressão para $A(t)$ requerida, a fim de produzir o movimento. Esboce a variação de área para $t \leq 4$ s. Avalie a área do jato em $t = 2$ s.

P4.124

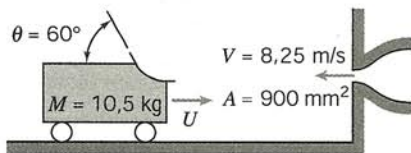
4.125 Um pequeno carrinho com defletor, de massa $M = 150$ lbm, deve ser acelerado por um jato de água. A velocidade do jato é constante em $V = 32$ pés/s, mas a sua área é controlada de forma a variar a vazão em massa. O carrinho deve partir do repouso em $t = 0$ e ser submetido à aceleração constante de 4 pés/s² até que atinja $U = 16$ pés/s. Em seguida, deve prosseguir à velocidade constante. Despreze a resistência ao movimento. Obtenha uma expressão geral para a área de seção reta do jato, $A(t)$, que deve atingir o carrinho durante a aceleração. Avalie a área do jato requerida no instante em que o carrinho começa a mover-se. Determine o instante em que o jato que sai do bocal deve ser cortado.

P4.125

4.126 Um veículo-foguete, pesando 10.000 lbf e viajando a 600 mph, deve ser freado abaixando-se uma pá em forma de concha num reservatório de água. A pá tem 6 pol. de largura. Determine o tempo necessário (após o abaixamento da pá a uma profundidade de 3 pol. dentro d'água), para levar o veículo a uma velocidade de 20 mph. Trace um gráfico da velocidade do foguete em função do tempo.

P4.126, 4.127

4.127 Um veículo-foguete deve ser desacelerado de uma velocidade inicial de 300 m/s abaixando-se uma pá em forma de concha dentro de um reservatório d'água. A pá tem 0,3 m de largura e deflete a água de 150°. O reservatório tem comprimento de 800 m. A massa do veículo é 8000 kg. Na velocidade inicial ele é submetido a uma força de arrasto aerodinâmico de 90 kN. A força aerodinâmica é proporcional ao quadrado da velocidade do veículo. Deseja-se diminuir a velocidade do veículo a 100 m/s. Determine a profundidade D que a pá deve ser imersa na água.

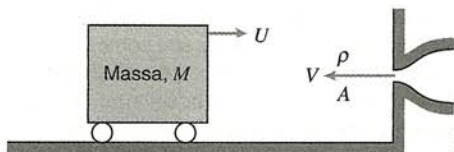
4.128 Partindo do repouso, o carrinho mostrado é propelido por uma catapulta hidráulica (jato líquido). O jato atinge a superfície curva e faz uma curva de 180°, saindo na horizontal. As resistências de rolamento e do ar podem ser desprezadas. Se a massa do carrinho é de 100 kg e o jato d'água sai do bocal (área de 0,001 m²) com uma velocidade de 30 m/s, determine a velocidade do carrinho 5 s após o jato ser dirigido contra ele. Trace um gráfico da velocidade do carrinho em função do tempo.

P4.128, 4.129, 4.153

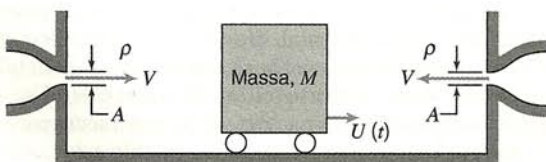
4.129 Considere novamente o jato e o carrinho do Problema 4.128, mas inclua agora uma força de arrasto aerodinâmico proporcional ao quadrado da velocidade do carrinho, $F_D = kU^2$, com $k = 2{,}0\ \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$. Deduza uma expressão para a aceleração do carrinho como uma função de sua velocidade e de outros parâmetros dados. Avalie a aceleração do carrinho para $U = 10$ m/s. Que fração da velocidade final é essa velocidade?

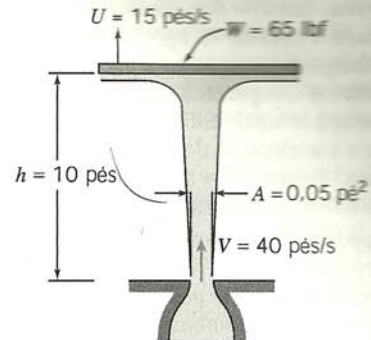
4.130 Um carrinho que carrega uma única pá defletora rola numa superfície nivelada. A massa do carrinho é $M = 10{,}5$ kg e a sua velocidade inicial é $U_0 = 12{,}5$ m/s. Em $t = 0$, a pá é atingida por um jato de água, em sentido oposto, conforme mostrado. Despreze quaisquer forças externas decorrentes de resistência do ar ou de rolamento. Determine o tempo e a distância necessários para o jato de líquido provocar a parada do carrinho. Trace um gráfico da velocidade do carrinho (adimensionalizada em U_0) e da distância percorrida em função do tempo.

P4.130

4.131 Resolva o Problema 4.120 considerando a pá e o bloco deslizante sobre uma película de óleo, em vez de estar em contato direto com a superfície. Admita que a resistência ao movimento é proporcional à velocidade, $F_R = kU$, com $k = 7{,}5\ \text{N} \cdot \text{s/m}$.

4.132 Considere novamente o enunciado e o diagrama do Problema 4.120. Obtenha expressões gerais para a aceleração e para a velocidade do bloco deslizante como funções do tempo. Avalie a velocidade final para as condições dadas no Problema 4.120. Trace um gráfico da velocidade de deslizamento e da aceleração em função do tempo.

4.133 Um bloco retangular de massa M, com faces verticais, rola sem resistência ao longo de um plano horizontal liso, conforme mostrado. O bloco viaja, inicialmente, à velocidade U_0. Em $t = 0$ ele é atingido por um jato líquido e a sua velocidade começa a diminuir. Obtenha uma expressão algébrica para a aceleração do bloco para $t > 0$. Resolva a equação a fim de determinar o instante em que $U = 0$.

P4.133

4.134 Um bloco retangular de massa M, com faces verticais, rola em uma superfície horizontal entre dois jatos opostos, conforme mostrado. Em $t = 0$, o bloco é posto em movimento à velocidade U_0. Subseqüentemente, ele move-se sem atrito paralelamente aos eixos dos jatos com velocidade $U(t)$. Despreze a massa de qualquer líquido aderente ao bloco, em comparação com M. Obtenha expressões gerais para a aceleração do bloco, $a(t)$, e para sua velocidade, $U(t)$.

P4.134, 4.135

4.135 Considere novamente o enunciado e a figura do Problema 4.134. Admita que em $t = 0$, quando o bloco está em $x = 0$, ele é posto em movimento à velocidade $U_0 = 10$ m/s, para a direita. Calcule o tempo requerido para reduzir a velocidade do bloco a $U = 0{,}5$ m/s, e a posição do bloco naquele instante.

P4.136, 4.137

***4.136** Um jato vertical de água choca-se contra um disco horizontal, conforme mostrado. O conjunto do disco pesa 65 lbf. Quando o disco encontra-se a 10 pés acima da saída do bocal, está se movendo para cima com $U = 15$ pés/s. Calcule a aceleração vertical do disco neste instante.

***4.137** Um jato vertical de água deixa um bocal de 75 mm de diâmetro. O jato atinge um disco horizontal (veja Problema 4.136). O disco é restringido horizontalmente mas é livre para se mover verticalmente. A massa do disco é 30 kg. Plote a massa do disco em função da vazão para determinar a vazão de água requerida para suspender o disco 3,5 m acima do plano de saída do jato.

4.138 Um trenó-foguete viajando numa pista horizontal é desacelerado por um retro-foguete queimando no sentido do trajeto. A velocidade inicial do trenó é $U_0 = 578$ m/s. A massa inicial do trenó é $M_0 = 1620$ kg. O retro-foguete consome combustível a uma taxa de 7,75 kg/s e os gases de descarga saem à pressão atmosférica e a uma velocidade de 2540 m/s em relação à cápsula. O retro-foguete queima por 23,9 s. Despreze o arrasto aerodinâmico e a resistência ao movimento. Obtenha uma expressão algébrica para a velocidade do trenó U como função do tempo de funcionamento do retro-foguete. Calcule a velocidade do trenó no final de funcionamento do retro-foguete.

4.139 Uma cápsula espacial tripulada viaja em vôo nivelado acima da atmosfera terrestre à velocidade inicial $U_0 = 8{,}05$ km/s. A cápsula deve ser desacelerada por um retro-foguete até $U = 5{,}00$ km/s na preparação para a manobra de reentrada. A massa inicial da cápsula é $M_0 = 1600$ kg. O foguete consome combustível a $\dot{m} = 8{,}0$ kg/s e os gases de descarga saem à $V_e = 2940$ m/s em relação à cápsula e à pressão desprezível. Avalie a duração de funcionamento do retro-foguete necessária para realizar a desaceleração.

4.140 Um trenó-foguete acelera do repouso sobre uma pista com resistências do ar e de rolamento desprezíveis. A massa inicial do trenó é $M_0 = 600$ kg. O foguete contém inicialmente 150 kg de combustível. O motor do foguete queima combustível à taxa constante, $\dot{m} = 15$ kg/s. Os gases de descarga saem do bocal do foguete em um fluxo uniforme e axial à $V_e = 2900$ m/s em relação ao bocal e à pressão atmosférica. Determine a velocidade máxima atingida pelo trenó-foguete. Calcule a aceleração

*Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

máxima do trenó durante a corrida. Plote a velocidade e a aceleração do foguete em função do tempo.

4.141 Um trenó-foguete com massa inicial de 3 toneladas, incluindo 1 tonelada de combustível, repousa em um trecho nivelado de uma pista. Em $t = 0$ o combustível sólido sofre ignição e é queimado à taxa de 75 kg/s. A velocidade de saída dos gases de descarga em relação ao foguete é de 2500 m/s e a pressão é atmosférica. Desprezando o atrito e a resistência do ar, calcule a aceleração e a velocidade do trenó em $t = 10$ s. Plote a velocidade e a aceleração do foguete como função do tempo.

4.142 Um trenó-foguete com massa inicial de 2000 lbm deve ser acelerado em uma pista horizontal. O motor do foguete queima combustível a uma taxa constante $\dot{m} = 30$ lbm/s. Os gases de descarga saem em um fluxo uniforme e axial, deixando o bocal à velocidade de 9000 pés/s em relação ao bocal. Determine a massa mínima de combustível necessária para propelir o trenó a uma velocidade de 600 mph antes que o foguete apague. Como primeira aproximação, despreze forças resistentes.

4.143 Um trenó-foguete tem massa inicial de 4 toneladas, incluindo uma tonelada de combustível. A resistência ao movimento na pista sobre a qual o trenó progride e a do ar totalizam kU, onde k é 75 N · s/m, e U é a velocidade do trenó em m/s. A velocidade de saída dos gases de descarga relativa ao foguete é de 1500 m/s, e a pressão é atmosférica. A queima de combustível dá-se à taxa de 90 kg/s. Calcule a velocidade do trenó após 10 s. Plote a velocidade e a aceleração do foguete como função do tempo.

4.144 Um motor de foguete é usado para acelerar um míssil à velocidade de 1,8 km/s em um vôo horizontal. Os gases de descarga deixam o bocal axialmente e à pressão atmosférica com uma velocidade de 3000 m/s relativa ao foguete. A ignição do motor do foguete se dá no momento do lançamento do míssil por uma aeronave voando horizontalmente à $U_0 = 300$ m/s. Desprezando resistência do ar, obtenha uma expressão algébrica para a velocidade alcançada pelo míssil no vôo nivelado. Determine a mínima fração da massa inicial do míssil que deve ter o combustível para realizar a aceleração desejada.

4.145 Um destemido piloto, considerando uma tentativa de recorde — para o mais longo salto de motocicleta do mundo —, procura ajuda com seu consultor: ele deve atingir 875 km/h (a partir do repouso sobre um terreno plano) para realizar o salto, e, assim, ele precisa da propulsão de um foguete. A massa total da motocicleta, do motor de foguete sem combustível e do motociclista é de 375 kg. Os gases deixam o bocal do foguete horizontalmente, à pressão atmosférica, com velocidade de 2510 m/s. Avaliar a mínima quantidade de combustível do foguete necessária para acelerar a motocicleta e o motociclista até a velocidade requerida.

4.146 Um grande foguete de dois estágios a combustível líquido com massa de 30.000 kg deve ser lançado de uma plataforma ao nível do mar. O motor principal queima hidrogênio líquido e oxigênio líquido em uma mistura estequiométrica à 2450 kg/s. O bocal de empuxo tem um diâmetro de saída de 2,6 m. Os gases de exaustão deixam o bocal à 2270 m/s e à pressão absoluta de 66 kPa. Calcule a aceleração do foguete ao deixar o solo. Obtenha uma expressão para a velocidade como uma função do tempo, desprezando resistência do ar.

4.147 Desprezando a resistência do ar, que velocidade atingiria um foguete lançado verticalmente 10 segundos após a sua partida do repouso, se a sua massa é de 200 kg, queima 10 kg/s e ejeta gases à pressão atmosférica com velocidade de 2900 m/s em relação ao foguete? Plote a velocidade do foguete como função do tempo.

4.148 Um foguete a combustível sólido, de "construção caseira", tem uma massa inicial de 20 lbm; dessa, 15 lbm são de combustível. O foguete é dirigido verticalmente para cima, do repouso, queima combustível à taxa constante de 0,5 lbm/s e ejeta os gases de descarga a uma velocidade de 6500 pés/s em relação ao foguete. Admita que a pressão na saída é a atmosférica e que a resistência do ar pode ser desprezada. Calcule a velocidade do foguete após 20 s e a distância por ele percorrida no mesmo intervalo. Plote a velocidade do foguete e a distância percorrida como função do tempo.

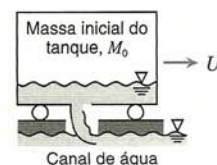
4.149 Considere o trenó-foguete do Problema 4.143. Deduza uma expressão algébrica para a aceleração do trenó como uma função do tempo. Calcule a velocidade máxima alcançada pelo trenó e o instante em que isso ocorre. Plote a aceleração e a velocidade do trenó em função do tempo para $0 \leq t \leq 15$ s.

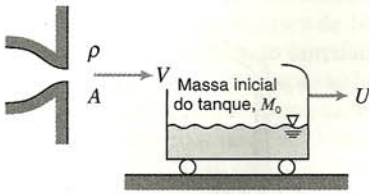
4.150 Encha um balão de brinquedo com ar e depois libere-o num quarto. Observe como o balão desloca-se bruscamente de um lado para o outro no quarto. Explique o que causa esse fenômeno.

4.151 O conjunto pá-carrinho de massa $M = 30$ kg, mostrado no Problema 4.106, é guiado por um jato d'água. A água deixa um bocal estacionário de área $A = 0{,}02$ m², com velocidade de 20 m/s. O coeficiente de atrito cinético entre o conjunto e a superfície é 0,10. Plote a velocidade terminal do conjunto como uma função do ângulo de desvio da pá, θ, para $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Em qual ângulo o conjunto começa a se mover se o coeficiente de atrito estático é 0,15?

4.152 O ângulo θ do conjunto pá-carrinho no Problema 4.151 é ajustado em 60°. Determine a velocidade do carro em $t = 1$ s. Plote a velocidade do carro como uma função do tempo.

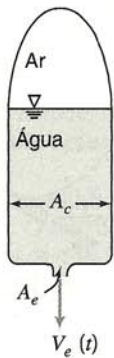
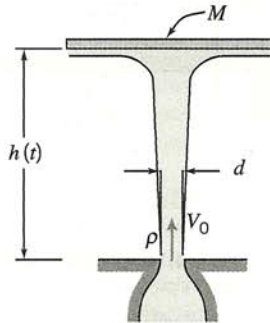
4.153 Considere o veículo mostrado no Problema 4.128. Partindo do repouso, ele é propelido por uma catapulta hidráulica (jato de líquido). O jato atinge a superfície curva e faz uma volta de 180°, saindo horizontalmente. As resistências do ar e de rolamento podem ser desprezadas. Usando a notação mostrada, obtenha uma equação para a aceleração do veículo em qualquer instante e determine o tempo requerido para o veículo alcançar $U = V/2$.

4.154 O tanque móvel mostrado deve ser desacelerado abaixando-se uma concha para captar água de um reservatório. A massa inicial e a velocidade do carrinho, com seu conteúdo, são M_0 e U_0, respectivamente. Despreze forças externas decorrentes de pressão ou atrito e admita que a pista é horizontal. Aplique a equação da continuidade e da quantidade de movimento para mostrar que em qualquer instante $U = U_0M_0/M$. Obtenha uma expressão geral para U/U_0 como uma função do tempo.

P4.154

4.155 O tanque mostrado rola com resistência desprezível ao longo de uma pista horizontal. Ele deve ser acelerado do repouso por um jato líquido que se choca contra a pá e é defletido para dentro do tanque. A massa inicial do tanque é M_0. Use as equações da continuidade e da quantidade de movimento para mostrar que em qualquer instante a massa do veículo e do conteúdo líquido é $M = M_0V/(V - U)$. Obtenha uma expressão geral para U/V como uma função do tempo.

P4.155

4.156 Um pequeno motor de foguete é utilizado para acionar um aparelho "jato portátil" destinado a levantar um único astronauta acima da superfície da Terra. O motor do foguete produz um jato de descarga uniforme com velocidade constante, V_e = 2940 m/s. A massa inicial total do astronauta e do aparelho é M_0 = 130 kg. Dessa, 40 kg são de combustível para o motor do foguete. Desenvolva uma expressão algébrica para a vazão mássica variável de combustível requerida para manter o aparelho e o astronauta pairando numa posição fixa acima do solo. Calcule o tempo máximo que o aparelho e o astronauta pairam no alto antes que o suprimento de combustível termine.

4.157 Um modelo de foguete a propelente sólido tem uma massa de 69,6 g, dos quais 12,5 g são de combustível. O foguete produz 1,3 lbf de empuxo por um período de 1,7 s. Para essas condições, calcule a velocidade e altura máximas atingidas, na ausência de resistência do ar. Trace um gráfico da velocidade do foguete e da distância viajada como função do tempo.

***4.158** Diversos fabricantes de brinquedos vendem "foguetes" de água que consistem de um tanque de plástico a ser parcialmente enchido com água e em seguida pressurizado com ar. Quando liberado, o ar força a água a sair do bocal rapidamente, propelindo o foguete. Você é chamado a ajudar na especificação das condições ótimas para esse sistema de propulsão a água. Para simplificar a análise, considere movimento horizontal apenas. Faça a análise e o projeto necessários para definir o desempenho em aceleração do foguete propelido a ar e água comprimidos. Identifique a fração de volume do tanque que inicialmente deve ser enchida com ar comprimido para se atingir o desempenho máximo (i.e., a máxima velocidade da carga de água). Descreva o efeito da variação da pressão inicial do ar no tanque.

P4.158

P4.159

***4.159** Um disco de massa M é restringido horizontalmente porém está livre para movimentar-se na vertical. Um jato d'água choca-se com o disco por baixo. O jato deixa o bocal à velocidade inicial V_0. Obtenha uma equação diferencial para a altura do disco, $h(t)$, acima do plano de saída do jato, se o disco for largado de uma grande altura, H. Suponha que, quando o disco atinge o equilíbrio, a sua altura acima do plano de saída do jato é h_0. Esboce um gráfico de $h(t)$ para o disco liberado em $t = 0$, partindo de $H > h_0$. Explique por que o esboço tem o aspecto que você encontrou.

***4.160** Considere a configuração do jato vertical chocando-se contra um disco vertical mostrado no Problema 4.136. Suponha que o disco é largado do repouso a uma altura inicial de 10 pés acima do plano de saída do jato. Resolva para o movimento subseqüente do disco. Identifique a altura de regime permanente do disco.

4.161 Um pequeno motor de foguete a combustível sólido é disparado em uma bancada de testes. A câmara de combustão é circular, com 100 mm de diâmetro. O combustível, de densidade 1660 kg/m³, queima uniformemente à taxa de 12,7 mm/s. Medições mostram que os gases de descarga saem do foguete à pressão ambiente, em uma velocidade de 2750 m/s. A pressão e a temperatura absolutas na câmara de combustão são, respectivamente, 7,0 MPa e 3610 K. Trate os produtos da combustão como gás ideal com massa molecular 25,8. Avalie as taxas de variação de massa e de quantidade de movimento dentro do motor do foguete. Expresse a taxa de variação da quantidade de movimento dentro do motor como um percentual do empuxo do motor.

***4.162** Analise o projeto e otimize o desempenho de um carrinho propelido ao longo de uma pista horizontal por um jato d'água que sai sob ação da gravidade de um tanque cilíndrico aberto carregado sobre a carroceria do carrinho. (Um carrinho propelido a jato d'água é mostrado no diagrama do Problema 4.121.) Despreze qualquer variação na inclinação da superfície livre do líquido no tanque durante a aceleração. Analise o movimento do carrinho ao longo da pista horizontal, considerando que ele parte do repouso e começa a se acelerar quando o jato d'água começa a escoar. Deduza equações algébricas ou resolva numericamente para a aceleração e velocidade do carrinho como funções do tempo. Apresente os resultados como gráficos de aceleração e de velocidade em função do tempo, desprezando a massa do tanque. Determine as dimensões de um tanque de massa mínima requerido para acelerar o carrinho do repouso ao longo da pista horizontal até uma velocidade especificada em um intervalo de tempo especificado.

***4.163** Uma demonstração em sala de aula de quantidade de movimento linear é planejada usando um sistema de propulsão a jato d'água para um carrinho trafegando sobre uma pista horizontal retilínea. A pista tem 5 m de comprimento e a massa do carro é de 155 g. O objetivo do projeto é obter o melhor desempenho para o carrinho, usando 1 litro de água contida em um tanque cilíndrico aberto feito de folha de plástico com massa específica de 0,0819 g/cm³. Para estabilidade, a máxima altura do tanque de água não pode exceder 0,5 m. O diâmetro do jato liso e bem arredondado de água não pode exceder 10 por cento do diâmetro do tanque. Determine as melhores dimensões do tanque e do jato d'água por modelagem do desempenho do sistema. Plote aceleração, velocidade e distância como funções do tempo. Encontre as dimensões ótimas do tanque e da abertura do jato d'água no tanque. Discuta as limitações de sua análise. Discuta como as considerações afetam o desempenho previsto do carro. Seria o desempenho real do carrinho melhor ou pior que o previsto? Por quê? Que fatores contribuem para diferença(s) entre o desempenho real e o previsto?

***4.164** A capacidade da instalação do centro de pesquisa para cargas de solo e tração de aeronaves da NASA em Langley deve ser

*Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda da continuidade no material do texto.

ampliada. A instalação consiste de um reboque montado em trilhos e propelido por jato d'água proveniente de um tanque pressurizado. (O conjunto é idêntico conceitualmente à catapulta hidráulica do Problema 4.118.) As especificações requerem aceleração do reboque com massa de 49.000 kg até a velocidade de 220 nós em uma distância de 122 m. (O ângulo da pá defletora é 170°.) Identifique a faixa de dimensões e velocidades de jatos d'água necessários para realizar a operação. Especifique a pressão de operação recomendada para o sistema de jato d'água e determine a forma e tamanho estimado do tanque de contenção da água pressurizada.

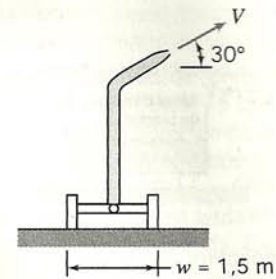
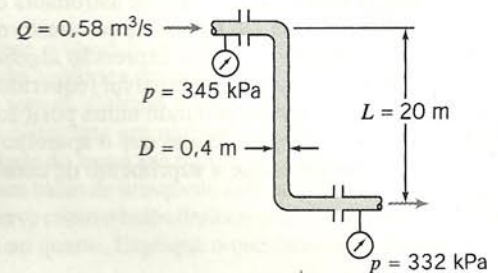
4.165 Um programa de computador desenvolvido para auxiliar este texto pode ser obtido no *website* da Wiley (ver Prefácio). Um módulo simula o desempenho de um foguete vertical. Cinco parâmetros podem ser variados:

M_f = massa de combustível, kg
m_e = vazão de combustível, kg/s
V_e = velocidade de exaustão do foguete, m/s
C_D = coeficiente de arrasto aerodinâmico, adimensional
ρ = massa específica do ar, kg/m³ (constante ou variável com a altitude)

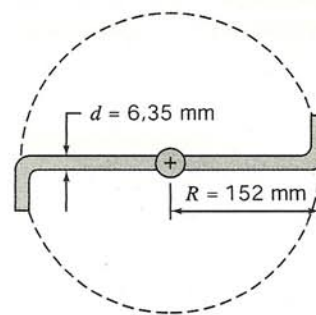
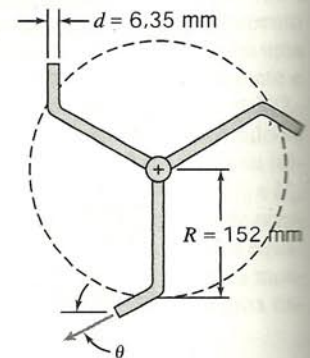
Na simulação, o combustível tem metade da massa total do foguete no lançamento. O diâmetro é dimensionado pela massa do foguete e o comprimento pela razão entre comprimento e diâmetro igual a 5. A simulação gera gráficos de aceleração, velocidade e altitude como funções do tempo. Os resultados podem ser explorados em detalhe, movendo um cursor ao longo do eixo do tempo. Resumos dos resultados das cinco simulações mais recentes são arquivados para comparação. Verifique as previsões da simulação para o caso ideal de arrasto aerodinâmico nulo. Use a simulação para explorar o efeito do arrasto aerodinâmico no desempenho do foguete em uma atmosfera de massa específica constante. Estenda a análise idealizada do Problema-Exemplo 4.12 ao cálculo da altitude do foguete como função do tempo para arrasto aerodinâmico nulo. Analise a fase da trajetória do foguete posterior ao fim da queima de combustível para o caso de arrasto aerodinâmico nulo. Verifique as previsões da simulação para esses casos. Plote aceleração, velocidade e altitude do foguete em função do tempo, em uma atmosfera de massa específica constante, com $C_D = 0,375$. Discuta aspectos importantes do gráfico de desempenho; explique as formas das curvas. Seria o desempenho real do foguete melhor ou pior do que o previsto? Por quê? Que fatores contribuem para diferença(s) entre o desempenho real e o previsto?

***4.166** O cotovelo redutor de 90° do Problema-Exemplo 4.7 descarrega para a atmosfera. A Seção ② está localizada 0,3 m à direita da Seção ①. Estimar o momento exercido pelo flange no cotovelo.

***4.167** Uma grande unidade borrifadora de irrigação montada sobre um carrinho, descarrega água com uma velocidade de 40 m/s a um ângulo de 30° com a horizontal. O bocal de 50 mm de diâmetro está 3 m acima do solo. A massa do borrifador e do carro é M = 350 kg. Calcule a magnitude do momento que tende a fazer tombar o carrinho. Que valor de V causará o movimento iminente de tombamento? Qual será a natureza do movimento iminente? Qual é o efeito do ângulo de inclinação do jato sobre os resultados? Para o caso do movimento iminente, trace um gráfico da velocidade como função do ângulo de inclinação do jato sobre uma faixa apropriada de ângulos.

*Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda da continuidade no material do texto.

P4.167

P4.168

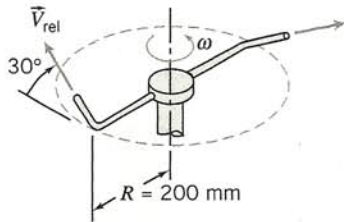
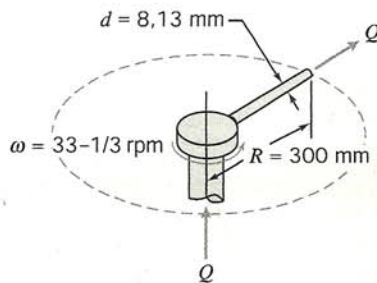
***4.168** Petróleo bruto (SG = 0,95) proveniente de um petroleiro escoa em uma tubulação de 0,4 m de diâmetro, com a configuração mostrada. A vazão em volume é 0,58 m³/s e as pressões manométricas são mostradas no diagrama. Determine a força e o torque exercidos pela tubulação sobre os seus suportes.

***4.169** O borrifador de gramados mostrado, simplificado, gira no plano horizontal. No pivô central, Q = 4,5 gpm de água entram verticalmente. A água é descarregada no plano horizontal de cada jato. Considerando o pivô sem atrito, calcule o torque necessário para manter o borrifador sem girar. Desprezando a inércia do próprio borrifador, calcule a aceleração angular resultante quando o torque é removido.

P4.169, 4.170, 4.171 **P4.172**

***4.170** Considere novamente o borrifador do Problema 4.169. Deduza uma equação diferencial para a velocidade angular do borrifador como uma função do tempo. Avalie a sua velocidade de rotação em regime permanente, considerando que não há atrito no pivô.

***4.171** Repita o Problema 4.170, porém, admita um torque retardador constante no pivô igual a 0,045 pé · lbf.

***4.172** O borrifador de gramados mostrado é alimentado com água a uma taxa de 68 l/min. Desprezando o atrito no pivô, determine a velocidade angular do borrifador em regime permanente, para $\theta = 30°$. Trace um gráfico da velocidade angular do borrifador em regime permanente para $0 \leq \theta \leq 90°$.

***4.173** A figura mostra um pequeno borrifador de gramados. Ele opera a uma pressão manométrica de 140 kPa. A vazão volumétrica total de água, através do borrifador, é de 4 l/min. Cada jato descarrega a 17 m/s (em relação ao braço do borrifador) em uma direção inclinada de 30° acima da horizontal. O borrifador gira em torno de um eixo vertical. O atrito no mancal causa um torque de 0,18 N · m em oposição à rotação. Avalie o torque necessário para manter o borrifador estacionário.

P4.173, 4.175, 4.177

P4.174

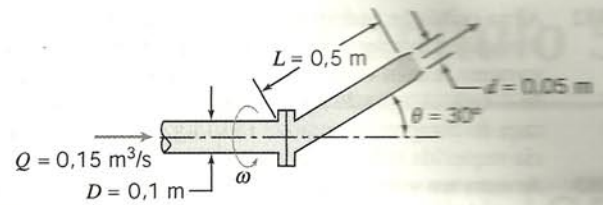
***4.174** Um tubo único transportando água gira com velocidade angular constante, conforme mostrado. Água é bombeada através do tubo em uma vazão em volume Q = 13,8 l/min. Determine o torque que deve ser aplicado para manter a rotação constante do tubo, usando dois métodos de análise: (a) um volume de controle rotativo e (b) um volume de controle fixo.

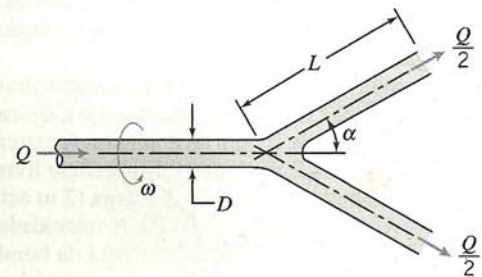
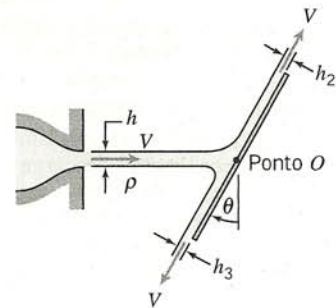
***4.175** No Problema 4.173, calcule a aceleração inicial do borrifador, a partir do repouso, considerando que não há torque externo aplicado e que o momento de inércia da cabeça do borrifador é de 0,1 kg · m² quando cheio com água.

***4.176** Quando uma mangueira de jardim é usada para encher um balde, a água no balde pode desenvolver um movimento giratório ou de redemoinho. Por que isso ocorre? Como poderia ser calculada aproximadamente a quantidade de movimento giratório?

***4.177** Um pequeno borrifador de gramados é mostrado (Problema 4.173). O borrifador opera com uma pressão manométrica na entrada de 140 kPa. A vazão total em volume de água através do aparelho é 4,0 l/min. Cada jato descarrega a 17 m/s (em relação ao braço do borrifador) e em uma direção inclinada de 30° acima da horizontal. O borrifador gira em torno de um eixo vertical. O atrito no mancal causa um torque de 0,18 N · m em oposição à rotação. Determine a velocidade constante de rotação do borrifador e a área aproximada coberta pelo borrifo.

***4.178** Água escoa à taxa de 0,15 m³/s através de um conjunto de bocal que gira à velocidade constante de 30 rpm. As massas do braço e do bocal são desprezíveis comparadas com a massa de água no interior. Determine o torque necessário para acionar o aparelho e os torques de reação no flange.

*Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda da continuidade no material do texto.

P4.178

4.179 Um tubo bifurca-se simetricamente em duas pernas de comprimento L, e todo o sistema gira com velocidade angular ω em torno do seu eixo de simetria. Cada perna é inclinada de um ângulo α em relação ao eixo de rotação. Líquido entra no tubo em regime permanente, com momento de quantidade de movimento nulo, em uma vazão em volume Q. O diâmetro do tubo, D, é muito menor que L. Obtenha uma expressão para o torque externo necessário para girar o tubo. Que torque adicional seria necessário para imprimir a aceleração angular $\dot{\omega}$?

P4.179

P4.180

***4.180** Líquido em uma fina lâmina, de largura w e espessura h, escoa de uma ranhura e choca-se contra uma placa plana estacionária, conforme mostrado. Experiências mostram que a força resultante do jato líquido sobre a placa não atua através do ponto O, onde a linha de centro do jato intercepta a placa. Determine a magnitude e a linha de ação da força resultante como funções de θ. Avalie o ângulo de equilíbrio da placa, se a força resultante fosse aplicada no ponto O. Despreze quaisquer efeitos viscosos.

***4.181** Para o regador giratório do Problema-Exemplo 4.14, qual o valor de α produzirá máxima velocidade de rotação? Que ângulo fornecerá a máxima área de cobertura pelo borrifador? Desenhe um diagrama (usando um sistema de coordenadas r, θ, z) para indicar a velocidade absoluta do jato d'água deixando o bocal. O que governa a velocidade de rotação constante do regador? A velocidade de rotação do regador afeta a área coberta pelo borrifador? Como você poderia estimar essa área? Para α fixo, o que pode ser feito para aumentar ou diminuir a área coberta pelo borrifador?

4.182 Ar na condição padrão entra em um compressor a 75 m/s e sai à pressão e temperatura absolutas de 200 kPa e 345 K respectivamente, e com velocidade $V = 125$ m/s. A vazão em massa é de 1 kg/s. A água de refrigeração que circula em volta da carcaça do compressor remove 18 kJ/kg de ar. Determine a potência requerida pelo compressor.

4.183 Ar entra em um compressor a 14 psia, 80°F, com velocidade desprezível e é descarregado a 70 psia, 500°F, com velocidade de 500 pés/s. Se a potência fornecida ao compressor for 3200 hp e a vazão em massa 20 lbm/s, determine a taxa de transferência de calor.

4.184 Ar é aspirado da atmosfera para dentro de uma turbo-máquina. Na saída, as condições são 500 kPa (manométrica) e 130°C. A velocidade de saída é de 100 m/s e a vazão em massa é de 0,8 kg/s. O escoamento é permanente e não há transferência de calor. Calcule a interação do trabalho de eixo com o ambiente.

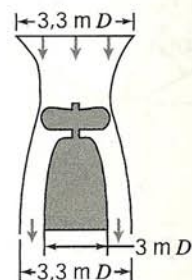
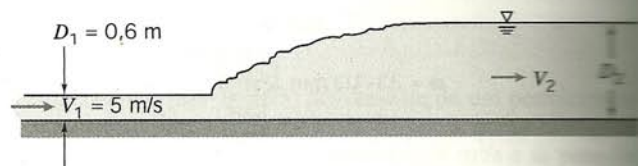
4.185 Uma turbina é alimentada com 0,6 m³/s de água por meio de um tubo com 0,3 m de diâmetro; o tubo de descarga tem diâmetro de 0,4 m. Determine a queda de pressão através da turbina, se ela fornece 60 kW.

4.186 Ar comprimido é armazenado numa garrafa pressurizada com um volume de 10 pés³, a 3000 psia e 140°F. Em um certo instante, uma válvula é aberta e massa flui da garrafa à taxa $\dot{m} = 0{,}105$ lbm/s. Determine a taxa de variação da temperatura na garrafa naquele instante.

4.187 Uma bomba retira água de um reservatório através de um tubo de aspiração de 150 mm de diâmetro e a descarrega para um tubo de descarga de 75 mm de diâmetro. A extremidade do tubo de aspiração está 2 m abaixo da superfície livre do reservatório. O manômetro no tubo de descarga (2 m acima da superfície do reservatório) indica 170 kPa. A velocidade média no tubo de descarga é de 3 m/s. Se a eficiência da bomba for de 75%, determine a potência necessária para acioná-la.

4.188 Uma bomba centrífuga de água com tubo de aspiração de diâmetro igual a 4 pol. e tubo de descarga de 4 pol. de diâmetro tem uma vazão volumétrica de 300 gpm. A pressão de entrada é de 8 pol. de Hg de vácuo e a pressão de saída é de 35 psig. As seções de admissão e de descarga estão localizadas na mesma elevação. A potência medida fornecida à bomba é de 9,1 hp. Determine a eficiência da bomba.

4.189 Todos os grandes portos são equipados com barcos de combate a incêndio para socorrer navios. Uma mangueira com 75 mm de diâmetro está conectada à descarga de uma bomba de 10 kW em um desses barcos. O bocal conectado à extremidade da mangueira tem um diâmetro de 25 mm. Se a descarga do bocal for mantida 3 m acima da superfície da água, determine a vazão em volume através do bocal, a altura máxima que a água chegará e a força sobre o barco, considerando que o jato é dirigido horizontalmente sobre a popa.

***4.190** A massa total do aparelho tipo helicóptero mostrado é de 1500 kg. A pressão do ar é a atmosférica na descarga. Admita que o escoamento é permanente e unidimensional. Trate o ar como incompressível na condição padrão e calcule, para uma posição em que o aparelho paira no ar, a velocidade do ar que sai do veículo e a potência mínima que deve ser fornecida ao ar pela hélice.

P4.190

P4.191

4.191 Líquido escoando à alta velocidade em um canal horizontal aberto e largo pode, sob certas condições, produzir um ressalto hidráulico conforme mostrado. Para um volume de controle adequadamente escolhido, os fluxos entrando e saindo do ressalto podem ser considerados uniformes com distribuições hidrostáticas de pressão (veja o Problema-Exemplo 4.6). Considere um canal de largura w com escoamento de água a $D_1 = 0{,}6$ m e $V_1 = 5$ m/s. Mostre que, em geral, $D_2 = D_1[\sqrt{1 + 8V_1^2/gD_1} - 1]/2$. Avalie a variação em energia mecânica através do ressalto hidráulico. Se a transferência de calor para o meio ambiente for desprezível, determine a variação na temperatura da água através do ressalto.

*Esse problema requer material das seções que podem ser omitidas sem perda da continuidade no material do texto.

Capítulo 5

INTRODUÇÃO À ANÁLISE DIFERENCIAL DOS MOVIMENTOS DOS FLUIDOS

No Cap. 4 desenvolvemos as equações básicas na forma integral para um volume de controle. Elas são particularmente úteis quando estamos interessados no comportamento genérico de um campo de escoamento e nos seus efeitos sobre dispositivos quaisquer. Contudo, o método de aproximação integral não nos capacita a obter conhecimentos ponto a ponto do campo de escoamento.

Para obter esse conhecimento detalhado, devemos aplicar as equações dos movimentos dos fluidos na forma diferencial. Neste capítulo, desenvolveremos equações diferenciais para a conservação da massa e a segunda lei de Newton. Como temos interesse na formulação de equações diferenciais, a nossa análise será em termos de sistemas e volumes de controle infinitesimais.

Fig. 5.1 Volume de controle diferencial em coordenadas retangulares.

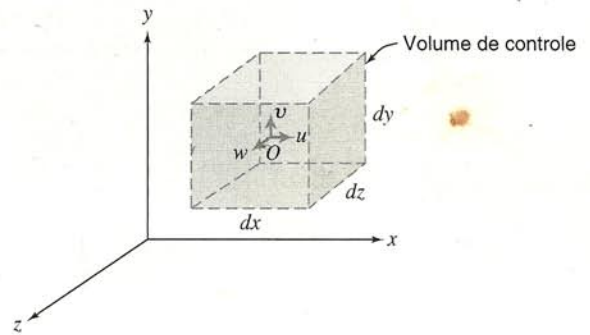
5.1 A CONSERVAÇÃO DA MASSA

No Cap. 2, verificamos que a hipótese do contínuo — aquela segundo a qual um fluido pode ser tratado como uma distribuição contínua de matéria — levava diretamente a uma representação de campo das propriedades dos fluidos. Os campos de propriedades são definidos por funções contínuas das coordenadas espaciais e do tempo. Os campos da massa específica e da velocidade são relacionados através da conservação da massa. Deduziremos a equação diferencial para a conservação da massa em coordenadas retangulares e cilíndricas. Em ambos os casos, a dedução é feita pela aplicação da conservação da massa a um volume de controle diferencial.

5.1.1 Sistema de Coordenadas Retangulares

Em coordenadas retangulares, o volume de controle escolhido é um cubo infinitesimal com lados de comprimento dx, dy, dz, conforme mostrado na Fig. 5.1. A massa específica no centro, O, do volume de controle é ρ e a velocidade é $\vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$.

A fim de avaliar as propriedades em cada uma das seis faces da superfície de controle, usaremos uma expansão em série de Taylor em relação ao ponto O. Por exemplo, na face direita,

$$\rho\Big)_{x+dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2} + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \cdots$$

Desprezando os termos de ordem superior, podemos escrever

$$\rho\Big)_{x+dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

e

$$u\Big)_{x+dx/2} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

onde ρ, u, $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ são todos avaliados no ponto O. Os termos correspondentes na face esquerda são

$$\rho\Big)_{x-dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(-\frac{dx}{2}\right) = \rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

$$u\Big)_{x-dx/2} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(-\frac{dx}{2}\right) = u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

Um enunciado da conservação da massa é

$$\begin{bmatrix}\text{Taxa líquida de fluxo}\\ \text{de massa para fora}\\ \text{da superfície de}\\ \text{controle}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Taxa de variação de massa}\\ \text{dentro do volume de}\\ \text{controle}\end{bmatrix} = 0$$

A fim de avaliar o primeiro termo dessa equação, devemos avaliar $\int_{SC} \rho\vec{V} \cdot d\vec{A}$; temos que considerar o fluxo de massa através de cada uma das seis faces da superfície de controle. Os detalhes dessa avaliação são mostrados na Tabela 5.1. As velocidades

Tabela 5.1 Fluxo de Massa através da Superfície de Controle de um Volume de Controle Retangular Diferencial

Superfície	$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$
Esquerda $(-x)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]\left[u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]dy\,dz = -\rho u\,dy\,dz + \frac{1}{2}\left[u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]dx\,dy\,dz$
Direita $(+x)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]\left[u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]dy\,dz = \rho u\,dy\,dz + \frac{1}{2}\left[u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]dx\,dy\,dz$
Inferior $(-y)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right]\left[v - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right]dx\,dz = -\rho v\,dx\,dz + \frac{1}{2}\left[v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\,dz$
Superior $(+y)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right]\left[v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right]dx\,dz = \rho v\,dx\,dz + \frac{1}{2}\left[v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\,dz$
Posterior $(-z)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[w - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]dx\,dy = -\rho w\,dx\,dy + \frac{1}{2}\left[w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz$
Frontal $(+z)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[w + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]dx\,dy = \rho w\,dx\,dy + \frac{1}{2}\left[w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz$

Então,

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\left\{u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} + \left\{v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} + \left\{w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\right]dx\,dy\,dz$$

ou

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz$$

através de cada face foram admitidas como estando nos sentidos positivos dos eixos coordenados. Termos de ordem superior [por ex., $(dx)^2$] foram desprezados.

Vemos que a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle é dada por

$$\left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz$$

A massa dentro do volume de controle, em qualquer instante, é o produto da massa por unidade de volume, ρ, pelo volume, *dxdydz*. Então, a taxa de variação de massa dentro do volume de controle é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}dx\,dy\,dz$$

Em coordenadas retangulares, a equação diferencial para conservação da massa é então

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (5.1a)$$

A Eq. 5.1a é freqüentemente chamada de *equação de continuidade*.

Uma vez que o operador vetorial, ∇, em coordenadas retangulares, é dado por

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

então

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot \rho\vec{V}$$

e a conservação de massa pode ser escrita como

$$\nabla \cdot \rho\vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (5.1b)$$

Dois casos de escoamento para os quais a equação diferencial da continuidade pode ser simplificada são dignos de nota.

Para escoamento incompressível, ρ = constante; a massa específica não é função nem das coordenadas espaciais nem do tempo. Para escoamento incompressível, a equação da continuidade é simplificada para

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

o campo de velocidade, $\vec{V}(x, y, z, t)$, para escoamento incompressível deve satisfazer a $\nabla \cdot \vec{V} = 0$.

Para escoamento permanente, todas as propriedades dos fluidos são, por definição, independentes do tempo; assim $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e, quando muito, $\rho = \rho(x, y, z)$. Para escoamento permanente, a equação da continuidade pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

Para escoamento permanente, os campos de massa específica e de velocidade devem satisfazer

$$\nabla \cdot \rho\vec{V} = 0$$

EXEMPLO 5.1 — Integração da Equação Diferencial Bidimensional da Continuidade

Para um escoamento bidimensional no plano xy, a componente x da velocidade é dada por $u = Ax$. Encontre uma possível componente y para escoamento permanente, incompressível. Quantas componentes y são possíveis?

PROBLEMA-EXEMPLO 5.1

DADOS: Escoamento bidimensional no plano xy para o qual $u = Ax$.

DETERMINAR: **(a)** A possível componente y para escoamento permanente, incompressível.
(b) Quantas componentes y são possíveis?

SOLUÇÃO:

Equação básica: $\nabla \cdot \rho \vec{V} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Para escoamento permanente, incompressível, $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e $\rho =$ constante; então $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. Em coordenadas retangulares

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Para escoamento bidimensional no plano xy, $\vec{V} = \vec{V}(x, y)$. Então, as derivadas parciais com relação a z são nulas e

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Desse modo,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -A$$

que dá uma expressão para a taxa de variação de v mantendo x constante. Esta equação pode ser integrada a fim de obter uma expressão para v. O resultado é

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + f(x, t) = -Ay + f(x, t) \qquad v$$

{A função de x e t aparece porque tínhamos uma derivada parcial de v em relação a y.}

Qualquer função $f(x, t)$ é permitida, visto que $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, t) = 0$. Assim, qualquer número de expressões para v poderia satisfazer à equação diferencial da continuidade sob as condições dadas. A mais simples expressão para v seria obtida estabelecendo $f(x, t) = 0$. Então, $v = -Ay$ e

$$\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j} \qquad \vec{V}$$

{Este problema ilustra o emprego da equação diferencial da continuidade para um escoamento permanente incompressível a fim de avaliar uma possível componente de velocidade e introduz a integração de uma derivada parcial.}

EXEMPLO 5.2 — Equação Diferencial da Continuidade para Regime Não Permanente

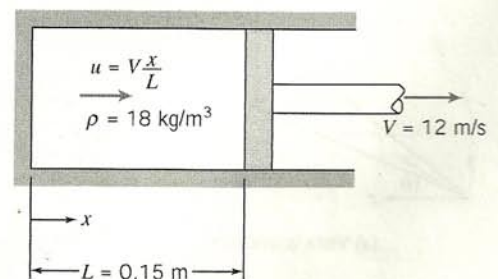
Um amortecedor a gás na suspensão de um automóvel comporta-se como um dispositivo pistão-cilindro. Num instante em que o pistão está $L = 0{,}15$ m afastado da extremidade fechada do cilindro, a massa específica do gás é uniforme em $\rho = 18$ kg/m^3 e o pistão começa a mover-se, afastando-se da extremidade fechada do cilindro, com $V = 12$ m/s. O movimento do gás é unidimensional e proporcional à distância em relação à extremidade fechada; varia linearmente de zero, na extremidade, a $u = V$ no pistão. Avalie a taxa de variação da massa específica do gás nesse instante. Obtenha uma expressão para a massa específica média como uma função do tempo.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.2

DADOS: Conjunto pistão-cilindro, conforme mostrado.

DETERMINAR: **(a)** A taxa de variação da massa específica.
(b) $\rho(t)$.

SOLUÇÃO:

Equação básica: $\nabla \cdot \rho \vec{V} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Em coordenadas retangulares, $\dfrac{\partial \rho u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} + \dfrac{\partial \rho w}{\partial z} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Como $u = u(x)$, as derivadas parciais com relação a y e a z são nulas, e

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Logo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Como ρ é considerado uniforme no volume, $\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0$, e $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho\ \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Como $u = V\ \dfrac{x}{L}$, segue-se que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{V}{L}$ e $\dfrac{d\rho}{dt} = -\rho\ \dfrac{V}{L}$. Entretanto, note que $L = L_0 + Vt$.

Separando as variáveis e integrando,

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t \frac{V}{L} dt = -\int_0^t \frac{V\, dt}{L_0 + Vt}$$

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \frac{L_0}{L_0 + Vt} \quad \text{e} \quad \rho(t) = \rho_0 \left[\frac{1}{1 + Vt/L_0}\right]$$

Em $t = 0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{V}{L} = -18\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{0{,}15\ \text{m}} = -1440\ \text{kg/(m}^3 \cdot \text{s)}$$

{Este problema ilustra o emprego da equação diferencial da continuidade a fim de avaliar a variação de massa específica.}

5.1.2 Sistema de Coordenadas Cilíndricas

Um volume de controle adequado para coordenadas cilíndricas é mostrado na Fig. 5.2. A massa específica no centro, O, do volume de controle é ρ, e a velocidade, ali, é $\vec{V} = \hat{e}_r V_r + \hat{e}_\theta V_\theta + \hat{k} V_z$, onde $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ e $\hat{k}$ são vetores unitários nas direções r, θ e z, respectivamente, e V_r, V_θ e V_z são as componentes de velocidade nas direções r, θ e z, respectivamente. Para avaliar $\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$, devemos considerar o fluxo de massa através de cada uma das seis faces da superfície de controle. As propriedades em cada uma delas são obtidas partindo-se de um desenvolvimento em série de Taylor em torno do ponto O. Os detalhes da avaliação do fluxo de massa são mostrados na Tabela 5.2. As componentes de velocidade V_r, V_θ e V_z são todas admitidas no sentido positivo das coordenadas e os termos de ordem superior foram desprezados.

Verificamos que a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle é dada por

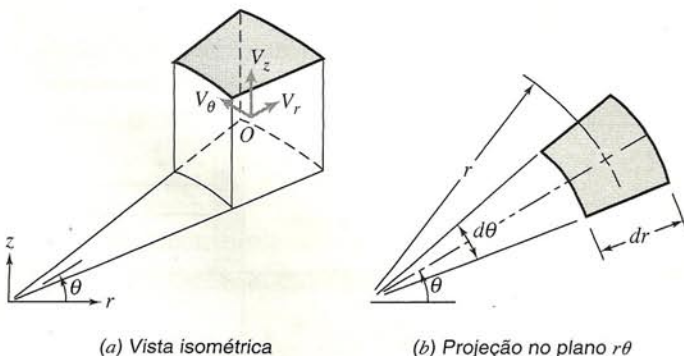



Fig. 5.2 Volume de controle diferencial em coordenadas cilíndricas.

$$\left[\rho V_r + r\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z}\right] dr\, d\theta\, dz$$

A massa dentro do volume de controle, em qualquer instante, é o produto da massa por unidade de volume, ρ, pelo volume, $r\, d\theta\, dr\, dz$. Então a taxa de variação da massa no interior do volume de controle é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} r\, d\theta\, dr\, dz$$

Em coordenadas cilíndricas, a equação diferencial para a conservação de massa é então

$$\rho V_r + r\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + r\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ou

$$\frac{\partial (r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + r\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Dividindo por r dá

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (5.2)$$

Em coordenadas cilíndricas o operador vetorial ∇ é dado por

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (3.21)$$

A Eq. 5.2 também pode ser escrita[1] em notação vetorial como

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (5.1b)$$

[1]*Para avaliar* $\nabla \cdot \rho \vec{V}$ *em coordenadas cilíndricas, devemos lembrar que*

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta \ \text{e}\ \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$$

Tabela 5.2 Fluxo de Massa através da Superfície de Controle de um Volume de Controle Cilíndrico Diferencial

Superfície	$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$
De dentro $(-r)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left[V_r - \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left(r - \frac{dr}{2}\right)d\theta\, dz = -\rho V_r r d\theta\, dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + V_r\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz$
De fora $(+r)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left[V_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left(r + \frac{dr}{2}\right)d\theta\, dz = \rho V_r r d\theta\, dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + V_r\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz$
Frontal $(-\theta)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right]\left[V_\theta - \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right]dr\, dz = -\rho V_\theta dr\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz + V_\theta\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz$
Posterior $(+\theta)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right]\left[V_\theta + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right]dr\, dz = \rho V_\theta dr\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz + V_\theta\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz$
Inferior $(-z)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[V_z - \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]r d\theta\, dr = -\rho V_z r d\theta\, dr + \rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r d\theta\, dr + V_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r d\theta\, dr$
Superior $(+z)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[V_z + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]r d\theta\, dr = \rho V_z r d\theta\, dr + \rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r d\theta\, dr + V_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r d\theta\, dr$

Então,

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r\left\{\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) + V_r\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)\right\} + \left\{\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) + V_\theta\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\right\} + r\left\{\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + V_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right\}\right] dr\, d\theta\, dz$$

ou

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z}\right] dr\, d\theta\, dz$$

Para escoamento incompressível, ρ = constante, a Eq. 5.2 reduz-se a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Assim, o campo de velocidade, $\vec{V}(x, y, z, t)$, para escoamento incompressível deve satisfazer a $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. Para escoamento permanente, a Eq. 5.2 reduz-se a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

Quando escrita na forma vetorial, a equação diferencial da continuidade (o enunciado matemático da conservação de massa), Eq. 5.1b, pode ser aplicada em qualquer sistema de coordenadas. Simplesmente se substitui a expressão apropriada no lugar do operador vetorial ∇. Em retrospecto, esse resultado não surpreende, uma vez que a conservação de massa aplica-se sempre, a despeito da nossa escolha do sistema de coordenadas.

EXEMPLO 5.3 — Equação Diferencial da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas

Considere um escoamento radial, unidimensional no plano $r\theta$, caracterizado por $V_r = f(r)$ e $V_\theta = 0$. Determine as condições de $f(r)$ requeridas para escoamento incompressível.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.3

DADOS: Escoamento radial, unidimensional no plano $r\theta$: $V_r = f(r)$ e $V_\theta = 0$.

DETERMINAR: Os requisitos de $f(r)$ para escoamento incompressível.

SOLUÇÃO:

Equação básica:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Para escoamento incompressível, ρ = constante, logo $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Em coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}V_\theta + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Para o campo de velocidade dado, $\vec{V} = \vec{V}(r) \cdot V_\theta = 0$ e as derivadas parciais com relação a z são nulas, logo,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) = 0$$

Integrando com relação a r, obtemos

$$rV_r = \text{constante}$$

Desse modo, a equação da continuidade mostra que a velocidade radial deve ser $V_r = f(r) = C/r$ para o escoamento radial, unidimensional, de um fluido incompressível.

*5.2 FUNÇÃO DE CORRENTE PARA ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL BIDIMENSIONAL

É conveniente dispor de um meio para descrever matematicamente qualquer configuração de escoamento. Uma descrição adequada deverá retratar a noção da forma das linhas de corrente (incluindo as fronteiras) e a escala das velocidades em pontos representativos do escoamento. Um dispositivo matemático que serve para esse fim é a função de corrente, ψ. Ela é formulada como uma relação entre as linhas de corrente e o enunciado do princípio da conservação da massa. A função de corrente é uma função matemática única, $\psi(x, y, t)$, que substitui as duas componentes de velocidade, $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$.

Para um escoamento incompressível bidimensional no plano xy, a conservação de massa, Eq. 5.1a, pode ser escrita

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.3}$$

Se uma função contínua, $\psi(x, y, t)$, chamada função de corrente, for definida de modo que

$$u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.4}$$

então, a equação da continuidade, Eq. 5.3, é plenamente satisfeita, pois

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Lembremos que linhas de corrente são linhas traçadas no campo de escoamento tais que, num dado instante, são tangentes à direção do escoamento em cada ponto do campo de escoamento. Logo, se $d\vec{r}$ é um elemento de comprimento ao longo de uma linha de corrente, a equação da linha de corrente é dada por

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0 = (\hat{i}u + \hat{j}v) \times (\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy) = \hat{k}(u\,dy - v\,dx)$$

Então, a equação de uma linha de corrente num escoamento bidimensional é

$$u\,dy - v\,dx = 0$$

Substituindo as componentes da velocidade, u e v, em termos da função de corrente, ψ, da Eq. 5.4, encontramos que, ao longo de uma linha de corrente,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0 \tag{5.5}$$

Como $\psi = \psi(x, y, t)$, então, num dado instante, t_0, $\psi = \psi(x, y, t_0)$; nesse instante, uma variação em ψ pode ser avaliada como se $\psi = \psi(x, y)$. Logo, em qualquer instante,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy \tag{5.6}$$

Comparando as Eqs. 5.5 e 5.6, verificamos que, ao longo de uma linha de corrente instantânea, $d\psi = 0$; ψ é uma constante ao longo de uma linha de corrente. Como o diferencial de ψ é exato, a integral de $d\psi$ entre dois pontos quaisquer num campo de escoamento, isto é, $\psi_2 - \psi_1$, depende apenas dos pontos extremos de integração.

Da definição de linha de corrente, reconhecemos que não pode haver fluxo através de uma linha de corrente. Assim, se as linhas de corrente num campo de escoamento incompressível bidimensional num dado instante forem como mostrado na Fig. 5.3, as taxas de fluxo entre as linhas de corrente ψ_1 e ψ_2, através das linhas AB, BC, DE e DF, devem ser iguais.

A vazão em volume, Q, entre as linhas de corrente ψ_1 e ψ_2 pode ser avaliada considerando-se o fluxo através de AB ou através de BC. Para uma profundidade unitária, a vazão através de AB é

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} u\,dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

Ao longo de AB, x = constante e $d\psi = \partial\psi/\partial y\, dy$. Portanto,

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

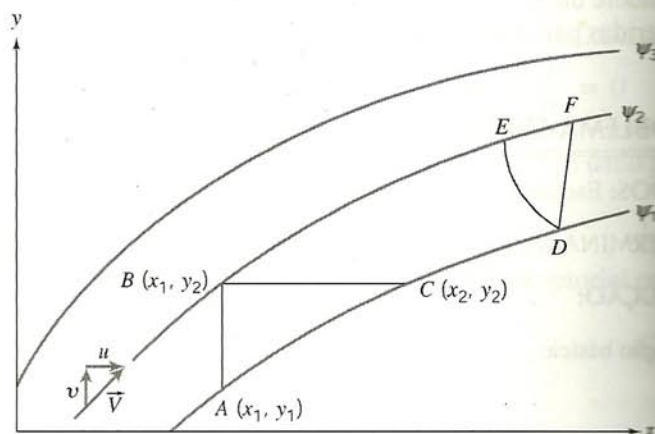



Fig. 5.3 Linhas de corrente instantâneas num escoamento bidimensional.

*Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

Para uma profundidade unitária, a vazão através de BC é

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} v\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\psi}{\partial x}dx$$

Ao longo de BC, y = constante e $d\psi = \partial\psi/\partial x\,dx$. Portanto,

$$Q = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = -\int_{\psi_2}^{\psi_1} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Então, a vazão em volume (por unidade de profundidade) entre duas linhas de corrente quaisquer pode ser escrita como a diferença entre os valores constantes de ψ que definem as duas linhas de corrente.[2] Se a linha de corrente através da origem for designada $\psi = 0$, então, o valor de ψ para qualquer outra linha de corrente representa o escoamento entre a origem e aquela linha de corrente. A partir da definição de u em termos de ψ, fica claro que u está na direção positiva de x quando ψ cresce com y. Isso é ilustrado no Problema-Exemplo 5.4.

Para um escoamento incompressível bidimensional no plano $r\theta$, a conservação de massa, Eq. 5.2, pode ser escrita como

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{5.7}$$

A função de corrente, $\psi(r, \theta, t)$, é então definida de modo que

$$V_r \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad \text{e} \quad V_\theta \equiv -\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{5.8}$$

Com ψ definido de acordo com a Eq. 5.8, a equação da continuidade, Eq. 5.7, é plenamente satisfeita.

EXEMPLO 5.4 — Função de Corrente para Escoamento em Esquina

Dado o campo de velocidade para o escoamento permanente incompressível do Exemplo 2.1, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$ com $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$, encontre a função de corrente que resultará desse campo de velocidade. Plote e interprete a configuração das linhas de corrente no primeiro e no segundo quadrantes do plano xy.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.4

DADOS: Campo de velocidade, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, com $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$.

DETERMINAR: A função de corrente, ψ, e plotá-la no primeiro e segundo quadrantes; interpretar os resultados.

SOLUÇÃO:

O escoamento é incompressível, logo a função de corrente satisfaz a Eq. 5.4.

Da Eq. 5.4, $u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ e $v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$. Do campo de velocidade dado,

$$u = Ax = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

Integrando com relação a y, obtemos

$$\psi = \int \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + f(x) = Axy + f(x) \tag{1}$$

onde $f(x)$ é arbitrária. A função $f(x)$ pode ser avaliada usando-se a equação para v. Assim, da Eq. 1,

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -Ay - \frac{df}{dx} \tag{2}$$

Do campo de velocidade dado, $v = -Ay$. Comparando essa expressão com a Eq. 2 conclui-se que $df/dx = 0$, ou $f(x)$ = constante. Por conseguinte, a Eq. 1 torna-se

$$\psi = Axy + c \qquad \longleftarrow \psi$$

As linhas de ψ constante representam linhas de corrente no campo de escoamento. A constante c pode ser escolhida com qualquer valor conveniente para fins de traçado do gráfico. A constante é escolhida como zero a fim de que a linha de corrente através da origem seja designada por $\psi = \psi_1 = 0$. Desse modo, o valor para qualquer outra linha de corrente representa o escoamento da esquerda para a direita entre a origem e aquela linha de corrente. Com $c = 0$ e $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$, obtém-se

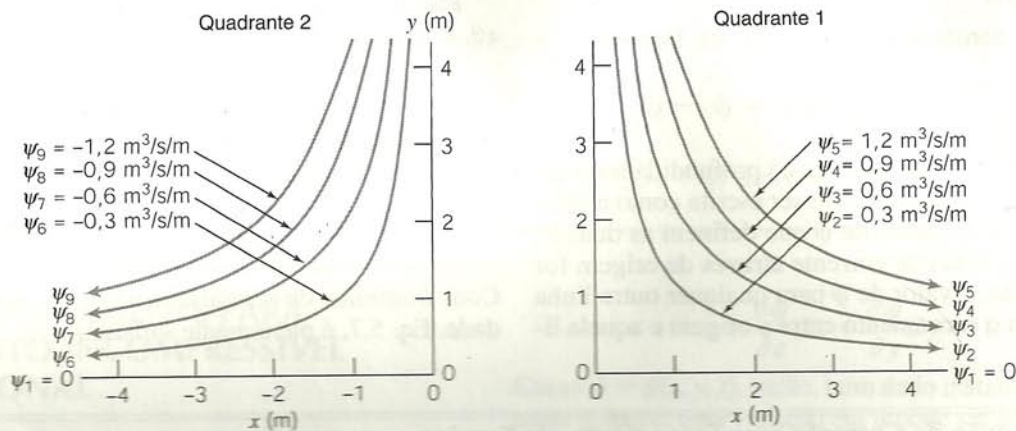
$$\psi = 0{,}3\,xy\ (\text{m}^3/\text{s/m})$$

{Essa equação de uma linha de corrente é idêntica àquela do resultado (xy = constante) obtido no Problema-Exemplo 2.1.}

[2] Para escoamento compressível, permanente, bidimensional, no plano xy, a função de corrente, ψ, é definida de forma que

$$\rho u \equiv \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \rho v \equiv -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

A diferença entre os valores constantes de ψ que definem duas linhas de corrente é então a vazão em massa (por unidade de profundidade) entre as duas linhas de corrente.

Gráficos separados das linhas de corrente no primeiro e segundo quadrantes são apresentados abaixo. Note que no primeiro quadrante, como $u > 0$, os valores de ψ são positivos. No segundo quadrante, como $u < 0$, os valores de ψ são negativos.

No primeiro quadrante, como $u > 0$ e $v < 0$, o escoamento é da esquerda para a direita e para baixo. A vazão volumétrica entre a linha de corrente $\psi = \psi_1$ passando pela origem e a linha de corrente $\psi = \psi_2$ é

$$Q_{12} = \psi_2 - \psi_1 = 0{,}3 \text{ m}^3/\text{s/m}$$

No segundo quadrante, como $u < 0$ e $v < 0$, o escoamento é da direita para a esquerda e para baixo. A vazão volumétrica entre as linhas de corrente ψ_7 e ψ_9 é

$$Q_{79} = \psi_9 - \psi_7 = [-1{,}2 - (-0{,}6)] \text{ m}^3/\text{s/m} = -0{,}6 \text{ m}^3/\text{s/m}$$

O sinal negativo é consistente com escoamento tendo $u < 0$.

Regiões de escoamento de alta velocidade ocorrem onde as linhas de corrente são mais próximas. Escoamento de velocidade mais baixa ocorre perto da origem, onde o espaçamento das linhas de corrente é maior. Em qualquer dos quadrantes, o escoamento parece-se com aquele em uma "esquina" formada por um par de paredes.

5.3 MOVIMENTO DE UM ELEMENTO FLUIDO (CINEMÁTICA)

Antes de formular os efeitos de forças sobre o movimento dos fluidos (dinâmica), vamos considerar primeiro o movimento (cinemática) de um elemento fluido num campo de escoamento. Por conveniência, seguimos um elemento infinitesimal de identidade fixa (massa), como mostrado na Fig. 5.4.

À medida que o elemento infinitesimal de massa, dm, move-se no campo de escoamento, diversas coisas podem lhe acontecer. Certamente o elemento translada; ele se desloca linearmente de um ponto x, y, z para um outro diferente, x_1, y_1, z_1. O elemento também pode girar; a sua orientação, como mostrado na Fig. 5.4, onde os seus lados estão paralelos aos eixos de coordenadas, x, y, z, pode mudar como resultado de rotação pura em torno de qualquer um (ou de todos os três) dos eixos coordenados. Além disso, o elemento pode deformar-se. A deformação pode ser subdividida em duas partes — linear e angular. A primeira envolve uma mudança da forma sem mudança na orientação do elemento: uma deformação na qual os planos do elemento que eram originalmente perpendiculares entre si (p. ex., o topo e o lado do elemento) permanecem perpendiculares. A deformação angular envolve uma distorção do elemento na qual os planos que eram originalmente perpendiculares não mais permanecem perpendiculares. Em geral, um elemento fluido pode sofrer uma combinação de translação, rotação e deformações linear e angular no curso do seu movimento.

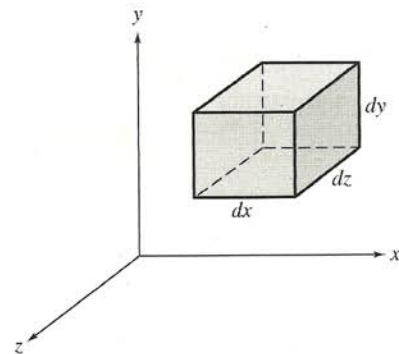



Fig. 5.4 Elemento infinitesimal de fluido.

Essas quatro componentes do movimento dos fluidos são ilustradas na Fig. 5.5, para movimento no plano xy. Para um escoamento genérico tridimensional, movimentos similares da partícula seriam observados nos planos yz e xz. Para translação ou rotação pura, o elemento fluido mantém a sua forma; não há deformação. Desse modo, tensões de cisalhamento não surgem como resultado de translação ou rotação pura. (Relembre do Cap. 2 que, num fluido Newtoniano, a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação angular.) Consideraremos separadamente translação, rotação e deformação de fluido.

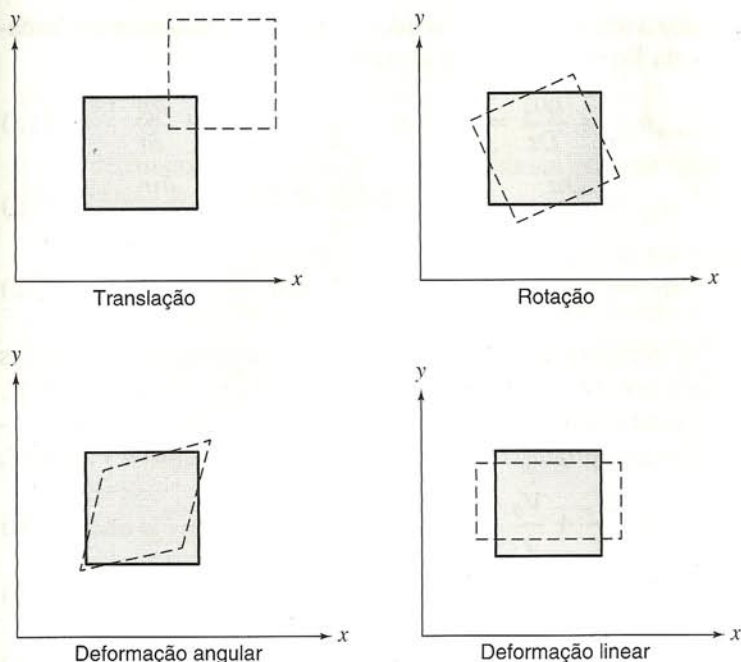



Fig. 5.5 Representação gráfica dos componentes do movimento de fluido.

5.3.1 Translação de Fluido: Aceleração de uma Partícula Fluida num Campo de Velocidade

Uma descrição geral da aceleração pode ser obtida considerando-se uma partícula em movimento num campo de velocidade. A hipótese básica da mecânica dos fluidos do contínuo levou-nos a uma descrição do campo de escoamento na qual as propriedades desse são definidas por funções contínuas das coordenadas espaciais e do tempo. Em particular, o campo de velocidade é dado por $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$. A descrição de campo é muito poderosa, já que informações para todo o escoamento são fornecidas por uma única equação.

O problema, então, consiste em reter a descrição de campo para propriedades do fluido e obter uma expressão para a aceleração de uma partícula à medida que ela se move num campo de escoamento. Enunciado de modo simples, o problema é:

Dado o campo de velocidade, $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$, determine a aceleração de uma partícula fluida, $\vec{a}_p$.

Considere uma partícula movendo-se num campo de velocidade. No instante t, a partícula está na posição x, y, z e tem uma velocidade correspondente à velocidade naquele ponto no espaço, no instante t,

$$\vec{V}_p]_t = \vec{V}(x, y, z, t)$$

Em $t + dt$, a partícula moveu-se para uma nova posição, com coordenadas $x + dx, y + dy, z + dz$, e tem uma velocidade dada por

$$\vec{V}_p]_{t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

Isto é mostrado graficamente na Fig. 5.6.

A velocidade da partícula em t (posição $\vec{r}$) é dada por $\vec{V}_p = \vec{V}(x, y, z, t)$. Então $d\vec{V}_p$, a variação da velocidade da partícula, ao mover-se da posição $\vec{r}$ para $\vec{r} + d\vec{r}$, é dada por

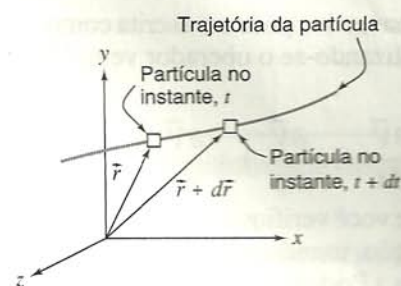



Fig. 5.6 O movimento de uma partícula num campo de escoamento.

$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

A aceleração total da partícula é dada por

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Como

$$\frac{dx_p}{dt} = u \qquad \frac{dy_p}{dt} = v \qquad \text{e} \qquad \frac{dz_p}{dt} = w$$

temos

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Para lembrarmo-nos de que o cálculo da aceleração de uma partícula fluida num campo de velocidade requer uma derivada especial, ela recebe o símbolo $D\vec{V}/Dt$. Assim,

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \vec{a}_p = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \qquad (5.9)$$

A derivada, $D\vec{V}/Dt$, definida na Eq. 5.9, é usualmente chamada *derivada substancial*, para nos lembrar de que é calculada para uma partícula de "substância". É também freqüentemente chamada de derivada material ou de derivada de partícula.

Da Eq. 5.9, reconhecemos que uma partícula fluida movendo-se num campo de escoamento pode sofrer aceleração por dois motivos. Ela pode ser acelerada porque é transportada por convecção para uma região de velocidade mais alta (ou mais baixa). Por exemplo, no escoamento permanente através de um bocal no qual, por definição, o campo de velocidade não é uma função do tempo, uma partícula acelerar-se-á enquanto se move através do bocal. Ela é transportada para uma região de velocidade mais alta.[3] Se um campo de escoamento é não permanente, uma partícula fluida passará por uma aceleração adicional "local", pois o campo de velocidade é função do tempo.

O significado físico dos termos da Eq. 5.9 é

$$\underbrace{\vec{a}_p = \frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\text{aceleração total da partícula}} = \underbrace{u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\text{aceleração convectiva}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{aceleração local}}$$

[3] Acelerações convectivas são demonstradas e o cálculo da aceleração total de uma partícula fluida é ilustrado no filme da NCFMF, *Eulerian and Lagrangian Descriptions in Fluid Mechanics.*

A aceleração convectiva pode ser escrita como uma única expressão vetorial utilizando-se o operador vetorial gradiente, ∇. Assim,

$$u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$$

(Sugerimos que você verifique essa igualdade expandindo o lado direito da equação, usando a conhecida operação de produto escalar de vetores.) Portanto, a Eq. 5.9 pode ser escrita como

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \vec{a}_p = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \qquad (5.10)$$

Para um escoamento bidimensional, digamos $\vec{V} = \vec{V}(x, y, t)$, a Eq. 5.9 reduz-se a

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Para um escoamento unidimensional, digamos $\vec{V} = \vec{V}(x, t)$, a Eq. 5.9 torna-se

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Finalmente, para um escoamento permanente em três dimensões, a Eq. 5.9 torna-se

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

que não é necessariamente zero. Assim, uma partícula fluida pode estar sujeita a uma aceleração convectiva devido ao seu movimento, mesmo num campo de velocidade permanente.

A Eq. 5.9 é vetorial. Como todas as equações vetoriais, ela pode ser escrita na forma de suas componentes escalares. Em relação a um sistema de coordenadas xyz, as componentes escalares da Eq. 5.9 são assim escritas

$$a_{x_p} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (5.11a)$$

$$a_{y_p} = \frac{Dv}{Dt} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \qquad (5.11b)$$

$$a_{z_p} = \frac{Dw}{Dt} = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \qquad (5.11c)$$

As componentes da aceleração em coordenadas cilíndricas podem ser obtidas da Eq. 5.10 expressando-se a velocidade, $\vec{V}$, em coordenadas cilíndricas (Seção 5.1.2) e utilizando-se a expressão apropriada (Eq. 3.18) para o operador vetorial ∇. Então[4],

$$a_{r_p} = V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial t} \qquad (5.12a)$$

$$a_{\theta_p} = V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{\partial V_\theta}{\partial t} \qquad (5.12b)$$

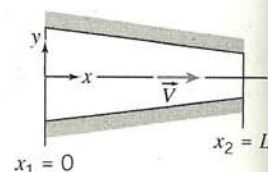
$$a_{z_p} = V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t} \qquad (5.12c)$$

Obtivemos uma expressão para a aceleração de uma partícula em qualquer local de um campo de escoamento; esse é o método Euleriano de descrição. A fim de determinar a aceleração de uma partícula num ponto particular no campo de escoamento, substituem-se as coordenadas do ponto na expressão de campo para a aceleração.

No método Lagrangiano de descrição, o movimento (posição, velocidade e aceleração) da partícula é descrito como uma função do tempo. Os métodos Euleriano e Lagrangiano de descrição são ilustrados no Problema-Exemplo 5.5.

[4]Na determinação de $(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$, lembre-se que $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$ são funções de θ (veja a nota de rodapé 1 deste capítulo).

EXEMPLO 5.5 — Aceleração da Partícula nas Descrições Euleriana e Lagrangiana

Considere o escoamento unidimensional, permanente, incompressível, através do canal plano e convergente mostrado. A velocidade na linha de centro horizontal (eixo x) é dada por $\vec{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{i}$. Determine a aceleração para uma partícula movendo-se ao longo dessa linha de centro. Se utilizarmos o método de descrição da mecânica da partícula, a posição da partícula localizada em $x = 0$, no instante $t = 0$, será uma função do tempo, $x_p = f(t)$. Obtenha a expressão para $f(t)$ e, em seguida, tomando a derivada segunda da função com relação ao tempo, obtenha uma expressão para a componente x da aceleração da partícula.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.5

DADOS: Escoamento permanente, bidimensional, incompressível, através do canal convergente mostrado.

$$\vec{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{i} \quad \text{no eixo } x$$

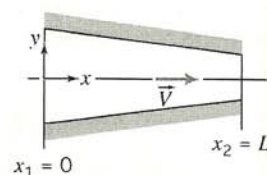
DETERMINAR:
(a) A componente x da aceleração de uma partícula movendo-se ao longo do eixo x.
(b) Para a partícula localizada em $x = 0$ para $t = 0$, obtenha uma expressão para sua:
- **(1)** posição, x_p, como uma função do tempo.
- **(2)** componente x da aceleração, a_{x_p}, como uma função do tempo.

SOLUÇÃO:

A aceleração de uma partícula movendo-se num campo de velocidade é dada por

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

A componente x da aceleração é dada por

$$\frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Para qualquer partícula no eixo x, $v = w = 0$, e $u = V_1[1 + (x/L)]$.

Portanto, $\dfrac{Du}{Dt} = u\dfrac{\partial u}{\partial x} = V_1\left(1 + \dfrac{x}{L}\right)\dfrac{V_1}{L} = \dfrac{V_1^2}{L}\left(1 + \dfrac{x}{L}\right)$ ← $\dfrac{Du}{Dt}$

{ Para determinar a aceleração de uma partícula em qualquer ponto ao longo da linha de centro do canal, simplesmente substituímos a presente localização da partícula no resultado acima. }

Na segunda parte desse problema, estamos interessados em seguir uma determinada partícula, especificamente aquela localizada em $x = 0$ no instante $t = 0$, à medida que ela escoa ao longo da linha de centro do canal.

A coordenada x que localiza essa partícula será uma função do tempo, $x_p = f(t)$. Além disso, $u_p = df/dt$ será uma função do tempo. A partícula terá a velocidade correspondente à sua localização no campo de escoamento. Em $t = 0$, a partícula está em $x = 0$ e a sua velocidade é $u_p = V_1$. Em algum instante posterior, t, a partícula atingirá a saída, $x = L$; naquele instante, ela terá a velocidade $u_p = 2V_1$. Para determinar a expressão para $x_p = f(t)$, escrevemos

$$u_p = \frac{dx_p}{dt} = \frac{df}{dt} = V_1\left(1 + \frac{x}{L}\right) = V_1\left(1 + \frac{f}{L}\right)$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{df}{(1 + f/L)} = V_1\,dt$$

Como em $t = 0$ a partícula em questão estava localizada em $x = 0$, e num instante posterior t essa partícula está situada em $x_p = f$,

$$\int_0^f \frac{df}{(1 + f/L)} = \int_0^t V_1\,dt \quad \text{e} \quad L\ln\left(1 + \frac{f}{L}\right) = V_1 t$$

Então $\ln\left(1 + \dfrac{f}{L}\right) = \dfrac{V_1 t}{L}$, ou $1 + \dfrac{f}{L} = e^{V_1 t/L}$ e

$$f = L[e^{V_1 t/L} - 1]$$

Assim, a posição da partícula, localizada em $x = 0$ no instante $t = 0$, é dada como uma função do tempo por

$$x_p = f(t) = L[e^{V_1 t/L} - 1] \longleftarrow x_p$$

A componente x da aceleração dessa partícula é dada por

$$a_{x_p} = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{V_1^2}{L}e^{V_1 t/L} \longleftarrow a_{x_p}$$

Nós temos agora dois modos diferentes de expressar a aceleração da partícula que estava localizada em $x = 0$ no instante $t = 0$. Note que, embora o campo de escoamento seja permanente, quando seguimos uma determinada partícula a sua posição e aceleração (e velocidade) são funções do tempo.

Vamos verificar se ambas as expressões para a aceleração dão o mesmo resultado:

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L}e^{V_1 t/L} \qquad\qquad a_{x_p} = \frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

(a) Em $t = 0$, $x_p = 0$ — Em $t = 0$, a partícula está em $x = 0$

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L}e^0 = \frac{V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(a)} \qquad\qquad \frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}(1 + 0) = \frac{V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(a)}$$

Confere.

(b) Quando $x_p = L/2$, $t = t_1$, — Em $x = 0{,}5L$

$$x_p = \frac{L}{2} = L[e^{V_1 t_1/L} - 1] \qquad\qquad \frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}(1 + 0{,}5)$$

Portanto, $e^{V_1 t_1/L} = 1{,}5$, e

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{1{,}5V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(b)}$$

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L}e^{V_1 t_1/L}$$

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L}(1{,}5) = \frac{1{,}5V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(b)}$$

Confere.

(c) Quando $x_p = L$, $t = t_2$, — Em $x = L$

$$x_p = L = L\left[e^{V_1 t_2/L} - 1\right] \qquad\qquad \frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}(1 + 1)$$

Portanto, $e^{V_1 t_2/L} = 2$, e

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t_2/L}$$

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L}(2) = \frac{2V_1^2}{L} \qquad \text{(c)}$$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{2V_1^2}{L} \qquad \text{(c)}$$

Confere.

{Esse problema ilustra os métodos Euleriano e Lagrangiano de descrição do movimento de uma partícula.}

5.3.2 Rotação de Fluido

Uma partícula movendo-se num escoamento tridimensional genérico pode girar em torno de todos os três eixos coordenados. Então, a rotação de partícula é uma quantidade vetorial e, em geral,

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$$

onde ω_x é a rotação em torno do eixo x, ω_y é a rotação em torno do eixo y, e ω_z é a rotação em torno do eixo z. O sentido positivo de rotação é dado pela regra da mão direita.

Para avaliar as componentes do vetor rotação de uma partícula, nós definimos a velocidade angular sobre um eixo como a velocidade angular média de dois segmentos diferenciais de linha inicialmente perpendiculares entre si, em um plano perpendicular ao eixo considerado. Dessa forma, a componente da rotação sobre o eixo z é igual a velocidade angular média de dois segmentos infinitesimais de linha, inicialmente perpendiculares entre si no plano xy.

A fim de obter uma expressão matemática para ω_z, a componente da rotação do fluido sobre o eixo z, considere o movimento de um elemento fluido no plano xy. As componentes da velocidade em cada ponto no campo de escoamento são dadas por $u(x, y)$ e $v(x, y)$. A rotação de um elemento fluido em tal campo de escoamento é ilustrada na Fig. 5.7. As duas linhas perpendiculares, oa e ob, girarão para as posições mostradas durante o intervalo de tempo Δt, somente se as velocidades nos pontos a e b forem diferentes da velocidade em o.

Considere primeiro a rotação da linha oa, de comprimento Δx. A rotação dessa linha deve-se a variações da componente y da velocidade. Se a componente y da velocidade no ponto o for tomada como v_0, então a componente y da velocidade no ponto a pode ser escrita, usando-se uma expansão em série de Taylor, como

$$v = v_o + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$$

A velocidade angular da linha oa é dada por

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\eta/\Delta x}{\Delta t}$$

Como

$$\Delta\eta = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\,\Delta t$$

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\partial v/\partial x)\Delta x\,\Delta t/\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

A velocidade angular da linha ob é obtida de forma similar. A rotação do segmento de linha ob, de comprimento Δy, resulta de variações na componente x da velocidade. Se a componente x da velocidade no ponto o for tomada como u_o, então a componente x da velocidade no ponto b pode ser escrita como

$$u = u_o + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

A velocidade angular da linha ob é dada por

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\xi/\Delta y}{\Delta t}$$

Como

$$\Delta\xi = -\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\,\Delta t$$

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-(\partial u/\partial y)\Delta y\,\Delta t/\Delta y}{\Delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

(O sinal negativo foi introduzido para dar um valor positivo a ω_{ob}. De acordo com a regra da mão direita, a rotação anti-horária é positiva.)

A rotação do elemento fluido em torno do eixo z é a velocidade angular média de quaisquer duas linhas perpendiculares entre si, oa e ob, no plano xy. Então,

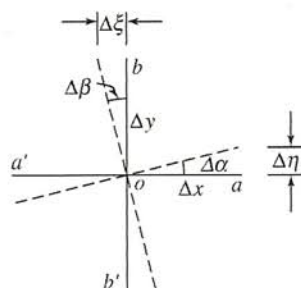
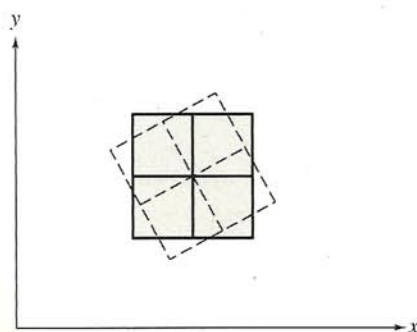



Fig. 5.7 Rotação de um elemento fluido num campo de escoamento bidimensional.

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Considerando-se a rotação de um par de linhas perpendiculares nos planos yz e xz, pode-se demonstrar de forma similar que

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad \text{e} \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Então $\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$ torna-se

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\hat{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \quad (5.13)$$

Reconhecemos o termo entre colchetes como

$$\text{curl } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

Então, em notação vetorial, podemos escrever

$$\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}\nabla \times \vec{V} \quad (5.14)$$

Sob que condições podemos esperar que um escoamento seja irrotacional? Uma partícula fluida movendo-se, sem rotação, num campo de escoamento, não pode desenvolver rotação sob a ação de uma força de campo ou de forças normais superficiais (de pressão). O desenvolvimento de rotação numa partícula fluida, inicialmente sem rotação, requer a ação de uma tensão de cisalhamento na superfície da partícula. Uma vez que a tensão de cisalhamento é proporcional à taxa de deformação angular, concluímos que uma partícula inicialmente desprovida de rotação não a desenvolverá sem uma simultânea deformação angular. A tensão de cisalhamento é relacionada com a taxa de deformação angular pela viscosidade. A presença de forças viscosas significa que o escoamento é rotacional.[5]

A condição de irrotacionalidade pode ser uma hipótese válida para aquelas regiões de um escoamento nas quais as forças viscosas são desprezíveis.[6] (Tal região existe, por exemplo, fora da camada limite no escoamento sobre uma superfície sólida.)

O fator de 1/2 pode ser eliminado na Eq. 5.14, definindo-se uma grandeza chamada *vorticidade*, ζ, como sendo duas vezes o valor da rotação,

$$\vec{\zeta} \equiv 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (5.15)$$

A vorticidade é uma medida da rotação de um elemento fluido à medida que ele se move no campo de escoamento. Em coordenadas cilíndricas, a vorticidade é[7]

Fig. 5.8 Componentes da velocidade nas fronteiras de um elemento fluido.

$$\nabla \times \vec{V} = \hat{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \hat{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \hat{k}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rV_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) \quad (5.16)$$

A *circulação*, Γ, é definida como a integral de linha da componente tangencial da velocidade sobre uma curva fechada fixa no escoamento,

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (5.17)$$

onde $d\vec{s}$ é um vetor elementar de comprimento ds tangente à curva; um sentido positivo corresponde a uma trajetória anti-horária de integração sobre a curva. Uma relação entre a circulação e a vorticidade pode ser obtida considerando-se o elemento fluido da Fig. 5.7. O elemento foi redesenhado na Fig. 5.8; as variações de velocidade mostradas são consistentes com aquelas usadas na determinação da rotação do fluido.

Para a curva fechada $oacb$,

$$\Delta\Gamma = u\Delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x - v\Delta y$$

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

$$\Delta\Gamma = 2\omega_z\,\Delta x\,\Delta y$$

Logo,

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_A 2\omega_z\, dA = \int_A (\nabla \times \vec{V})_z\, dA \quad (5.18)$$

A Eq. 5.18 é um enunciado do Teorema de Stokes em duas dimensões. Dessa forma, a circulação num contorno fechado é igual à vorticidade total encerrada no seu interior.

[5]Uma prova rigorosa, utilizando as equações completas do movimento para uma partícula fluida, é dada em [1], pp. 142-145.

[6]Exemplos de movimentos rotacional e irrotacional são mostrados no filme da NCFMF, *Vorticity*.

[7]Ao efetuar a operação rotacional, lembre-se que $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$ são funções de θ (veja a nota de rodapé 1 deste capítulo).

EXEMPLO 5.6 — Escoamentos com Vórtices Livre e Forçado

Considere campos de escoamento com movimento puramente tangencial (linhas de corrente circulares): $V_r = 0$ e $V_\theta = f(r)$. Avalie a rotação, vorticidade e circulação para rotação de corpo rígido, um *vórtice forçado*. Mostre que é possível escolher $f(r)$ de modo que o escoamento seja irrotacional, i.e., produza um *vórtice livre*.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.6

DADOS: Campo de escoamento com movimento tangencial, $V_r = 0$ e $V_\theta = f(r)$.

DETERMINAR: (a) Rotação, vorticidade e circulação para movimento de corpo rígido (um *vórtice forçado*).
(b) Avalie $V_\theta = f(r)$ para movimento irrotacional (um *vórtice livre*).

SOLUÇÃO:

Equação básica:
$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (5.15)$$

Para movimento no plano $r\theta$, as únicas componentes de rotação e vorticidade estão na direção do eixo z,

$$\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial rV_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}$$

Uma vez que $V_r = 0$ em qualquer ponto desse campo, a expressão acima reduz-se a $\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial rV_\theta}{\partial r}$.

(a) Para rotação de corpo rígido, $V_\theta = \omega r$.

Então $\omega_z = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial rV_\theta}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\omega r^2 = \frac{1}{2r}(2\omega r) = \omega$ e $\zeta_z = 2\omega$.

A circulação é

$$\Gamma = \oint_C \vec{V}\cdot d\vec{s} = \int_A 2\omega_z\, dA. \quad (5.18)$$

Como $\omega_z = \omega =$ constante, a circulação ao longo de qualquer contorno fechado é dada por $\Gamma = 2\omega A$, onde A é a área circundada pelo contorno. Então, para movimento de corpo rígido (um vórtice forçado), a rotação e a vorticidade são constantes; a circulação depende da área no interior do contorno.

(b) Para escoamento irrotacional, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rV_\theta = 0$. Integrando, obtemos

$$rV_\theta = \text{constante} \quad \text{ou} \quad V_\theta = f(r) = \frac{C}{r}$$

Para esse escoamento, a origem é um ponto singular onde $V_\theta \to \infty$. A circulação para qualquer contorno contendo a origem é

$$\Gamma = \oint_C \vec{V}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r\, d\theta = 2\pi C$$

A circulação ao longo de qualquer contorno que não contenha o ponto singular na origem é zero.

5.3.3 Deformação de Fluido

a. Deformação Angular

A deformação angular de um elemento fluido envolve variações no ângulo entre duas linhas mutuamente perpendiculares no fluido. Na Fig. 5.9, notamos que a taxa de deformação angular do elemento fluido no plano xy é a taxa de decréscimo do ângulo γ entre as linhas oa e ob. Visto que durante o intervalo de tempo Δt, $\Delta\gamma = \gamma - 90° = -(\Delta\alpha + \Delta\beta)$, a taxa de deformação angular é dada por

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}$$

Mas,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\eta/\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\partial v/\partial x)\Delta x\,\Delta t/\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{d\beta}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\xi/\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\partial u/\partial y)\Delta y\,\Delta t/\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Conseqüentemente, a taxa de deformação angular no plano xy é

$$-\dot{\gamma} = -\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.19)$$

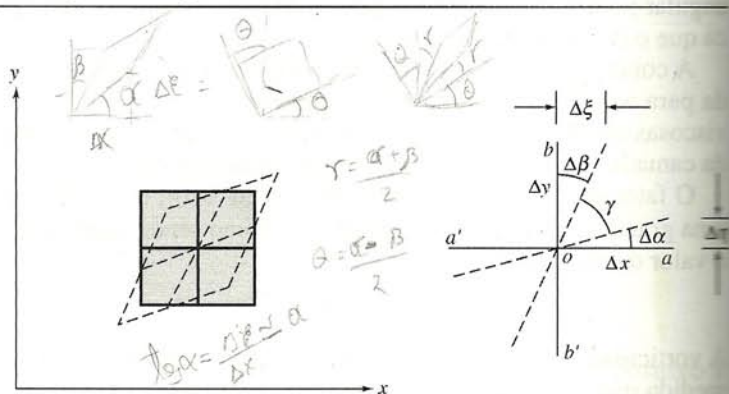
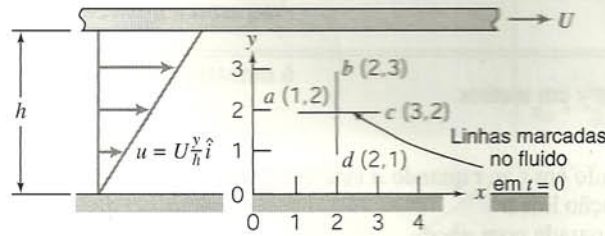



Fig. 5.9 Deformação angular de um elemento fluido num campo de escoamento bidimensional.

A tensão de cisalhamento relaciona-se com a taxa de deformação angular através da viscosidade do fluido. Num escoamento viscoso (onde gradientes de velocidade estão presentes), é altamente improvável que $\partial v/\partial x$ seja igual e oposta a $\partial u/\partial y$ em todo o campo de escoamento. A presença de forças viscosas significa que o escoamento é rotacional. Exemplos de escoamentos viscosos simples são discutidos no Cap. 2 (o escoamento em camada limite da Fig. 2.11 e o escoamento sobre um cilindro na Fig. 2.12). Ambos serão discutidos mais adiante no Cap. 9.

Os conceitos de rotação e de deformação são abordados em detalhes no filme da NCFMF, *Deformation of Continuous Media.* O cálculo da deformação angular é ilustrado para um campo simples de escoamento no Problema-Exemplo 5.7.

EXEMPLO 5.7 — Rotação em Escoamento Viscométrico

Um escoamento viscométrico em uma estreita fresta entre grandes placas paralelas é mostrado. O campo de velocidade na fresta é dado por $\vec{V} = U(y/h)\hat{i}$, onde $U = 4$ mm/s e $h = 4$ mm. Em $t = 0$, duas linhas, *ac* e *bd*, são marcadas no fluido, como mostrado. Avalie as posições dos pontos marcados em $t = 1{,}5$ s e faça um esboço para fins de comparação. Calcule a taxa de deformação angular e a taxa de rotação de uma partícula fluida nesse campo de velocidade. Comente os seus resultados.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.7

DADOS: Campo de velocidade, $\vec{V} = U(y/h)\hat{i}$; $U = 4$ mm/s, e $h = 4$ mm. Partículas fluidas marcadas em $t = 0$ formando uma cruz, como mostrado.

DETERMINAR:
(a) As posições dos pontos a', b', c' e d' em $t = 1{,}5$ s; plotar.
(b) Taxa de deformação angular.
(c) Taxa de rotação de uma partícula fluida.
(d) Comentários sobre o significado dos resultados.

SOLUÇÃO:

Para o campo de escoamento dado, $v = 0$, de forma que não há movimento vertical. A velocidade de cada ponto permanece constante, de modo que $\Delta x = u\Delta t$ para cada ponto. No ponto *b*, $u = 3$ mm/s, então

$$\Delta x_b = 3\ \frac{\text{mm}}{\text{s}} \times 1{,}5\ \text{s} = 4{,}5\ \text{mm}$$

Os pontos *a* e *c* movem-se 3 mm cada um; o ponto *d* move-se 1,5 mm. O gráfico em $t = 1{,}5$ s é

A taxa de deformação angular é

$$-\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = U\frac{1}{h} + 0 = \frac{U}{h} = 4\ \frac{\text{mm}}{\text{s}} \times \frac{1}{4\ \text{mm}} = 1\ \text{s}^{-1} \qquad -\dot{\gamma}$$

A taxa de rotação é

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{U}{h}\right) = -\frac{1}{2} \times 4\ \frac{\text{mm}}{\text{s}} \times \frac{1}{4\ \text{mm}} = -0{,}5\ \text{s}^{-1} \qquad \omega_z$$

{Esse escoamento é viscoso; portanto, esperamos que haja tanto deformação angular quanto rotação. A forma e a orientação de uma partícula fluida mudam.}

b. Deformação Linear

Durante a deformação linear, a forma de um elemento fluido, descrita pelos ângulos de seus vértices, permanece imutável, visto que todos os ângulos retos continuam a sê-lo (veja a Fig. 5.5). O elemento irá variar de comprimento na direção *x* apenas se $\partial u/\partial x$ for diferente de zero. Analogamente, uma mudança na dimensão *y* exige um valor diferente de zero para $\partial v/\partial y$, e uma mudança na dimensão *z* exige um valor diferente de zero para $\partial w/\partial z$. Essas quantidades representam as componentes das taxas longitudinais de deformação nas direções *x*, *y* e *z*, respectivamente. Mudanças no comprimento das faces podem produzir alterações no volume do elemento. A taxa local, instantânea, de dilatação volumétrica é dada por

$$\text{Taxa de dilatação volumétrica} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} \qquad (5.20)$$

Para escoamento incompressível, a taxa de dilatação volumétrica é zero.

EXEMPLO 5.8 — Taxas de Deformação para Escoamento em Esquina

O campo de velocidade $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$ representa escoamento em uma "esquina", como mostrado no Problema-Exemplo 5.4, onde $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. Um quadrado é marcado no fluido conforme mostrado em $t = 0$. Avalie as novas posições dos quatro pontos dos cantos, quando o ponto a tiver se movido para $x = 3/2$ m, após τ segundos. Avalie as taxas de deformação linear nas direções x e y. Compare a área $a'b'c'd'$ em $t = \tau$, com a área $abcd$ em $t = 0$. Comente o significado desse resultado.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.8

DADOS: $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$; $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$, x e y em metros.

DETERMINAR:
(a) A posição do quadrado em $t = \tau$ quando a está em a' em $x = 3/2$ m.
(b) As taxas de deformação linear.
(c) A área $a'b'c'd'$ comparada com $abcd$.
(d) Significado dos resultados.

SOLUÇÃO:

Primeiro devemos determinar τ, e para isso devemos seguir uma partícula fluida usando a descrição Lagrangiana. Assim,

$$u = \frac{dx_p}{dt} = Ax_p \qquad \frac{dx}{x} = A\,dt \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^{\tau} A\,dt \qquad \ln\frac{x}{x_0} = A\tau$$

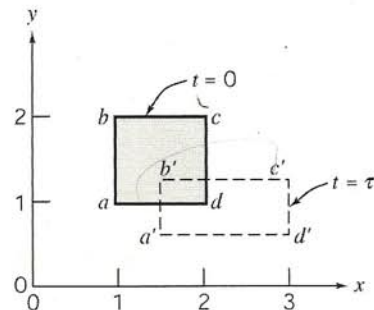
$$\tau = \frac{\ln x/x_0}{A} = \frac{\ln(\frac{3}{2})}{0{,}3\ \text{s}^{-1}} = 1{,}35\ \text{s}$$

Na direção y

$$v = \frac{dy_p}{dt} = -Ay_p \qquad \frac{dy}{y} = -A\,dt \qquad \frac{y}{y_0} = e^{-A\tau}$$

As coordenadas do ponto em τ são:

Ponto	$t = 0$	$t = \tau$
a	(1, 1)	$(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$
b	(1, 2)	$(\frac{3}{2}, \frac{4}{3})$
c	(2, 2)	$(3, \frac{4}{3})$
d	(2, 1)	$(3, \frac{2}{3})$

O gráfico é:

As taxas de deformação linear são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,Ax = A = 0{,}3\ \text{s}^{-1} \qquad \text{na direção } x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,(-Ay) = -A = -0{,}3^{-1} \qquad \text{na direção } y$$

A taxa de dilatação volumétrica é:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A - A = 0$$

A área $abcd = 1\ \text{m}^2$ e a área $a'b'c'd' = (3 - 3/2)(4/3 - 2/3) = 1\ \text{m}^2$.

Note que:
1. Planos paralelos permanecem paralelos; há deformação linear, mas não há deformação angular.
2. As taxas de deformação linear são iguais e opostas, de forma que a área da região marcada é conservada.
3. Linhas verticais permanecem verticais e linhas horizontais permanecem horizontais. A partícula marcada não gira. (Verificando, nós constatamos que $\neq v/\neq x = 0$ e $\neq u/\neq y = 0$, então $\neq v/\neq x + \neq u/\neq y = 0$ através do campo de escoamento. O campo de escoamento é irrotacional.) No filme da NCFMF, *Film Visualization*, bolhas marcadoras de hidrogênio são empregadas para demonstrarem experimentalmente que a área de um quadrado de fluido marcado é mantida no escoamento incompressível bidimensional.

Nós mostramos nessa seção que o campo de velocidade contém todas as informações necessárias para determinar a aceleração, rotação e deformação de uma partícula num escoamento.

5.4 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Uma equação dinâmica descrevendo o movimento do fluido pode ser obtida aplicando-se a segunda lei de Newton a uma partícula. Para deduzir a forma diferencial da equação da quantidade de movimento, aplicaremos a segunda lei de Newton a uma partícula fluida infinitesimal de massa dm.

Lembremos que a segunda lei de Newton para um sistema é dada por

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.2a}$$

onde a quantidade de movimento, $\vec{P}$, do sistema, é dada por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{\text{massa (sistema)}} \vec{V}\, dm \tag{4.2b}$$

Então, para um sistema infinitesimal de massa dm, a segunda lei de Newton pode ser escrita

$$d\vec{F} = dm\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{5.21}$$

Tendo obtido uma expressão para a aceleração de um elemento fluido de massa dm movendo-se num campo de velocidade (Eq. 5.9), podemos escrever a segunda lei de Newton como a equação vetorial

$$d\vec{F} = dm\frac{D\vec{V}}{Dt} = dm\left[u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right] \tag{5.22}$$

Precisamos agora obter uma formulação adequada para a força, $d\vec{F}$, ou suas componentes, dF_x, dF_y e dF_z, atuando sobre o elemento.

5.4.1 Forças Atuando sobre uma Partícula Fluida

Lembre-se que as forças que atuam sobre um elemento fluido podem ser classificadas como de campo ou de superfície; as de superfície incluem tanto as normais quanto as tangenciais (de cisalhamento).

Consideraremos a componente x da força agindo sobre um elemento diferencial de massa dm e volume $d\forall = dx\,dy\,dz$. Apenas aquelas tensões que atuam na direção x darão origem a forças superficiais na direção x. Se as tensões no centro do elemento diferencial forem tomadas como σ_{xx}, τ_{yx} e τ_{zx}, as tensões atuantes na direção x em cada face do elemento (obtidas por um desenvolvimento em série de Taylor em relação ao centro do elemento) são conforme mostrado na Fig. 5.10.

Para obter a força de superfície líquida na direção x, dF_{S_x}, devemos somar as forças nessa direção. Então,

$$\begin{aligned} dF_{S_x} &= \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz \\ &+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz \\ &+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy \end{aligned}$$

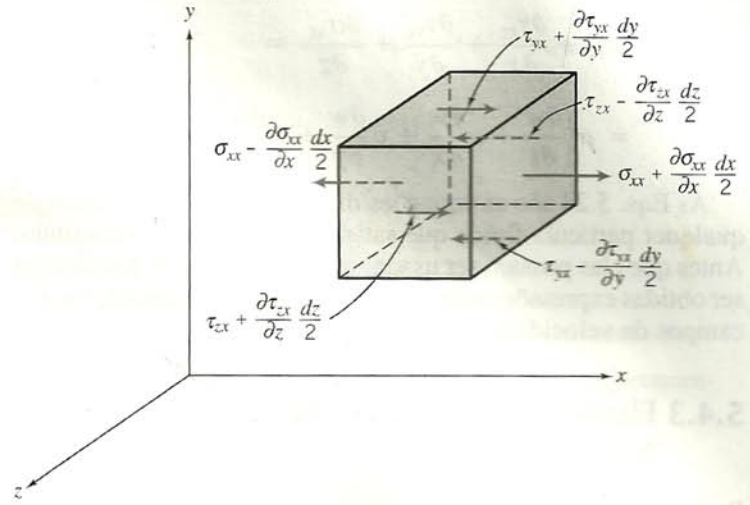



Fig. 5.10 Tensões na direção x sobre um elemento fluido.

Simplificando, obtemos

$$dF_{S_x} = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Quando a força da gravidade é a única força de campo atuante, então a força de campo por unidade de massa é igual a $\vec{g}$. A força líquida na direção x, dF_x, é dada por

$$\begin{aligned} dF_x &= dF_{B_x} + dF_{S_x} = \\ &= \left(\rho g_x + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \end{aligned} \tag{5.23a}$$

Pode-se deduzir expressões similares para as componentes da força nas direções y e z:

$$\begin{aligned} dF_y &= dF_{B_y} + dF_{S_y} = \\ &= \left(\rho g_y + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \end{aligned} \tag{5.23b}$$

$$\begin{aligned} dF_z &= dF_{B_z} + dF_{S_z} = \\ &= \left(\rho g_z + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \end{aligned} \tag{5.23c}$$

5.4.2 Equação Diferencial da Quantidade de Movimento

Formulamos expressões para as componentes, dF_x, dF_y e dF_z, da força, $d\vec{F}$, atuante sobre o elemento de massa, dm. Se substituirmos essas expressões (Eqs. 5.23) nas componentes x, y e z da Eq. 5.22, obteremos as equações diferenciais do movimento,

$$\begin{aligned} &\rho g_x + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = \\ &= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{5.24a}$$

$$\begin{aligned} &\rho g_y + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} = \\ &= \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{5.24b}$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} =$$

$$= \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (5.24c)$$

As Eqs. 5.24 são as equações diferenciais do movimento de qualquer partícula fluida que satisfaça a hipótese do contínuo. Antes que elas possam ser usadas na solução de u, v e w, devem ser obtidas expressões adequadas para as tensões, em termos dos campos de velocidade e de pressão.

5.4.3 Fluidos Newtonianos: Equações de Navier-Stokes

Para um fluido Newtoniano, a tensão viscosa é proporcional à taxa de deformação por cisalhamento (taxa de deformação angular). As tensões podem ser expressas em termos dos gradientes de velocidade e das propriedades dos fluidos, em coordenadas retangulares, como segue:[8]

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (5.25a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad (5.25b)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (5.25c)$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.25d)$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.25e)$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.25f)$$

onde p é a pressão termodinâmica local.[9] A pressão termodinâmica é relacionada com a densidade e temperatura pela relação termodinâmica usualmente chamada de equação de estado.

Se essas expressões forem introduzidas nas equações diferenciais do movimento (Eqs. 5.24), obteremos:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \quad (5.26a)$$

[8]A dedução desses resultados está além dos objetivos desse livro. Deduções detalhadas podem ser encontradas nas Referências 2, 3 e 4.

[9]A Referência 5 discute a relação entre a pressão termodinâmica e a pressão média definida como $p = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$.

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \quad (5.26b)$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] \quad (5.26c)$$

Essas equações do movimento são chamadas de equações de Navier-Stokes. Elas são em muito simplificadas quando aplicadas ao escoamento incompressível com viscosidade constante. Nestas condições, elas reduzem-se a:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$
$$= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (5.27a)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) =$$
$$= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (5.27b)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) =$$
$$= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (5.27c)$$

No Problema-Exemplo 5.9 as equações de Navier-Stokes em coordenadas retangulares (Eqs. 5.27) são aplicadas para analisar o escoamento laminar completamente desenvolvido na descendente sobre uma superfície inclinada.

As equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas para massa específica e viscosidade constantes, são dadas no Apêndice B. No Problema-Exemplo 5.10, essas equações (Eqs. B.3) são aplicadas para analisar um escoamento laminar viscométrico.

Para o caso do escoamento sem atrito ($\mu = 0$), as equações do movimento (Eqs. 5.26 ou Eqs. 5.27) reduzem-se à equação de Euler,

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p$$

Consideraremos o caso do escoamento sem atrito no Cap. 6.

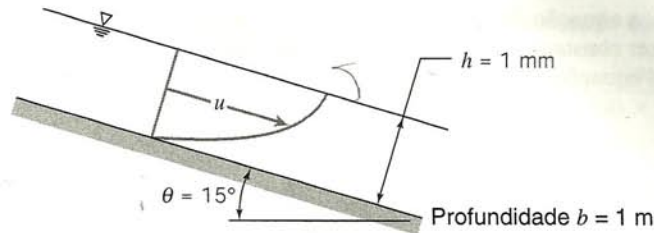
EXEMPLO 5.9 — Análise de um Escoamento Laminar Completamente Desenvolvido na Descendente sobre uma Superfície Inclinada

Um líquido escoa numa película de espessura h em regime permanente, laminar e completamente desenvolvido, para baixo, sobre uma superfície inclinada. Simplifique as equações de Navier-Stokes para modelar esse campo de escoamento. Obtenha expressões para o perfil de velocidade do líquido, a distribuição de tensões de cisalhamento, a vazão volumétrica e a velocidade média. Relacione a espessura da película com a vazão volumétrica por unidade de profundidade de superfície normal ao escoamento. Calcule a vazão volumétrica numa película de água de 1 mm de espessura sobre uma superfície de 1 m de largura, inclinada de 15° em relação à horizontal.

$h = 1$ mm

u

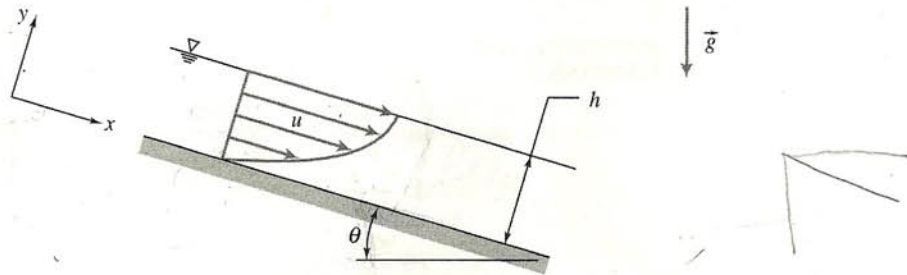
$\theta = 15°$

Profundidade $b = 1$ m

PROBLEMA-EXEMPLO 5.9

DADOS: Escoamento de líquido descendo sobre um plano inclinado em regime permanente, em um filme laminar de espessura h, completamente desenvolvido.

DETERMINAR:
- **(a)** Equações simplificadas da continuidade e de Navier-Stokes para modelar esse campo de escoamento.
- **(b)** O perfil de velocidades.
- **(c)** A distribuição das tensões de cisalhamento.
- **(d)** A vazão volumétrica por unidade de profundidade na superfície normal ao diagrama.
- **(e)** A velocidade média do escoamento.
- **(f)** A espessura do filme em termos da vazão volumétrica por unidade de profundidade na superfície normal ao diagrama.
- **(g)** A vazão volumétrica em um filme de água de 1 mm de espessura em uma superfície com 1 m de largura, inclinada de 15° com relação à horizontal.

SOLUÇÃO:

A geometria e o sistema de coordenadas utilizados para modelar o campo de velocidades são mostrados. (É conveniente alinhar um eixo de coordenada com o escoamento descendo o plano inclinado.)

As equações básicas escritas para escoamento incompressível com viscosidade constante são

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (5.27a)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (5.27b)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad (5.27c)$$

Os termos suprimidos para simplificar as equações básicas são indexados por números e listados abaixo. As considerações são discutidas na mesma ordem em que elas são aplicadas para simplificar as equações.

Considerações :
1. Regime permanente (dado).
2. Escoamento incompressível; $\rho =$ constante.
3. Sem escoamento ou variação das propriedades na direção z; $w = 0$ e $\partial/\partial z = 0$.
4. Escoamento completamente desenvolvido, portanto sem variação das propriedades na direção x; $\partial/\partial x = 0$.

A consideração (1) elimina as variações com o tempo em qualquer propriedade do fluido.

A consideração (2) elimina variações espaciais na densidade.

A consideração (3) estabelece que não existe componente da velocidade em z e que também não existem variações das propriedades na direção z. Todos os termos da componente z na equação de Navier-Stokes são suprimidos.

Após a aplicação da consideração (4), a equação da continuidade reduz-se a $\partial v/\partial y = 0$. As considerações (3) e (4) também indicam que $\partial v/\partial z = 0$ e $\partial v/\partial x = 0$. Por isso, v deve ser constante. Como v é zero na superfície sólida, então v deve ser zero em toda parte.

O fato de que $v = 0$ reduz ainda mais as equações de Navier-Stokes, como indicado pelas supressões (5). As equações finais simplificadas são

$$0 = \rho g_x + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$0 = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

Uma vez que $\partial u/\partial z = 0$ (consideração 3) e $\partial u/\partial x = 0$ (consideração 4), então u é função de y e $\partial^2 u/\partial y^2 = d^2u/dy^2$, e da Eq. 1 segue que

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\rho g_x}{\mu} = -\rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}$$

Integrando

$$\frac{du}{dy} = -\rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu} y + c_1 \quad (3)$$

e integrando novamente

$$u = -\rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu} \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2 \quad (4)$$

Para avaliar as constantes, são necessárias as condições de contorno de não deslizamento na superfície do sólido ($u = 0$ em $y = 0$) e de tensão cisalhante nula na superfície livre do líquido ($du/dy = 0$ em $y = h$).

A avaliação da Eq. 4 em $y = 0$ fornece $c_2 = 0$. Da Eq. 3, em $y = h$,

$$0 = -\rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu} h + c_1$$

ou

$$c_1 = \rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu} h$$

Substituindo na Eq. 4 obtemos o perfil de velocidade

$$u = -\rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu} \frac{y^2}{2} + \rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu} h y$$

ou

$$u = \rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \quad u(y)$$

A distribuição da tensão de cisalhamento é

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} = \rho g \operatorname{sen}\theta \, (h - y) \quad \tau_{yx}(y)$$

A tensão cisalhante τ_{yx} é positiva, então a força cisalhante sobre uma superfície y negativa atua no sentido negativo de x. Fisicamente, a força cisalhante sobre o líquido acima de qualquer plano y é equilibrada pela força de campo atuando sobre o volume líquido entre o plano y e o plano da superfície livre em $y = h$. A vazão volumétrica é

$$Q = \int_A u \, dA = \int_0^h ub \, dy$$

onde b é a largura da superfície na direção z. Substituindo,

$$Q = \int_0^h \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) b \, dy = \rho g \frac{\operatorname{sen}\theta \, b}{\mu} \left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^h$$

$$Q = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta \, b}{\mu} \frac{h^3}{3} \quad (5) \; Q$$

A velocidade média do escoamento é $\bar{V} = Q/A = Q/bh$. Então,

$$\bar{V} = \frac{Q}{bh} = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{\mu} \frac{h^2}{3} \quad \bar{V}$$

Resolvendo para a espessura da película obtemos

$$h = \left[\frac{3\mu Q}{\rho g \operatorname{sen}\theta \, b} \right]^{1/3} \quad (6) \; h$$

Uma película de água de espessura $h = 1$ mm sobre um plano com largura $b = 1$ m, inclinado de $\theta = 15°$, carregará

$$Q = 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \text{sen}\,(15°) \times 1\ \text{m} \times \frac{\text{m}\cdot\text{s}}{1{,}00\times 10^{-3}\ \text{kg}} \times \frac{(0{,}001)^3\ \text{m}^3}{3} \times 1000\ \frac{\text{L}}{\text{m}^3}$$

$$Q = 0{,}846\ \text{L/s} \qquad Q$$

O propósito desse problema é ilustrar o uso das equações de Navier-Stokes para resolver problemas simples de escoamento viscoso. As equações são simplificadas até que elas modelem o campo de escoamento, em seguida são integradas duas vezes para obter a distribuição de velocidade. Uma vez conhecida a distribuição de velocidade, a tensão cisalhante, a vazão volumétrica e a velocidade média do escoamento são calculadas.

As Equações (5) e (6) mostram que, para esse escoamento, a relação entre vazão volumétrica e espessura de película é não-linear. A espessura da película cresce com $Q^{1/3}$ se todos os parâmetros geométricos forem mantidos constantes e a vazão for aumentada.

EXEMPLO 5.10 — Análise de um Escoamento Laminar Viscométrico entre Cilindros Coaxiais

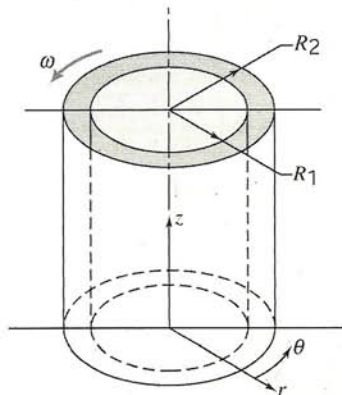
Um líquido viscoso preenche o espaço anular entre dois cilindros verticais concêntricos. O cilindro interno é estacionário e o cilindro externo gira a velocidade constante. O escoamento é laminar. Simplifique as equações da continuidade, de Navier-Stokes e de tensões cisalhantes tangenciais para modelar esse campo de escoamento. Obtenha expressões para o perfil de velocidade do líquido e para a distribuição da tensão de cisalhamento. Compare a tensão cisalhante na superfície do cilindro interno com aquela calculada por uma aproximação planar obtida pelo "desdobramento" do anel de fluido em um plano e supondo perfil de velocidade linear no fluido. Determine a razão entre os raios dos cilindros para a qual a aproximação planar prediz a correta tensão de cisalhamento na superfície do cilindro interno com 1% de erro.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.10

DADOS: Escoamento viscométrico de líquido em espaço anular entre cilindros verticais concêntricos. O cilindro interno é estacionário e o cilindro externo gira a velocidade constante.

DETERMINAR:
- **(a)** Equações simplificadas da continuidade e de Navier-Stokes para modelar esse campo de escoamento.
- **(b)** O perfil de velocidade no espaço anular.
- **(c)** A distribuição de tensão de cisalhamento no espaço anular.
- **(d)** A tensão de cisalhamento na superfície do cilindro interno.
- **(e)** Comparação com aproximação "planar" para tensão cisalhante constante no espaço estreito entre os cilindros.
- **(f)** A razão entre os raios dos cilindros para a qual a aproximação planar prediz a tensão cisalhante com 1% de erro em relação ao valor correto.

SOLUÇÃO:

A geometria e o sistema de coordenadas usados para modelar o campo de escoamento são mostrados. (A coordenada z é dirigida verticalmente para cima; como conseqüência, $g_r = g_\theta = 0$ e $g_z = -g$.)

As equações da continuidade, de Navier-Stokes e de tensões cisalhantes tangenciais escritas para escoamento incompressível com viscosidade constante são

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \qquad \text{(B.1)}$$

(com os termos $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)$ e $\frac{\partial}{\partial z}(v_z)$ cancelados, marcados 4 e 3)

Componente r:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

$$= \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_r]\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right\} \quad \text{(B.3a)}$$

Componente θ:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$

$$= \rho g_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_\theta]\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right\} \quad \text{(B.3b)}$$

Componente z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right\} \quad \text{(B.3c)}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \quad \text{(B.2)}$$

Os termos suprimidos para simplificar as equações básicas são indexados por números e listados abaixo. As considerações são discutidas na mesma ordem em que elas são aplicadas para simplificar as equações.

Considerações :
(1) Regime permanente; velocidade angular do cilindro externo é constante.
(2) Escoamento incompressível; ρ = constante.
(3) Sem escoamento ou variação das propriedades na direção z; $v_z = 0$ e $\partial/\partial z = 0$.
(4) Escoamento circunferencialmente simétrico, então, as propriedades não variam com θ, e $\partial/\partial\theta = 0$.

A consideração (1) elimina variações temporais nas propriedades do fluido.
A consideração (2) elimina variações espaciais na densidade.
A consideração (3) faz com que todos os termos na componente z das equações de Navier-Stokes se anulem, exceto aqueles da distribuição de pressão hidrostática.
Após a aplicação das considerações (3) e (4), a equação da continuidade reduz-se a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0$$

Uma vez que $\partial/\partial\theta = 0$ e $\partial/\partial z = 0$ pelas considerações (3) e (4), então

$$rv_r = \text{constante}$$

Como v_r é zero na superfície sólida, então v_r deve ser zero em toda parte.
O fato de que $v_r = 0$ reduz ainda mais as equações de Navier-Stokes, como indicado pelas supressões (5). As equações finais reduzem-se a

$$-\rho\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0 = \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_\theta]\right)\right\}$$

Como $\partial/\partial\theta = 0$ e $\partial/\partial z = 0$ pelas considerações (3) e (4), então v_θ é uma função do raio apenas, e

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[rv_\theta]\right) = 0$$

Integrando uma vez

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[rv_\theta] = c_1$$

ou

$$\frac{d}{dr}[rv_\theta] = c_1 r$$

Integrando novamente

$$rv_\theta = c_1\frac{r^2}{2} + c_2 \qquad \text{ou} \qquad v_\theta = c_1\frac{r}{2} + c_2\frac{1}{r}$$

Duas condições de contorno são necessárias para avaliar as constantes c_1 e c_2. As condições de contorno são

$$v_\theta = \omega R_2 \quad \text{em} \quad r = R_2 \quad \text{e}$$
$$v_\theta = 0 \quad \text{em} \quad r = R_1$$

Substituindo

$$\omega R_2 = c_1 \frac{R_2}{2} + c_2 \frac{1}{R_2}$$
$$0 = c_1 \frac{R_1}{2} + c_2 \frac{1}{R_1}$$

Após algum algebrismo

$$c_1 = \frac{2\omega}{1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{-\omega R_1^2}{1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2}$$

Substituindo na expressão para v_θ,

$$v_\theta = \frac{\omega r}{1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2} - \frac{\omega R_1^2/r}{1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2} = \frac{\omega R_1}{1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2}\left[\frac{r}{R_1} - \frac{R_1}{r}\right]$$

$v_\theta(r)$

A distribuição da tensão de cisalhamento é

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = \mu r \frac{d}{dr}\left\{\frac{\omega R_1}{1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{R_1}{r^2}\right]\right\} = \mu r \frac{\omega R_1}{1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2}(-2)\left(-\frac{R_1}{r^3}\right)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \frac{2\omega R_1^2}{1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2}\frac{1}{r^2}$$

$\tau_{r\theta}$

Na superfície do cilindro interno, $r = R_1$, então

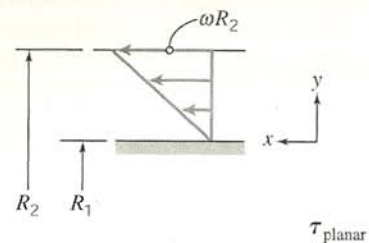
$$\tau_{\text{sup}} = \mu \frac{2\omega}{1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2}$$

τ_{sup}

Para a fresta "planar"

$$\tau_{\text{planar}} = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y} = \mu \frac{\omega R_2}{R_2 - R_1}$$

ou

$$\tau_{\text{planar}} = \mu \frac{\omega}{1 - \dfrac{R_1}{R_2}}$$

τ_{planar}

Fatorando o denominador da expressão exata para a tensão cisalhante na superfície obtém-se

$$\tau_{\text{sup}} = \mu \frac{2\omega}{\left(1 - \dfrac{R_1}{R_2}\right)\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)} = \mu \frac{\omega}{1 - \dfrac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{2}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}$$

Então

$$\frac{\tau_{\text{sup}}}{\tau_{\text{planar}}} = \frac{2}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}$$

Para 1% de acurácia

$$1{,}01 = \frac{2}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}$$

ou

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{1{,}01}(2 - 1{,}01) = 0{,}980$$

$\dfrac{R_1}{R_2}$

O critério da acurácia é atendido quando a fresta for menor que 2% do raio do cilindro.

O propósito desse problema é ilustrar o uso das equações de Navier-Stokes para resolver um problema simples de escoamento viscoso em coordenadas cilíndricas. Como no exemplo anterior, as equações são simplificadas até que elas modelem o campo de escoamento, em seguida são integradas duas vezes para obter a distribuição de velocidade. Uma vez conhecida a distribuição de velocidade, a tensão cisalhante e outros parâmetros podem ser calculados.

Essa solução pode ser usada para avaliar a acurácia da consideração de que um escoamento entre cilindros concêntricos pode ser modelado como um escoamento entre placas infinitas paralelas. Essa situação é reforçada no Cap. 8.

5.5 RESUMO DOS OBJETIVOS

Após completar o estudo do Cap. 5, você deverá ser capaz de:

1. Escrever a expressão diferencial da conservação da massa (a) na forma vetorial, (b) em coordenadas retangulares e (c) em coordenadas cilíndricas.
2. Dada uma expressão algébrica para um campo de velocidade, determinar se o campo representa um possível escoamento incompressível.
3. Dada uma componente de velocidade num campo de escoamento bidimensional, avaliar uma outra componente para o escoamento permanente, incompressível.

*4. Para um campo de escoamento bidimensional, incompressível, definir a função de corrente, ψ ; dado o campo de velocidade, determinar a função de corrente; dada a função de corrente, determinar o campo de velocidade.

5. Para uma partícula fluida movendo-se num dado campo de velocidade, determinar as acelerações total, convectiva e local.
6. Para uma partícula fluida movendo-se num campo de escoamento, ilustrar: translação, rotação, deformação linear e deformação angular.
7. Definir: rotação de um fluido, vorticidade e circulação.
8. Escrever a forma diferencial da equação da quantidade de movimento para escoamento viscoso e enunciar o significado físico de cada termo da equação.
9. Resolver os problemas no final do capítulo que se relacionam com o material que você estudou.

REFERÊNCIAS

1. Li, W. H., and S. H. Lam, *Principles of Fluid Mechanics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1964.
2. Daily, J. W., and D. R. F. Harleman, *Fluid Dynamics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
3. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, 7th ed. New York: McGraw-Hill, 1979.
4. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.
5. Sabersky, R. H., A. J. Acosta, and E. G. Hauptmann, *Fluid Flow—A First Course in Fluid Mechanics*, 3rd ed. New York: Macmillan, 1989.

PROBLEMAS

5.1 Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento bidimensional incompressível?

(a) $u = x + y;\ v = x - y$

(b) $u = x + 2y;\ v = x^2 - y^2$

(c) $u = 4x + y;\ v = x - y^2$

(d) $u = xt + 2y;\ v = x^2 - yt^2$

(e) $u = xt^2;\ v = xyt + y^2$

5.2 Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento bidimensional incompressível?

(a) $u = 2x^2 + y^2;$
$v = x^3 - x(y^2 - 2y)$

(b) $u = 2xy - x^2 + y;$
$v = 2xy - y^2 + x^2$

(c) $u = xt + 2y;\ v = xt^2 - yt$

(d) $u = (x + 2y)xt;\ v = (2x - y)yt$

5.3 Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento tridimensional incompressível?

(a) $u = x + y + z^2;\ v = x - y + z;\ w = 2xy + y^2 + 4$

(b) $u = xyzt;\ v = -xyzt^2;\ w = (z^2/2)(xt^2 - yt)$

(c) $u = y^2 + 2xz;\ v = -2yz + x^2yz;\ w = \frac{1}{2}x^2z^2 + x^3y^4$

5.4 As três componentes da velocidade num campo de velocidade são dadas por $u = Ax + By + Cz$, $v = Dx + Ey + Fz$ e $w = Gx + Hy + Jz$. Determine a relação entre os coeficientes A a J necessária se isso se trata de um possível campo de escoamento incompressível.

5.5 Para um escoamento no plano xy, a componente y da velocidade é dada por $v = y^2 - 2x + 2y$. Encontre uma possível componente x para o escoamento permanente incompressível. Ela também é válida para escoamento não permanente incompressível? Por quê? Quantas possíveis componentes x existem?

5.6 Para um escoamento no plano xy, a componente x da velocidade é dada por $u = Ax(y - B)$, onde $A = 2\ m^{-1} \cdot s^{-1}$, $B = 1 m$, e x e y são medidos em metros. Encontre uma possível componente y para escoamento permanente incompressível. Ela também é válida para escoamento não permanente incompressível? Por quê? Quantas possíveis componentes y existem?

5.7 A componente x da velocidade num campo de escoamento permanente incompressível no plano xy é $u = A/x$, onde $A = 2\ m^2/s$ e x é medido em metros. Encontre a mais simples componente y da velocidade para esse campo de escoamento.

*Esse objetivo aplica-se às seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

5.8 A componente y da velocidade em um campo de escoamento permanente e incompressível no plano xy é $v = Ay/x^2$, onde $A = 2$ m²/s, e y e x são medidos em metros. Encontre a mais simples componente x para esse campo de velocidades.

5.9 Uma aproximação grosseira para a componente x da velocidade numa camada limite laminar incompressível é uma variação linear de $u = 0$ na superfície ($y = 0$), até a velocidade da corrente livre, U, na borda da camada limite ($y = \delta$). A equação do perfil é $u = Uy/\delta$, onde $\delta = cx^{1/2}$ e c é uma constante. Mostre que a expressão mais simples para a componente y da velocidade é $v = uy/4x$. Avalie o valor máximo da razão v/U, num local onde $x = 0{,}5$ m e $\delta = 5$ mm.

5.10 Uma aproximação útil para a componente x da velocidade num escoamento laminar incompressível de camada limite é uma variação parabólica de $u = 0$ na superfície ($y = 0$) até a velocidade de corrente livre, U, na borda da camada limite ($y = \delta$). A equação do perfil é $u/U = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$, onde $\delta = cx^{1/2}$ e c é uma constante. Mostre que a expressão mais simples para a componente y da velocidade é

$$\frac{v}{U} = \frac{\delta}{x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]$$

Trace um gráfico v/U em função de y/δ para determinar o local de maior valor de v/U. Avalie a razão onde $\delta = 5$ mm e $x = 0{,}5$ m.

5.11 Uma aproximação útil para a componente x da velocidade num escoamento laminar incompressível de camada limite é uma variação senoidal de $u = 0$ na superfície ($y = 0$) até a velocidade de corrente livre, U, na borda da camada limite ($y = \delta$). A equação do perfil é $u = U \operatorname{sen}(\pi y/2\delta)$, onde $\delta = cx^{1/2}$ e c é uma constante. Mostre que a expressão mais simples para a componente y da velocidade é

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{\pi}\frac{\delta}{x}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) - 1\right]$$

Trace um gráfico v/U em função de y/δ para determinar o local de maior valor de v/U. Avalie a razão onde $x = 0{,}5$ m e $\delta = 5$ mm.

5.12 A componente y da velocidade num campo de escoamento no plano xy, incompressível e em regime permanente, é $v = -Bxy^3$, onde $B = 0{,}2$ m$^{-3}\cdot$s^{-1}, e x e y são medidos em metros. Encontre a mais simples componente x da velocidade para esse campo de escoamento. Encontre a equação das linhas de corrente para esse escoamento. Plote as linhas de corrente passando pelos pontos (1, 4) e (2, 4).

5.13 Para um escoamento no plano xy, a componente x da velocidade é dada por $u = Ax^2y^2$, onde $A = 0{,}3$ m$^{-3}\cdot$s^{-1}, e x e y são medidos em metros. Encontre uma possível componente y da velocidade para o escoamento incompressível em regime permanente. Ela é válida também para escoamento incompressível em regime transiente? Por quê? Quantas possíveis componentes y existem? Encontre a equação da linha de corrente para a mais simples componente y do vetor velocidade. Plote as linhas de corrente passando pelos pontos (1, 4) e (2, 4).

5.14 Deduza a forma diferencial da conservação de massa em coordenadas retangulares expandindo os *produtos* da densidade e as componentes da velocidade, ρu, ρv e ρw, em uma série de Taylor em torno de um ponto O. Mostre que o resultado é idêntico à Eq. 5.1a.

5.15 Considere uma corrente d'água de um jato de um regador oscilatório de jardim. Descreva as correspondentes trajetória e linha de emissão.

5.16 Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento incompressível?

(a) $V_r = U\cos\theta;\ V_\theta = -U\operatorname{sen}\theta$

(b) $V_r = -q/2\pi r;\ V_\theta = K/2\pi r$

(c) $V_r = U\cos\theta\left[1 - (a/r)^2\right];\ V_\theta = -U\operatorname{sen}\theta\left[1 + (a/r)^2\right]$

5.17 Para um escoamento incompressível no plano $r\theta$, a componente r da velocidade é dada por $V_r = -\Lambda\cos\theta/r^2$. Encontre uma possível componente θ da velocidade. Quantas possíveis componentes θ existem?

5.18 Um líquido viscoso é submetido a cisalhamento entre dois discos paralelos de raio R, um dos quais gira enquanto o outro permanece fixo. O campo de velocidade é puramente tangencial e a velocidade varia linearmente com z, de $V_\theta = 0$ em $z = 0$ (o disco fixo), até a velocidade do disco rotativo, na sua superfície ($z = h$). Deduza uma expressão para o campo de velocidade entre os discos.

5.19 Um campo de velocidade em coordenadas cilíndricas é dado por $\vec{V} = (A/r)(\hat{e}_r + \hat{e}_\theta)$, onde $A = 0{,}25$ m²/s. Isso representa um caso possível de escoamento incompressível? Obtenha a equação para uma linha de corrente que passa pelo ponto $r_0 = 1$ m, $\theta = 0$. Compare com a linha de trajetória que passa pelo mesmo ponto.

5.20 Avalie $\nabla \cdot \rho\vec{V}$ em coordenadas cilíndricas. Use a definição de ∇ em coordenadas cilíndricas. Substitua o vetor velocidade e faça as operações indicadas, utilizando a sugestão da nota de rodapé 1 da Eq. 5.1b. Reúna os termos e simplifique; mostre que esse resultado é idêntico à Eq. 5.2.

5.21 Considere um jato de água vindo de um bocal fixado em um regador rotativo de jardim. Descreva as linha de trajetória e de emissão correspondentes.

***5.22** O campo de velocidade para o escoamento viscométrico do Problema-Exemplo 5.7 é $\vec{V} = U(y/h)\hat{i}$. Encontre a função de corrente para este escoamento. Localize a linha de corrente que divide a vazão em volume local em duas partes iguais.

***5.23** Determine a família de funções ψ que resultam do campo de velocidades $\vec{V} = (x^2 - y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$.

***5.24** O campo de velocidade do Problema 5.19 representa um caso possível de esco^,Unto incompressível? Se afirmativo, avalie a função de corrente para o escoamento. Se negativo, avalie a taxa de variação da massa específica no campo de escoamento.

***5.25** A função de corrente para um certo escoamento incompressível é dada pela expressão $\psi = -U\,r\operatorname{sen}\theta + q\theta/2\pi$. Obtenha uma expressão para o campo de velocidade. Determine o(s) ponto(s) de estagnação onde $|\vec{V}| = 0$, e mostre que nesse(s) ponto(s) $\psi = 0$.

***5.26** Considere um escoamento com componentes de velocidade $u = 0$, $v = -y^3 - 4z$ e $w = 3y^2z$.

(a) Esse escoamento é uni, bi ou tridimensional?

(b) Demonstre se esse escoamento é incompressível ou compressível.

(c) Se possível, deduza uma função de corrente para esse escoamento.

***5.27** Um campo de escoamento incompressível sem atrito é especificado pela função de corrente $\psi = -6Ax - 8Ay$, onde $A = 1$ m/s, e x e y são coordenadas em metros. Esboce as linhas de corrente $\psi = 0$ e $\psi = 8$. Indique no esboço o sentido do vetor velocidade no ponto (0, 0). Determine a magnitude da vazão em volume entre as linhas de corrente que passam pelos pontos (2, 2) e (4, 1).

***5.28** Num escoamento paralelo unidimensional, no sentido positivo do eixo x, a velocidade varia linearmente de zero em $y = 0$ a 100 pés/s em $y = 4$ pés. Encontre uma expressão para a função

---

*Estes problemas exigem material de seções que podem ser omitidas sem haver perda de continuidade no material do texto.

de corrente, ψ. Encontre também a coordenada y acima da qual a vazão em volume é metade do total entre $y = 0$ e $y = 4$ pés.

***5.29** Um perfil de velocidade linear foi utilizado para modelar o escoamento numa camada limite laminar, incompressível, no Problema 5.9. Encontre a função de corrente para esse campo de escoamento. Localize as linhas de corrente a um quarto e um meio da vazão em volume total na camada limite.

***5.30** Um perfil de velocidade parabólico foi utilizado para modelar o escoamento numa camada limite laminar, incompressível, no Problema 5.10. Encontre a função de corrente para este campo de escoamento. Localize as linhas de corrente a um quarto e um meio da vazão em volume total na camada limite.

***5.31** Deduza a função de corrente que representa a aproximação senoidal usada para modelar a componente x da velocidade na camada limite do Problema 5.11. Localize as linhas de corrente a um quarto e um meio da vazão em volume total na camada limite.

***5.32** Um movimento de corpo rígido foi modelado no Problema-Exemplo 5.6 pelo campo de velocidade $\vec{V} = r\omega\hat{e}_\theta$. Encontre a função de corrente para esse escoamento. Avalie a vazão em volume por unidade de profundidade entre $r_1 = 0{,}05$ m e $r_2 = 0{,}07$ m, se $\omega = 0{,}5$ rad/s. Esboce o perfil de velocidade ao longo de uma linha de θ constante. Verifique a vazão em volume calculada a partir da função de corrente, integrando o perfil de velocidade ao longo dessa linha.

***5.33** O Problema-Exemplo 5.6 mostrou que o campo de velocidade para um vórtice livre no plano $r\theta$ é $\vec{V} = \hat{e}_\theta C/r$. Encontre a função de corrente para esse escoamento. Avalie a vazão em volume por unidade de profundidade entre $r_1 = 0{,}05$ m e $r_2 = 0{,}07$ m, se $C = 0{,}5$ m²/s. Esboce o perfil de velocidade ao longo de uma linha de θ constante. Verifique a vazão em volume calculada a partir da função de corrente integrando o perfil de velocidade ao longo dessa linha.

5.34 Considere o campo de velocidade $\vec{V} = Axy\hat{i} - \frac{1}{2}Ay^2\hat{j}$ no plano xy, onde $A = 0{,}25$ m$^{-1}\cdot$s^{-1} e as coordenadas são medidas em metros. É esse um possível campo de escoamento incompressível? Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (2, 1)$.

5.35 Considere o campo de escoamento dado por $\vec{V} = xy^2\hat{i} - \frac{1}{3}y^3\hat{j} + xy\hat{k}$. Determine (a) o número de dimensões do escoamento, (b) se ele é um possível escoamento incompressível e (c) a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

5.36 Considere o campo de escoamento dado por $\vec{V} = ax^2y\hat{i} - by\hat{j} + cz^2\hat{k}$, onde $a = 1$ m$^{-2}\cdot$s^{-1}, $b = 3$s^{-1} e $c = 2$m$^{-1}\cdot$s^{-1}. Determine (a) o número de dimensões do escoamento, (b) se ele é um possível escoamento incompressível e (c) a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y, z) = (3, 1, 2)$.

5.37 O campo de velocidade dentro de uma camada limite laminar é dado pela expressão

$$\vec{V} = \frac{AUy}{x^{1/2}}\hat{i} + \frac{AUy^2}{4x^{3/2}}\hat{j}$$

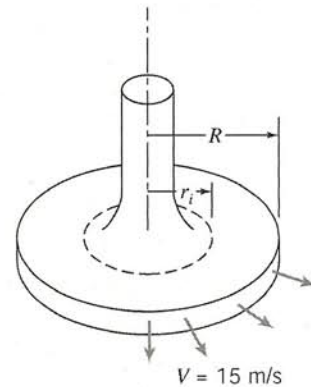
Nessa expressão, $A = 141$ m$^{-1/2}$ e $U = 0{,}240$ m/s é a velocidade de corrente livre. Mostre que esse campo de velocidade representa um possível escoamento incompressível. Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (0{,}5$ m, 5 mm).

5.38 A componente y da velocidade num campo de escoamento incompressível bidimensional é dada por $v = -Axy$, onde v é em m/s, x e y são em metros, e A é uma constante dimensional. Não há componente ou variação de velocidade na direção z. Determine as dimensões da constante, A. Encontre a mais simples componente x da velocidade nesse campo de escoamento. Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (1, 2)$.

5.39 A componente x da velocidade num campo de escoamento permanente incompressível no plano xy, é $u = A/x$, onde $A = 2$ m²/s e x é medida em metros. Mostre que a mais simples componente y da velocidade desse campo de escoamento é $v = Ay/x^2$. Avalie a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (1, 3)$.

5.40 Um líquido incompressível com viscosidade desprezível escoa em regime permanente ao longo de um tubo horizontal de diâmetro constante. Em uma seção porosa de comprimento $L = 0{,}3$ m, o líquido é removido a uma taxa constante por unidade de comprimento, de forma que a velocidade axial uniforme no tubo é $u(x) = U(1 - x/2L)$, onde $U = 5$ m/s. Desenvolva uma expressão para a aceleração de uma partícula do fluido ao longo da linha de centro da seção porosa.

5.41 Resolva o Problema 4.101 para mostrar que a velocidade radial na fresta estreita é $V_r = Q/2\pi rh$. Deduza uma expressão para a aceleração de uma partícula fluida na fresta.

5.42 Considere o escoamento de ar a baixa velocidade entre dois discos paralelos, conforme mostrado. Admita que o escoamento é incompressível e invíscido, e que a velocidade é puramente radial e uniforme em qualquer seção. A velocidade do escoamento é $V = 15$ m/s em $R = 75$ mm. Simplifique a equação da continuidade a uma forma aplicável a esse campo de escoamento. Mostre que uma expressão geral para o campo de velocidade é $\vec{V} = V(R/r)\hat{e}_r$ para $r_i \le r \le R$. Calcule a aceleração de uma partícula fluida nos locais $r = r_i$ e em $r = R$.

P5.42

5.43 Um disco do jogo *hockey* de mesa pode ser modelado como sendo circular, suportado por uma camada de ar que sai de múltiplos e diminutos orifícios na mesa. Admita que o disco flutua a uma distância $h = 1$ mm acima da mesa, através da qual o ar flui verticalmente a uma velocidade média $v = 0{,}08$ m/s. Obtenha uma expressão para a velocidade do escoamento radial sob o disco, se o escoamento for considerado uniforme e incompressível. Se o diâmetro do disco for de 75 mm, determine a magnitude e a localização da aceleração radial máxima a que é submetida uma partícula fluida sob o disco.

5.44 Sabe-se que a temperatura, T, num longo túnel varia aproximadamente de $T = T_0 - \alpha e^{-x/L}\,\text{sen}\,(2\pi t/\tau)$, onde T_0, α, L e τ são constantes, e x é medido a partir da entrada do túnel. Uma partícula move-se para dentro do túnel com uma velocidade constante, U. Obtenha uma expressão para a taxa de variação de temperatura a que é submetida a partícula. Quais são as dimensões dessa expressão?

5.45 Um avião voa no rumo Norte a 300 mph em relação ao solo. A sua razão de subida é 3000 pés/min. O gradiente vertical de temperatura é -3°F por 1000 pés de altitude. A temperatura do solo varia com a posição através de uma frente fria, caindo

*Estes problemas exigem material de seções que podem ser omitidas sem haver perda de continuidade no material do texto.

a uma razão de 1°F por milha. Calcule a taxa de variação de temperatura mostrada por um registrador a bordo da aeronave.

5.46 Quando um avião voa através de uma frente fria, um instrumento de bordo indica que a temperatura ambiente cai à taxa de 0,5°F por minuto. Outros instrumentos mostram uma velocidade do ar de 300 knots e uma razão de subida de 3500 pés/min. A frente está parada e é verticalmente uniforme. Calcule a taxa de variação da temperatura com relação à distância horizontal através da frente fria.

5.47 Após uma chuva, a concentração de sedimentos num certo ponto de um rio aumenta à taxa de 100 partes por milhão (ppm) por hora. Além disso, a concentração aumenta com a distância rio abaixo, como resultado do recebimento de correntes tributárias; essa taxa de acréscimo é de 50 ppm por milha. Nesse ponto a corrente flui a 0,5 mph. Um barco é empregado para verificar a concentração de sedimentos. O operador fica surpreso ao descobrir três taxas aparentes de variação de sedimentos quando o bote sobe o rio, é deixado levar pela corrente ou desce o rio. Explique fisicamente por que as diferentes taxas são observadas. Se a velocidade do barco é de 2,5 mph, calcule as três taxas de variação.

5.48 Expanda $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$ em coordenadas retangulares pela substituição direta do vetor velocidade para obter a aceleração convectiva de uma partícula fluida. Verifique os resultados dados na Eq. 5.11.

5.49 Um campo de velocidade permanente bidimensional é dado por $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, onde $A = 1\ \text{s}^{-1}$. Mostre que as linhas de corrente para esse escoamento são hipérboles retangulares, $xy = C$. Obtenha uma expressão geral para a aceleração de uma partícula fluida nesse campo de velocidade. Calcule a aceleração das partículas fluidas nos pontos $(x, y) = (1/2, 2), (1, 1)$ e $(2, 1/2)$, onde x e y são medidos em metros. Trace as linhas de corrente que correspondem a $C = 0$, 1 e 2 m² e mostre os vetores aceleração no esboço das linhas de corrente.

5.50 Um escoamento é descrito pelo campo de velocidade $\vec{V} = (Ax + B)\hat{i} - Ay\hat{j}$, onde $A = 10\ \text{s}^{-1}$, $B = 3$ pés·s^{-1} e as coordenadas são medidas em pés. Trata-se de um possível escoamento incompressível? Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (3, 2)$. Trace algumas linhas de corrente no plano xy e mostre o vetor aceleração no esboço.

5.51 Um campo de velocidade é representado pela expressão $\vec{V} = (Ax - B)\hat{i} + Cy\hat{j} + Dt\hat{k}$, onde $A = 2\ \text{s}^{-1}$, $B = 4\ \text{m·s}^{-1}$, $D = 5\ \text{m·s}^{-2}$ e as coordenadas são medidas em metros. Encontre os valores apropriados de C para que o escoamento seja incompressível. Calcule a aceleração de uma partícula fluida localizada no ponto $(x, y) = (3, 2)$. Esboce as linhas de corrente do escoamento no plano xy.

5.52 Um campo de velocidades é representado pela expressão $\vec{V} = (Ax - B)\hat{i} - Ay\hat{j}$, onde $A = 0{,}2\ \text{s}^{-1}$, $B = 0{,}6\ \text{m·s}^{-1}$ e as coordenadas são expressas em metros. Obtenha uma expressão geral para a aceleração de uma partícula fluida nesse campo de velocidades. Calcule a aceleração das partículas fluidas nos pontos $(x, y) = (0, 4/3), (1, 2)$ e $(2, 4)$. Trace um gráfico contendo algumas linhas de corrente no plano xy. Mostre os vetores aceleração nas linhas de corrente do gráfico.

5.53 Mostre que o campo de velocidades do Problema 2.11 representa um possível campo de escoamento incompressível. Determine e trace um gráfico da linha de corrente passando pelo ponto $(x, y) = (2, 4)$ com $t = 1{,}5$ s. Para a partícula no mesmo ponto e tempo, mostre no gráfico o vetor velocidade e os vetores representando as acelerações local, convectiva e total.

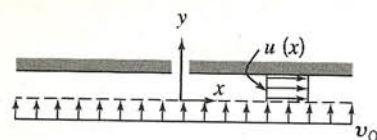
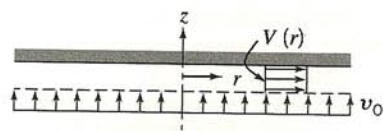
5.54 Um perfil de velocidade linear aproximado foi usado no Problema 5.9 para modelar uma camada limite laminar incompressível numa placa plana. Obtenha, para esse perfil, expressões para as componentes x e y da aceleração de uma partícula fluida na camada limite. Localize as magnitudes máximas das acelerações em x e y. Calcule a razão entre a magnitude máxima em x com relação a magnitude máxima em y, para as condições do Problema 5.9.

5.55 Um perfil de velocidade parabólico aproximado foi usado no Problema 5.10 para modelar uma camada limite laminar incompressível numa placa plana. Para esse perfil, mostre que a componente x da aceleração de uma partícula fluida dentro da camada limite pode ser escrita como

$$a_x = -\frac{U^2}{x}\left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right]$$

Trace um gráfico adimensional de a_x em função de y/δ. Para um dado x, encontre o valor de y/δ para o qual a_x é um máximo. Calcule o a_x máximo, se $U = 8{,}7$ m/s e $x = 0{,}5$ m.

5.56 Um perfil de velocidade senoidal aproximado foi usado no Problema 5.11 para modelar uma camada limite laminar incompressível numa placa plana. Obtenha, para esse perfil, uma expressão para as componentes x e y da aceleração de uma partícula fluida na camada limite. Para $U = 8{,}7$ m/s e $x = 0{,}5$ m, trace um gráfico dos valores de a_x e a_y em função de y/δ. Determine seus valores máximos e a localização onde esses máximos ocorrem.

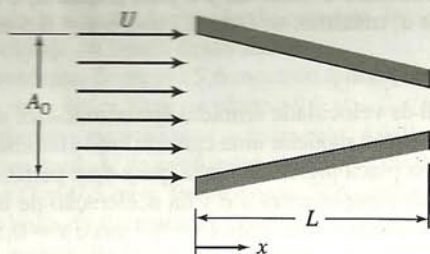
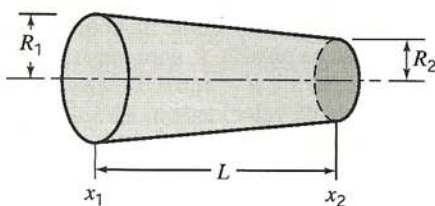
5.57 O ar escoa na fresta estreita, de altura h, entre duas placas paralelas muito próximas, através de uma superfície porosa, conforme mostrado. Use um volume de controle com superfície externa localizada na posição x, para mostrar que a velocidade uniforme na direção x é $u = v_0 x/h$. Determine uma expressão para a componente da velocidade na direção y. Avalie a aceleração de uma partícula fluida na fresta.

P5.57

P5.58

5.58 O ar escoa na estreita fresta, de altura h, entre dois discos paralelos muito próximos, através de uma superfície porosa, conforme mostrado. Use um volume de controle com superfície externa localizada na posição r, para mostrar que a velocidade uniforme na direção r é $V = v_0 r/2h$. Determine uma expressão para a componente da velocidade na direção z ($v_0 \ll V$). Avalie as componentes da aceleração de uma partícula fluida na fresta.

5.59 O campo de velocidade para o escoamento em regime permanente, não viscoso, da esquerda para a direita, sobre um cilindro circular de raio R é dado por

$$\vec{V} = U\cos\theta\left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\hat{e}_r - U\,\text{sen}\,\theta\left[1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\hat{e}_\theta$$

Obtenha expressões para a aceleração de uma partícula fluida movendo-se ao longo da linha de corrente de estagnação ($\theta = \pi$) e para a aceleração ao longo da superfície do cilindro ($r = R$). Trace um gráfico de a_r como função de R/r para $\theta = \pi$ e como função de θ para $r = R$; trace um gráfico de a_θ como função de θ para $r = R$. Comente esses gráficos. Determine os locais em que essas acelerações atingem valores máximo e mínimo.

5.60 Considere o escoamento incompressível de um fluido através de um bocal, conforme mostrado. A área do bocal é dada por $A = A_0(1 - bx)$ e a velocidade de entrada varia de acordo com $U = C(1 + at)$, onde $A_0 = 1$ pé², $L = 4$ pés, $b = 0{,}1$ pé⁻¹, $a = 2$ s⁻¹ e $C = 10$ pés/s. Determine a aceleração de uma partícula fluida na linha de centro em $x = L/2$ para $t = 0$ a $0{,}5$ s. Trace um gráfico de a_x na linha de centro em função de x/L para $t = 0$ e $0{,}5$ s.

P5.60

P5.61

5.61 Considere o escoamento unidimensional incompressível através do duto circular mostrado. A velocidade na seção ① é dada por $U = U_0 + U_1$ sen ωt, onde $U_0 = 20$ m/s, $U_1 = 2$ m/s e $\omega = 0{,}3$ rad/s. As dimensões do duto são $L = 1$ m, $R_1 = 0{,}2$ m e $R_2 = 0{,}1$ m. Determine a aceleração da partícula na saída do duto. Trace um gráfico dos resultados como uma função do tempo para um ciclo completo.

5.62 Considere novamente o escoamento permanente do campo de velocidades bidimensional do Problema 5.49. Obtenha expressões para as coordenadas da partícula, $x_p = f_1(t)$ e $y_p = f_2(t)$, como funções do tempo e da posição inicial da partícula, (x_0, y_0), em $t = 0$. Determine o tempo necessário para uma partícula ir da posição inicial, $(x_0, y_0) = (1/2, 2)$, até as posições $(x, y) = (1, 1)$ e $(2, 1/2)$. Compare as acelerações da partícula determinadas pela diferenciação de $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com aquelas obtidas no Problema 5.49.

5.63 Estenda o Problema 5.52 para determinar as componentes normal e tangencial da aceleração em uma linha de corrente. Mostre os vetores aceleração no gráfico da linha de corrente.

5.64 Expanda $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$ em coordenadas cilíndricas pela substituição direta do vetor velocidade para obter a aceleração convectiva de uma partícula fluida (lembre-se da sugestão do rodapé 1 deste capítulo). Verifique os resultados dados nas Eqs. 5.12.

5.65 Um escoamento é representado pelo campo de velocidade $\vec{V} = 10x\hat{i} - 10y\hat{j} + 30\hat{k}$. Determine se o campo é (a) um possível escoamento incompressível e (b) irrotacional.

5.66 Um escoamento é representado pelo campo de velocidade $\vec{V} = (4x^2 + 3y)\hat{i} + (3x - 2y)\hat{j}$. Determine se o campo é (a) um possível escoamento incompressível e (b) irrotacional.

5.67 Considere novamente o perfil de velocidade senoidal usado para modelar a componente x da velocidade numa camada limite no Problema 5.11. Despreze a componente vertical da velocidade. Avalie a circulação no contorno limitado por $x = 0{,}4$ m, $x = 0{,}6$ m, $y = 0$ e $y = 8$ mm. Quais seriam os resultados dessa avaliação se fosse feita 0,2 m mais a jusante? Admita $U = 0{,}5$ m/s.

5.68 Considere o campo de velocidade para escoamento numa "esquina" retangular, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, com $A = 0{,}3$ s⁻¹, como no Problema-Exemplo 5.8. Avalie a circulação no quadrado unitário do Problema-Exemplo 5.8.

5.69 Considere o campo de escoamento bidimensional incompressível no qual $u = Axy$ e $v = By^2$, onde $A = 1$ m⁻¹·s⁻¹, $B = -1/2$ m⁻¹·s⁻¹ e as coordenadas são medidas em metros. Mostre que o campo de velocidades representa um possível escoamento incompressível. Determine a rotação no ponto $(x, y) = (1, 1)$. Avalie a circulação na "curva" limitada por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e $x = 0$.

***5.70** Considere o campo de escoamento representado pela função de corrente $\psi = 10xy + 17$. Trata-se de um possível escoamento bidimensional incompressível? O escoamento é irrotacional?

***5.71** Considere um campo de velocidade para movimento paralelo ao eixo x com cisalhamento constante. A razão de cisalhamento é $du/dy = A$, onde $A = 0{,}1$ s⁻¹. Obtenha uma expressão para o campo de velocidade, $\vec{V}$. Calcule a taxa de rotação. Avalie a função de corrente para este campo de escoamento.

***5.72** Considere o campo de velocidade dado por $\vec{V} = Axy\hat{i} + By^2\hat{j}$, onde $A = 4$ m⁻¹·s⁻¹, $B = -2$ m⁻¹·s⁻¹ e as coordenadas são medidas em metros. Determine a rotação do fluido. Avalie a circulação na "curva" limitada por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e $x = 0$. Obtenha uma expressão para a função de corrente. Trace um gráfico de várias linhas de corrente no primeiro quadrante.

***5.73** Considere o escoamento representado pelo campo de velocidade $\vec{V} = (Ay + B)\hat{i} + Ax\hat{j}$, onde $A = 6$ s⁻¹, $B = 3$ m·s⁻¹ e as coordenadas são medidas em metros. Obtenha uma expressão para a função de corrente. Trace um gráfico contendo várias linhas de corrente (incluindo a linha de corrente de estagnação) no primeiro quadrante. Avalie a circulação na "curva" limitada por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e $x = 0$.

***5.74** Considere o campo de escoamento representado pela função de corrente $\psi = Axy + Ay^2$, onde $A = 1$ s⁻¹. Mostre que essa função representa um possível campo de escoamento incompressível. Avalie a rotação do escoamento. Trace um gráfico contendo algumas linhas de corrente no meio plano superior.

5.75 Considere novamente o escoamento viscométrico do Problema-Exemplo 5.7. Avalie a taxa média de rotação de um par de segmentos de retas perpendiculares, orientados a ±45° em relação ao eixo x. Mostre que o resultado é o mesmo do exemplo.

5.76 Considere o escoamento por pressão entre placas paralelas, estacionárias, separadas da distância b. A coordenada y é medida a partir da placa inferior. O campo de velocidade é dado por $u =$

*Estes problemas exigem material de seções que podem ser omitidas sem haver perda de continuidade no material do texto.

$U(y/b)[1 - (y/b)]$. Obtenha uma expressão para a circulação no contorno fechado de altura h e comprimento L. Avalie para $h = b/2$ e para $h = b$. Mostre que o mesmo resultado é obtido pela integral de área do Teorema de Stokes (Eq. 5.18).

***5.77** Um campo de escoamento é representado pela função de corrente $\psi = x^2 - y^2$. Determine o campo de velocidade correspondente. Mostre que esse campo de escoamento é irrotacional. Trace diversas linhas de corrente e ilustre o campo de velocidade.

***5.78** O campo de velocidade perto do núcleo de um furacão pode ser aproximado por

$$\vec{V} = -\frac{q}{2\pi r}\hat{e}_r + \frac{K}{2\pi r}\hat{e}_\theta$$

Trata-se de um campo de escoamento irrotacional? Obtenha a função de corrente para este escoamento.

5.79 O perfil de velocidade para o escoamento inteiramente desenvolvido num tubo circular é $V_z = V_{máx}[1 - (r/R)^2]$. Avalie as taxas de deformação linear e angular desse escoamento. Obtenha uma expressão para o vetor vorticidade, $\vec{\zeta}$.

5.80 Considere o escoamento por pressão entre placas paralelas estacionárias separadas da distância $2b$. A coordenada y é medida a partir da linha de centro do espaço entre elas. O campo de velocidade é dado por $u = u_{máx}[1 - (y/b)^2]$. Avalie as taxas de deformação linear e angular. Obtenha uma expressão para o vetor vorticidade, $\vec{\zeta}$. Determine o local onde a vorticidade é máxima.

5.81 Um perfil de velocidade linear foi usado para modelar o escoamento numa camada limite laminar incompressível no Problema 5.9. Expresse a rotação de uma partícula fluida. Localize a taxa máxima de rotação. Expresse a taxa de deformação angular de uma partícula fluida. Localize a taxa máxima de deformação angular. Expresse as taxas de deformação linear de uma partícula fluida. Localize as taxas máximas de deformação linear. Expresse a força de cisalhamento por unidade de volume na direção x. Localize a força de cisalhamento máxima por unidade de volume; interprete esse resultado.

5.82 A componente x da velocidade numa camada limite laminar na água é aproximada por $u = U \operatorname{sen}(\pi y/2\delta)$, onde $U = 3$ m/s e $\delta = 2$ mm. A componente y da velocidade é muito menor do que u. Obtenha uma expressão para a força de cisalhamento total sobre um elemento fluido, por unidade de volume, na direção x. Calcule o seu valor máximo para esse escoamento.

5.83 O Problema 4.23 deu o perfil de velocidade para um escoamento laminar completamente desenvolvido num tubo circular como $u = u_{máx}[1 - (r/R)^2]$. Obtenha uma expressão para a força de cisalhamento por unidade de volume na direção x. Avalie o seu valor máximo para as condições do Problema 4.23.

*Estes problemas exigem material de seções que podem ser omitidas sem haver perda de continuidade no material do texto.

Capítulo 6

ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL DE FLUIDOS NÃO VISCOSOS

Todos os fluidos reais possuem viscosidade. Entretanto, em muitos casos de escoamento é razoável desprezar os efeitos da viscosidade. (Isso é análogo a desprezar, em algumas situações, as forças de atrito na análise de sistemas sólidos.) Conseqüentemente, é útil investigar a dinâmica de um fluido ideal que seja incompressível e tenha viscosidade nula. A análise dos movimentos dos fluidos ideais é mais simples do que aquela de fluidos viscosos porque não há a presença de tensões de cisalhamento. As tensões normais são as únicas que devem ser consideradas na análise. Para um fluido não viscoso em movimento, a tensão normal num ponto é a mesma em todas as direções (é uma grandeza escalar). A tensão normal num escoamento não viscoso é o valor negativo da pressão termodinâmica, $\sigma_{nn} = -p$. (Esse resultado é consistente com as Eqs. 5.25 para $\mu = 0$.)

6.1 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO PARA ESCOAMENTO SEM ATRITO: AS EQUAÇÕES DE EULER

As equações do movimento para escoamento sem atrito, chamadas equações de Euler, podem ser obtidas das equações gerais do movimento (Eqs. 5.24). Como no escoamento sem atrito não pode haver tensões de cisalhamento e a tensão normal é o valor negativo da pressão termodinâmica, segue-se que as equações do movimento são, nesse caso:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad (6.1a)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad (6.1b)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (6.1c)$$

Também podemos escrever essas equações como uma só equação vetorial

$$\rho\vec{g} - \nabla p = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right)$$

Alternativamente, essa equação pode ser escrita como

$$\rho\vec{g} - \nabla p = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\right) \quad (6.2)$$

ou

$$\rho\vec{g} - \nabla p = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt} \quad (6.3)$$

Se a coordenada z for orientada verticalmente para baixo, então $\rho\vec{g} = -\rho g\hat{k}$.

Em coordenadas cilíndricas, as equações na forma de componentes e com a gravidade como a única força de massa são

$$\rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} = \rho a_r = \\ = \rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r}\right) \quad (6.4a)$$

$$\rho g_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho a_\theta = \\ = \rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r}\right) \quad (6.4b)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho a_z = \\ = \rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \quad (6.4c)$$

Se o eixo z for orientado verticalmente para cima, então $g_r = g_\theta = 0$ e $g_z = -g$.

No Cap. 3 concluímos que se um fluido for acelerado de forma que não haja movimento entre camadas adjacentes, ele se move sem deformação e, por conseguinte, não ocorrem tensões de cisalhamento. Pudemos determinar a variação de pressão no fluido pela aplicação das equações do movimento a um corpo livre apropriado. Consideramos dois casos específicos. Para o caso de aceleração retilínea, deduzimos a equação diferencial do movimento, Eq. 3.16; no Problema-Exemplo 3.8, aplicamos a equação a um tanque de água movendo-se como um corpo rígido. No Problema-Exemplo 3.9, consideramos o caso de um líquido submetido a rotação constante em torno de um eixo vertical. Deixamos como exercício a tarefa de mostrar que o empre-

go das equações de Euler na resolução dos Problemas-Exemplo 3.8 e 3.9 conduz a resultados idênticos aos obtidos anteriormente.

6.2 EQUAÇÕES DE EULER EM COORDENADAS DE LINHA DE CORRENTE

No Cap. 2 assinalamos que as linhas de corrente, desenhadas tangentes aos vetores velocidade em cada ponto do campo de escoamento, fornecem uma representação gráfica conveniente. No escoamento em regime permanente, uma partícula fluida mover-se-á ao longo de uma linha de corrente porque, para esse tipo de escoamento, as linhas de trajetória e de corrente coincidem. Assim, ao descrever o movimento de uma partícula fluida num escoamento em regime permanente, a distância ao longo de uma linha de corrente é uma coordenada lógica para se usar ao escrever as equações do movimento. "Coordenadas de linha de corrente" também podem ser empregadas para descrever escoamento em regime transiente. As linhas de corrente no escoamento não permanente dão uma representação gráfica do campo de velocidade instantâneo.

Simplificando, considere o escoamento no plano yz mostrado na Fig. 6.1. As equações do movimento deverão ser escritas em termos da coordenada s, a distância ao longo de uma linha de corrente, e da coordenada n, a distância normal à linha de corrente. A pressão no centro do elemento fluido é p. Se aplicarmos a segunda lei de Newton na direção da linha corrente (a direção de s) ao elemento fluido de volume $ds\,dn\,dx$, então, desprezando as forças viscosas, obtemos

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dn\,dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dn\,dx -$$

$$- \rho g \operatorname{sen}\beta\, ds\,dn\,dx = \rho a_s\, ds\,dn\,dx$$

onde β é o ângulo entre a tangente à linha de corrente e a horizontal, e a_s é a aceleração da partícula ao longo da linha de corrente. Simplificando a equação, obtemos

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \operatorname{sen}\beta = \rho a_s$$

Como sen $\beta = \dfrac{\partial z}{\partial s}$, podemos escrever

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = a_s$$

Ao longo de qualquer linha de corrente $V = V(s, t)$, e a aceleração total de uma partícula fluida na direção da linha de corrente é dada por

$$a_s = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}$$

A equação de Euler na direção da linha de corrente com o eixo z dirigido verticalmente para cima é então

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} \tag{6.5a}$$

Para escoamento em regime permanente, e desprezando forças de massa, a equação de Euler na direção da linha de corrente reduz-se a

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = -V\frac{\partial V}{\partial s} \tag{6.5b}$$

a qual indica que uma diminuição na velocidade é acompanhada por um aumento na pressão, e vice-versa.[1]

Para obter a equação de Euler numa direção normal às linhas de corrente, aplicamos a segunda lei de Newton na direção n ao elemento fluido. Novamente, desprezando as forças viscosas, obtemos

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right)ds\,dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right)ds\,dx -$$

$$- \rho g \cos\beta\, dn\,dx\,ds = \rho a_n\, dn\,dx\,ds$$

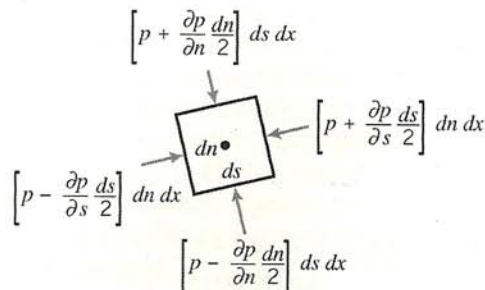
onde β é o angulo entre a direção n e a vertical, e a_n é a aceleração da partícula fluida na direção n. Simplificando a equação, obtemos

$$-\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g \cos\beta = \rho a_n$$

Como $\cos\beta = \dfrac{\partial z}{\partial n}$, escrevemos

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} - g\frac{\partial z}{\partial n} = a_n$$

[1] O relacionamento entre variações na pressão e na velocidade na direção da linha de corrente para escoamento em regime permanente incompressível e não viscoso é ilustrado no filme da NCFMF, *Pressure Fields and Fluid Acceleration.*

Fig 6.1 Partícula de fluido movendo-se ao longo de uma linha de corrente.

A aceleração normal do elemento fluido é dirigida para o centro de curvatura da linha de corrente, ou seja, no sentido n negativo; assim, no sistema de coordenadas da Fig. 6.1, a familiar aceleração centrípeta é escrita

$$a_n = \frac{-V^2}{R}$$

para escoamento em regime permanente, onde R é o raio de curvatura da linha de corrente. Então, a equação de Euler normal à linha de corrente é escrita para escoamento em regime permanente como

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \tag{6.6a}$$

Para escoamento em regime permanente num plano horizontal, a equação de Euler normal a uma linha de corrente torna-se

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \tag{6.6b}$$

A Eq. 6.6b indica que a pressão aumenta no sentido para fora, partindo do centro de curvatura das linhas de corrente.[2] Em regiões onde as linhas de corrente são retas, o raio de curvatura R é infinito e não há variação de pressão numa direção normal às linhas de corrente.

[2]O efeito da curvatura da linha de corrente sobre o gradiente de pressão normal à linha de corrente é ilustrado no filme NCFMF, *Pressure Fields and Fluid Acceleration.*

EXEMPLO 6.1 — Escoamento numa Curva

A vazão de ar nas condições padrões, num duto plano, deve ser determinada pela instalação de tomadas de pressão numa curva. O duto tem 0,3 m de profundidade e 0,1 m de largura. O raio interno da curva é 0,25 m. Se a diferença de pressão medida entre as tomadas for de 40 mm de água, calcule a vazão volumétrica aproximada.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.1

DADOS: Escoamento através de um duto curvo, como mostrado.

$$p_2 - p_1 = \rho_{H_2O}g\,\Delta h$$

onde Δh = 40 mm de H_2O. O ar está na CNTP.

DETERMINAR: A vazão volumétrica, Q.

SOLUÇÃO:

Aplique a equação de Euler para a componente n através das linhas de corrente do escoamento.

Equação básica: $\dfrac{\partial p}{\partial r} = \dfrac{\rho V^2}{r}$

Considerações: (1) Escoamento sem atrito
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento uniforme na seção de medição

Para esse escoamento, $p = p(r)$, então,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr} = \frac{\rho V^2}{r}$$

ou

$$dp = \rho V^2 \frac{dr}{r}$$

Integrando dá

$$p_2 - p_1 = \rho V^2 \ln r\Big]_{r_1}^{r_2} = \rho V^2 \ln\frac{r_2}{r_1}$$

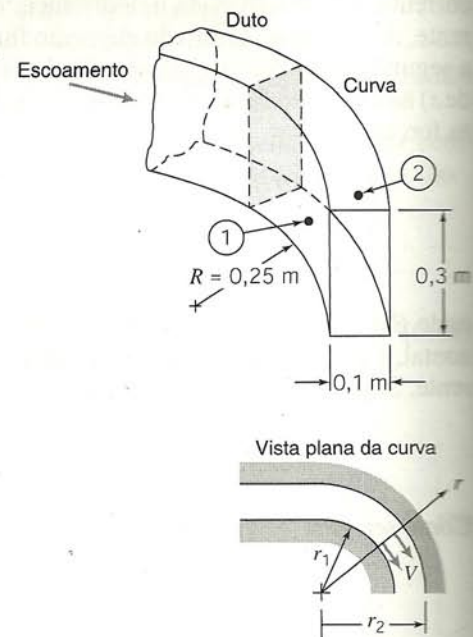
e, portanto,

$$V = \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho \ln(r_2/r_1)}\right]^{1/2}$$

Mas, $\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_{H_2O}g\,\Delta h$, logo $V = \left[\dfrac{\rho_{H_2O}g\,\Delta h}{\rho \ln(r_2/r_1)}\right]^{1/2}$

Substituindo os valores numéricos,

$$V = \left[999\,\frac{kg}{m^3} \times 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \times 0{,}04\text{ m} \times \frac{m^3}{1{,}23\text{ kg}} \times \frac{1}{\ln(0{,}35\text{ m}/0{,}25\text{ m})}\right]^{1/2}$$

$$V = 30{,}8\text{ m/s}$$

Para escoamento uniforme

$$Q = VA = 30{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}1\ \text{m} \times 0{,}3\ \text{m}$$

$$Q = 0{,}924\ \text{m}^3/\text{s}$$

Q

Em aplicações reais, o perfil de velocidades em um duto curvo não será uniforme. Ele tende para um vórtice livre (irrotacional) em que a velocidade varia inversamente com o raio (Seção 6.7.4).

6.3 EQUAÇÃO DE BERNOULLI — INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER AO LONGO DE UMA LINHA DE CORRENTE PARA ESCOAMENTO EM REGIME PERMANENTE

Apresentamos as equações da quantidade de movimento e da continuidade na forma diferencial. Teoricamente, para um escoamento incompressível não viscoso, essas equações podem ser resolvidas de modo a fornecer os campos completos de velocidade e de pressão. (Se a massa específica não for constante, uma relação termodinâmica adicional para a massa específica será necessária.) Embora na teoria as equações possam ser resolvidas, a solução para um campo de escoamento particular pode ser muito complexa. Contudo, podemos integrar a equação de Euler prontamente para escoamento em regime permanente ao longo de uma linha de corrente. A análise de volume de controle diferencial da Seção 4.4.1 conduziu a uma equação diferencial (Eq. 4.24) que, quando integrada, levou a uma forma da equação de Bernoulli. A fim de dar um claro entendimento físico a respeito das restrições aos resultados, duas deduções adicionais da equação de Bernoulli são apresentadas.

6.3.1 Dedução com o Emprego de Coordenadas de Linha de Corrente

A equação de Euler para escoamento em regime permanente ao longo de uma linha de corrente (a partir da Eq. 6.5a) é dada por

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = V\frac{\partial V}{\partial s} \qquad (6.7)$$

Se uma partícula fluida move-se de uma distância, ds, ao longo de uma linha de corrente, então,

$\frac{\partial p}{\partial s}ds = dp$ (a variação na pressão ao longo de s)

$\frac{\partial z}{\partial s}ds = dz$ (a variação na elevação ao longo de s)

$\frac{\partial V}{\partial s}ds = dV$ (a variação na velocidade ao longo de s)

Assim, após multiplicar a Eq. 6.7 por ds, podemos escrever

$$-\frac{dp}{\rho} - g\,dz = V\,dV \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{\rho} + V\,dV + g\,dz = 0 \text{ (ao longo de } s)$$

A integração dessa equação dá

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \quad \text{(ao longo de } s) \qquad (6.8)$$

Antes que a Eq. 6.8 possa ser aplicada, devemos especificar a relação entre a pressão e a massa específica. Para o caso especial de escoamento incompressível, ρ = constante e a Eq. 6.8 torna-se a equação de Bernoulli,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad (6.9)$$

Restrições: (1) Escoamento em regime permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento sem atrito
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente

A equação de Bernoulli é um instrumento útil e poderoso porque ela relaciona as variações de pressão com as de velocidade e elevação ao longo de uma linha de corrente. Entretanto, ela dá resultados corretos apenas se aplicada a uma situação de escoamento onde todas as quatro restrições são razoáveis. Mantenha-as sempre em mente toda vez que considerar a utilização da equação de Bernoulli. (Em geral, a constante de Bernoulli na Eq. 6.9 tem valores diferentes ao longo de linhas de corrente diferentes.[3])

*6.3.2 Dedução com o Emprego de Coordenadas Retangulares

A forma vetorial da equação de Euler, Eq. 6.3, também pode ser integrada ao longo de uma linha de corrente. Restringiremos a dedução ao escoamento em regime permanente; assim, o resultado final do nosso esforço será a Eq. 6.8.

Para escoamento em regime permanente, a equação de Euler em coordenadas retangulares pode ser expressa como

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\hat{k} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} \qquad (6.10)$$

Para escoamento em regime permanente, o campo de velocidade é dado por $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$. As linhas de corrente são linhas traçadas no campo de escoamento tangentes ao vetor velocidade em cada ponto. Lembre-se novamente que, para escoamento em regime permanente, as linhas de corrente, de trajetória e de filete coincidem. O movimento de uma partícula ao longo de uma linha de corrente é governado pela Eq. 6.10. No intervalo de tempo dt a partícula move-se de uma distância $d\vec{s}$, ao longo da linha de corrente.

[3]Para o caso de escoamento irrotacional, a constante tem um único valor através de todo o campo de escoamento (Seção 6.6.1).

*Essa seção pode ser omitida sem haver perda de continuidade no material do texto.

Se tomarmos o produto escalar dos termos da Eq. 6.10 com a distância $d\vec{s}$ ao longo da linha de corrente, obteremos uma equação escalar relacionando a pressão, a velocidade e a elevação ao longo da linha de corrente. Tomando o produto escalar de $d\vec{s}$ com a Eq. 6.10, obtemos

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{s} - g\hat{k} \cdot d\vec{s} = (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \cdot d\vec{s} \qquad (6.11)$$

onde

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

Avaliemos agora cada um dos três termos na Eq. 6.11

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho}\left[\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right] \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}]$$

$$= -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right] \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho}dp \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

e

$$-g\hat{k} \cdot d\vec{s} = -g\hat{k} \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}]$$
$$= -g\,dz \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

Usando uma identidade vetorial,[4] podemos escrever o terceiro termo como

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \cdot d\vec{s} = [\tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})] \cdot d\vec{s}$$
$$= \{\tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V})\} \cdot d\vec{s} - \{\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})\} \cdot d\vec{s}$$

O último termo no lado direito dessa equação é zero, uma vez que $\vec{V}$ é paralelo a $d\vec{s}$. Em conseqüência,

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \cdot d\vec{s} = \tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) \cdot d\vec{s} = \tfrac{1}{2}\nabla(V^2) \cdot d\vec{s} \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{i}\frac{\partial V^2}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V^2}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V^2}{\partial z}\right] \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V^2}{\partial x}dx + \frac{\partial V^2}{\partial y}dy + \frac{\partial V^2}{\partial z}dz\right]$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \cdot d\vec{s} = \tfrac{1}{2}d(V^2) \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

Substituindo os três termos na Eq. 6.11 resulta

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(V^2) + g\,dz = 0 \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

Integrando essa equação, obtemos

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

Se a massa específica for constante, obtemos a equação de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Como esperado, vemos que as duas últimas equações são idênticas às Eqs. 6.8 e 6.9 deduzidas anteriormente usando coordenadas de linha de corrente. A equação de Bernoulli, deduzida com o emprego de coordenadas retangulares, está ainda sujeita às restrições: (1) escoamento em regime permanente, (2) escoamento incompressível, (3) escoamento sem atrito e (4) escoamento ao longo de uma linha de corrente.

6.3.3 Pressões Estática, de Estagnação e Dinâmica

A pressão, p, que utilizamos na dedução da equação de Bernoulli, Eq. 6.9, é a pressão termodinâmica; é comumente chamada de pressão estática. É aquela pressão que seria medida por um instrumento movendo-se com o escoamento. Contudo, tal medição é bastante difícil de realizar numa situação prática! Como medimos a pressão estática experimentalmente?

Na Seção 6.2 mostramos que não havia variação de pressão numa direção normal às linhas de corrente retilíneas. Esse fato torna possível medir a pressão estática num fluido em movimento usando uma "tomada" de pressão na parede do duto, colocada numa região onde as linhas de corrente são retilíneas, conforme mostrado na Fig. 6.2*a*. A tomada de pressão é um pequeno orifício cuidadosamente perfurado na parede, com o seu eixo perpendicular à superfície. Se o orifício for perpendicular à parede do duto e isento de rebarbas, medições precisas da pressão estática poderão ser feitas pela sua conexão a um adequado instrumento medidor de pressão [1].

Numa corrente de fluido longe da parede, ou onde as linhas de corrente são curvilíneas, medições precisas da pressão estática podem ser feitas pelo emprego cuidadoso de uma sonda de pressão estática, mostrada na Fig. 6.2*b*. Tais sondas

Fig. 6.2 Medição de pressão estática.

[4] A identidade vetorial

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

pode ser verificada expandindo-se cada lado em componentes.

devem ser projetadas de modo que os orifícios de medida sejam colocados corretamente em relação à ponta e à haste da sonda, a fim de evitar resultados errôneos [2]. Em uso, a seção medidora deve estar alinhada com a direção do escoamento local.

Sondas de pressão estática, como a mostrada na Fig. 6.2*b*, e numa variedade de outras formas encontram-se disponíveis no comércio em tamanhos tão pequenos quanto 1,5 mm (1/16 pol.) de diâmetro [3].

A pressão de estagnação é obtida quando um fluido em movimento é desacelerado até a velocidade zero por meio de um processo sem atrito. No escoamento incompressível, a equação de Bernoulli pode ser usada para relacionar variações na velocidade e na pressão ao longo de uma linha de corrente para tal processo. Desprezando diferenças de elevação, a Eq. 6.9 torna-se

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$$

Se a pressão estática for p num ponto do escoamento no qual a velocidade é V, então a pressão de estagnação, p_0, onde a velocidade de estagnação, V_0, é zero, pode ser calculada de

$$\frac{p_0}{\rho} + \overset{=0}{\cancel{\frac{V_0^2}{2}}} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

ou

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \qquad (6.12)$$

A Eq. 6.12 é um enunciado matemático da definição de pressão de estagnação válido para escoamento incompressível. O termo $\frac{1}{2}\rho V^2$ é geralmente chamado de *pressão dinâmica*. Resolvendo para a pressão dinâmica dá

$$\frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 - p$$

e para a velocidade

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \qquad (6.13)$$

Então, se a pressão de estagnação e a pressão estática puderem ser medidas num ponto, a Eq. 6.13 dará a velocidade local do escoamento.

A pressão de estagnação é medida no laboratório usando-se uma sonda com um orifício que fica voltado diretamente para montante, conforme mostrado na Fig. 6.3. Tal instrumento é chamado de sonda de pressão de estagnação ou tubo de pitot. De novo, a seção de medição deve ficar alinhada com a direção do escoamento local.

Vimos que a pressão estática num ponto pode ser medida com uma tomada de pressão estática ou com uma sonda (Fig. 6.2). Se conhecermos a pressão de estagnação no mesmo ponto, então a velocidade do escoamento poderá ser calculada pela Eq. 6.13. Duas possíveis configurações experimentais são mostradas na Fig. 6.4.

Na Fig. 6.4*a*, a pressão estática correspondente ao ponto A é lida da tomada de pressão na parede. A pressão de estagnação é medida diretamente em A pelo tubo de carga total, conforme mostrado. (A haste do tubo de carga total é colocada à jusante em relação ao ponto de medição, a fim de minimizar a perturbação do escoamento local.)

Duas sondas são combinadas com freqüência, como no tubo pitot-estática mostrado na Fig. 6.4*b*. O tubo interno é usado para medir a pressão de estagnação no ponto B, enquanto a pressão estática em C é medida pelos pequenos orifícios no tubo externo. Em campos de escoamento onde a variação de pressão estática no sentido do fluxo é pequena, a combinação mostrada pode ser empregada para avaliar a velocidade no ponto B do escoamento, admitindo que $p_B = p_C$, e usando a Eq. 6.13. (Note que, quando $p_B \neq p_C$, esse procedimento fornecerá resultados errôneos.)

Lembre-se de que a equação de Bernoulli aplica-se somente a escoamento incompressível (número de Mach, $M \leq 0{,}3$). A definição e o cálculo da pressão de estagnação para escoamento compressível serão discutidos na Seção 11.3.1.

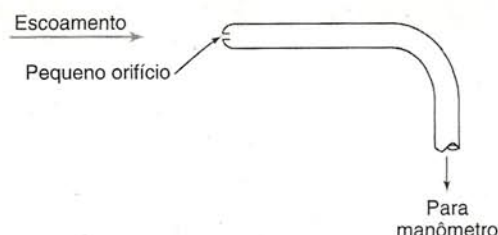



Fig. 6.3 Medição da pressão de estagnação.

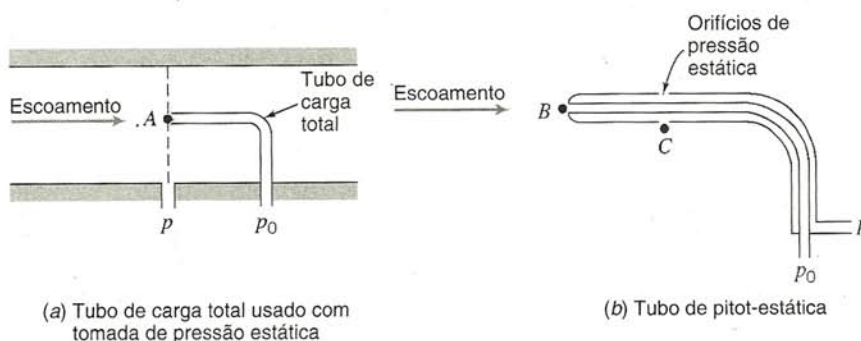



Fig. 6.4 Medições simultâneas das pressões de estagnação e estática.

EXEMPLO 6.2 — Tubo de Pitot

Um tubo de pitot é inserido num escoamento de ar (na CNTP) a fim de medir a velocidade. O tubo é introduzido de forma que aponta para montante e a pressão sentida pela sonda é a de estagnação. A pressão estática é medida no mesmo ponto do escoamento, usando uma tomada de pressão na parede. Se a diferença de pressão é de 30 mm de mercúrio, determine a velocidade do escoamento.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.2

DADOS: Um tubo de pitot inserido num escoamento conforme mostrado. O fluido é o ar, e o líquido do manômetro é mercúrio.

DETERMINAR: A velocidade do escoamento.

Escoamento de ar

30 mm

Mercúrio

SOLUÇÃO:

Equação básica: $\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=\text{constante}$

Considerações: (1) Escoamento em regime permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(4) Desaceleração sem atrito ao longo da linha de corrente de estagnação

Escrevendo a equação de Bernoulli ao longo da linha de corrente de estagnação (com $\Delta z = 0$) obtemos

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

p_0 é a pressão de estagnação na abertura do tubo, onde a velocidade foi reduzida a zero, sem atrito. Explicitando V, obtém-se

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_{ar}}}$$

A partir do diagrama,

$$p_0 - p = \rho_{Hg}gh = \rho_{H_2O}gh(SG_{Hg})$$

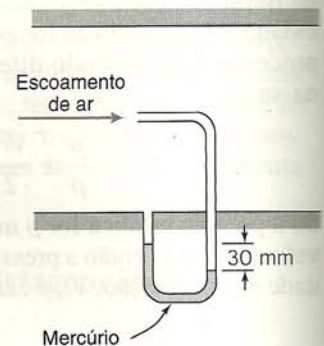
e

$$V = \sqrt{\frac{2\rho_{H_2O}gh(SG_{Hg})}{\rho_{ar}}}$$

$$= \sqrt{2 \times 1000\,\frac{kg}{m^3} \times 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \times 30\text{ mm} \times \frac{m}{1000\text{ mm}} \times 13{,}6 \times \frac{m^3}{1{,}23\text{ kg}}}$$

$$V = 80{,}8\text{ m/s} \qquad V$$

Para $T = 20°C$, a velocidade do som no ar é 343 m/s. Portanto, $M = 0{,}236$ e a hipótese de escoamento incompressível é válida.

{Esse problema ilustra o emprego de um tubo de pitot para determinar a velocidade num ponto.}

6.3.4 Aplicações

A equação de Bernoulli pode ser aplicada entre dois pontos quaisquer numa linha de corrente, desde que as outras três restrições sejam atendidas. O resultado é

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \qquad (6.14)$$

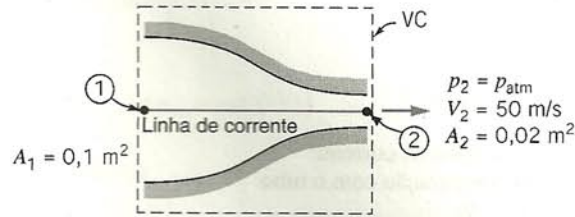
onde os índices 1 e 2 representam dois pontos quaisquer numa linha de corrente. As aplicações das Eqs. 6.9 e 6.14 a problemas típicos de escoamento são ilustradas nos Problemas-Exemplo 6.3 a 6.5.

Em algumas situações, o escoamento parece não permanente se observado de um sistema de referência, e permanente se observado de outro que se move com o escoamento. Como a equação de Bernoulli foi deduzida pela integração da segunda lei de Newton para uma partícula fluida, ela pode ser aplicada em qualquer sistema de referência inercial (veja a discussão sobre sistemas de referência em translação na Seção 4.4.2). O procedimento é ilustrado no Problema-Exemplo 6.6.

EXEMPLO 6.3 — Escoamento num Bocal

O ar escoa em regime permanente e à baixa velocidade através de um bocal horizontal, descarregando para a atmosfera. A área do bocal de entrada é 0,1 m^2. No bocal de saída a área é 0,02 m^2. Determine a pressão manométrica necessária na entrada do bocal para produzir uma velocidade de saída de 50 m/s.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.3

DADOS: Escoamento através de um bocal, conforme mostrado.

DETERMINAR: $p_1 - p_{atm}$.

SOLUÇÃO:

Equações básicas: $\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) Escoamento em regime permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento sem atrito
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(5) $z_1 = z_2$
(6) Escoamento uniforme nas seções ① e ②

A velocidade máxima de 50 m/s está bem abaixo do valor 100 m/s, que corresponde a um número de Mach $M \approx 0,3$ no ar padrão. Portanto, o escoamento pode ser considerado incompressível.

Aplique a equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente entre os pontos ① e ②, a fim de avaliar p_1. Então,

$$p_1 - p_{atm} = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

Aplique a equação da continuidade para determinar V_1,

$$0 = \{-|\rho V_1 A_1|\} + \{|\rho V_2 A_2|\} \quad \text{ou} \quad V_1 A_1 = V_2 A_2$$

de forma que,

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = \frac{50\ m}{s} \times \frac{0,02\ m^2}{0,1\ m^2} = 10\ m/s$$

Para o ar nas condições padrões, $\rho = 1,23\ kg/m^3$. Então,

$$p_1 - p_{atm} = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1,23 \frac{kg}{m^3}\left[(50)^2 \frac{m^2}{s^2} - (10)^2 \frac{m^2}{s^2}\right]\frac{N \cdot s^2}{kg \cdot m}$$

$$p_1 - p_{atm} = 1,48\ kPa$$

$p_1 - p_{atm}$

Esse problema ilustra uma aplicação típica da equação de Bernoulli. Note que, se as linhas de corrente são retilíneas na entrada e na saída do bocal, a pressão será uniforme naquelas seções.

EXEMPLO 6.4 — Escoamento Através de um Sifão

Um tubo U atua como um sifão d'água. A curva no tubo está 1 m acima da superfície da água; a saída do tubo está 7 m abaixo. O fluido sai pela extremidade inferior do sifão como um jato livre, à pressão atmosférica. Se o escoamento é sem atrito, em primeira aproximação, determine (após listar as considerações necessárias) a velocidade do jato e a pressão absoluta do fluido na curva.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.4

DADOS: Água escoando através de um sifão conforme mostrado.

DETERMINAR: **(a)** A velocidade da água saindo como um jato livre.
(b) A pressão no ponto Ⓐ do escoamento.

SOLUÇÃO:

Equação básica: $\dfrac{p}{\rho}+\dfrac{V^2}{2}+gz=\text{constante}$

Considerações: (1) Atrito desprezível
(2) Escoamento em regime permanente
(3) Escoamento incompressível
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(5) O reservatório é grande em comparação com o tubo

Aplique a equação de Bernoulli entre os pontos ① e ②.

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2$$

Desde que a área do reservatório é muito maior que a área do tubo, $V_1 \approx 0$. Também $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$, então

$$gz_1=\frac{V_2^2}{2}+gz_2 \qquad \text{e} \qquad V_2^2=2g(z_1-z_2)$$

$$V_2=\sqrt{2g(z_1-z_2)}=\sqrt{2\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 7\,\text{m}}=11{,}7\ \text{m/s}$$

V_2

Para determinar a pressão no ponto Ⓐ, escrevemos a equação de Bernoulli entre ① e Ⓐ.

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_A}{\rho}+\frac{V_A^2}{2}+gz_A$$

Novamente $V_1 \approx 0$ e da conservação da massa $V_A = V_2$. Portanto,

$$\frac{p_A}{\rho}=\frac{p_1}{\rho}+gz_1-\frac{V_2^2}{2}-gz_A=\frac{p_1}{\rho}+g(z_1-z_A)-\frac{V_2^2}{2}$$

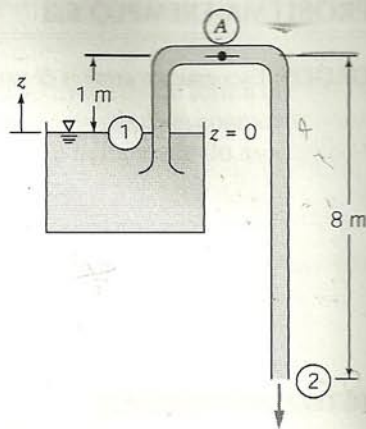
$$p_A=p_1+\rho g(z_1-z_A)-\rho\frac{V_2^2}{2}$$

$$=1{,}01\times10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}+999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times(-1\,\text{m})\times\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$-\frac{1}{2}\times 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times(11{,}7)^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\times\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$p_A = 22{,}8$ kPa (abs.) ou $-78{,}5$ kPa (manométrica)

p_A

Este problema ilustra uma aplicação direta da equação de Bernoulli com a inclusão de mudança de elevação. A suposição de escoamento sem atrito é razoável para canos retos e lisos que sejam relativamente curtos. Os efeitos do atrito e das curvas em canos são discutidos no Cap. 8.

EXEMPLO 6.5 — Escoamento sob uma Comporta

Água escoa sob uma comporta num leito horizontal na entrada de um canal. À montante da comporta, a profundidade da água é 1,5 pés e a velocidade é desprezível. Na *vena contracta* (seção mais contraída do escoamento) à jusante da comporta, as linhas de corrente são retilíneas e a profundidade é 2 pol. Determine a velocidade do escoamento à jusante da comporta, e a descarga em pés cúbicos por segundo por pé de largura.

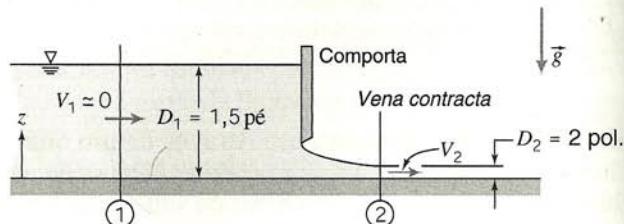
PROBLEMA-EXEMPLO 6.5

DADOS: Escoamento de água sob uma comporta.

DETERMINAR: (a) V_2.
(b) Q em pé³/s/pé de largura.

SOLUÇÃO:

Com as considerações listadas abaixo, o escoamento satisfaz todas as condições necessárias para a aplicação da equação de Bernoulli. A questão é: qual linha de corrente utilizamos?

Equação básica: $\dfrac{p_1}{\rho}+\dfrac{V_1^2}{2}+gz_1=\dfrac{p_2}{\rho}+\dfrac{V_2^2}{2}+gz_2$

Considerações: (1) Escoamento em regime permanente

(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento sem atrito
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(5) Escoamento uniforme em cada seção
(6) Distribuição hidrostática de pressão

Da consideração 6,

$$\frac{dp}{dz}=-\rho g \quad \text{e} \quad p=p_{\text{atm}}+\rho g(D-z) \quad \text{ou} \quad \frac{p}{\rho}=\frac{p_{\text{atm}}}{\rho}+g(D-z)$$

Substituindo essa relação na equação de Bernoulli, obtemos

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\rho}+g(D_1-z_1)+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_{\text{atm}}}{\rho}+g(D_2-z_2)+\frac{V_2^2}{2}+gz_2$$

ou

$$\frac{V_1^2}{2}+gD_1=\frac{V_2^2}{2}+gD_2$$

Esse resultado implica que $V^2/2 + gD =$ constante, e a constante tem o mesmo valor ao longo de qualquer linha de corrente para esse escoamento. Explicitando V_2, temos

$$V_2=\sqrt{2g(D_1-D_2)+V_1^2}$$

Mas $V_1^2 \approx 0$, então

$$V_2=\sqrt{2g(D_1-D_2)}=\sqrt{2\times 32{,}2\,\frac{\text{pé}}{\text{s}^2}\left(1{,}5\,\text{pé}-2\,\text{pol.}\times\frac{\text{pé}}{12\,\text{pol.}}\right)}$$

$$V_2=9{,}27\,\text{pé/s} \qquad V_2$$

Para escoamento uniforme, $Q = VA = VDw$, ou

$$\frac{Q}{w}=VD=V_2D_2=9{,}27\,\frac{\text{pé}}{\text{s}}\times 2\,\text{pol.}\times\frac{\text{pé}}{12\,\text{pol.}}=1{,}55\,\text{pé}^2/\text{s}$$

$$\frac{Q}{w}=1{,}55\,\text{pé}^3/\text{s por pé de largura} \qquad \frac{Q}{w}$$

EXEMPLO 6.6 — Equação de Bernoulli num Sistema de Referência em Translação

Um avião leve voa a 150 km/h no ar padrão, a uma altitude de 1000 m. Determine a pressão de estagnação na borda de ataque da asa. Num certo ponto perto da asa, a velocidade do ar *relativa* à asa é de 60 m/s. Calcule a pressão nesse ponto.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.6

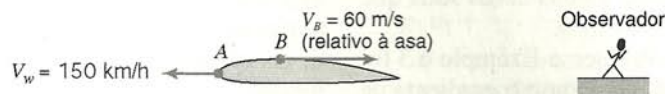
DADOS: Avião em vôo no ar padrão a 150 km/h e a 1000 m de altitude.

$V_{ar} = 0$

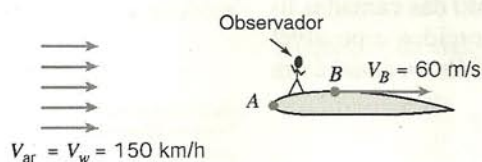
$V_B = 60$ m/s (relativo à asa)

Observador

A B

$V_w = 150$ km/h

DETERMINAR: A pressão de estagnação, p_{0_A}, no ponto A, e a pressão estática, p_B, no ponto B.

SOLUÇÃO:

O escoamento é não permanente quando observado de uma referência fixa, isto é, por um observador no solo. Entretanto, um observador sobre a asa vê o seguinte escoamento em regime permanente:

Em z = 1000 m no ar padrão, a temperatura é 281 K e a velocidade do som é 336 m/s. Portanto, no ponto B, $M_B = V_B/c = 0{,}178$. Isso é inferior a 0,3, de modo que o escoamento pode ser considerado incompressível. Assim, a equação de Bernoulli pode ser aplicada ao longo de uma linha de corrente no sistema de referência inercial do observador em movimento.

Equação básica: $\frac{p_{ar}}{\rho}+\frac{V_{ar}^2}{2}+gz_{ar}=\frac{p_A}{\rho}+\frac{V_A^2}{2}+gz_A=\frac{p_B}{\rho}+\frac{V_B^2}{2}+gz_B$

Considerações: (1) Escoamento em regime permanente
(2) Escoamento incompressível ($V < 100$ m/s)
(3) Escoamento sem atrito
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(5) Despreze Δz

Os valores da pressão e da massa específica podem ser encontrados na Tabela A.3. Então, a 1000 m, $p/p_{LC} = 0{,}8870$ a $\rho/\rho_{LC} = 0{,}9075$. Em conseqüência,

$$p = 0{,}8870 p_{LC} = 0{,}8870 \times 1{,}01 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 8{,}96 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

e

$$\rho = 0{,}9075 \rho_{LC} = 0{,}9075 \times 1{,}23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1{,}12 \text{ kg/m}^3$$

Uma vez que a velocidade é $V_A = 0$ no ponto de estagnação,

$$p_{0_A} = p_{ar} + \frac{1}{2}\rho V_{ar}^2$$

$$= 8{,}96 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + \frac{1}{2} \times 1{,}12 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left(150 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 1000 \frac{\text{m}}{\text{km}} \times \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}}\right)^2 \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$p_{0_A} = 90{,}6 \text{ kPa (abs)}$$

p_{0_A}

Resolvendo para a pressão estática em B, obtemos

$$p_B = p_{ar} + \frac{\rho}{2}(V_{ar}^2 - V_B^2)$$

$$p_B = 8{,}96 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + \frac{1}{2} \times 1{,}12 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left[\left(150 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 1000 \frac{\text{m}}{\text{km}} \times \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}}\right)^2 - (60)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]\frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$p_B = 88{,}6 \text{ kPa (abs)}$$

p_B

6.3.5 Precauções no Emprego da Equação de Bernoulli

Verificamos, nos Problemas-Exemplo 6.3 a 6.6, diversas situações em que a equação de Bernoulli pode ser aplicada, pois as restrições quanto ao seu emprego levavam a um razoável modelo de escoamento. Contudo, em algumas situações você poderá ser tentado a aplicá-la mesmo se as restrições não são satisfeitas. Nessa seção discutimos brevemente alguns casos sutis que violam aquelas restrições.

O escoamento através do bocal do Problema-Exemplo 6.3 foi bem modelado pela equação de Bernoulli. Como o gradiente de pressão num bocal é favorável, não há separação, e as camadas limites nas paredes permanecem delgadas. O atrito tem efeito desprezível no perfil de velocidade, o que torna o escoamento unidimensional um bom modelo. A velocidade, em qualquer seção, pode ser calculada a partir da correspondente área de escoamento.

Uma passagem divergente ou expansão súbita não deve ser modelada empregando-se a equação de Bernoulli. Gradientes de pressão adversos causam o rápido crescimento das camadas limites, perfis de velocidade fortemente distorcidos e possível separação do escoamento.[5] O escoamento unidimensional é um modelo imperfeito para tais casos. Em virtude do bloqueio de área decorrente do crescimento da camada limite, o aumento de pressão nos difusores reais é sempre inferior ao previsto para escoamento unidimensional não viscoso.

A equação de Bernoulli foi um modelo razoável para o sifão do Problema-Exemplo 6.4 porque a entrada era bem arredondada, as curvas suaves e o comprimento total curto. A separação do escoamento, que pode ocorrer nas entradas com cantos vivos e em curvas bruscas, provoca o afastamento em relação ao previsto por um modelo unidimensional e pela equação de Bernoulli. Os efeitos de atrito não seriam desprezíveis se o tubo fosse longo.

O Problema-Exemplo 6.5 apresentou uma situação num canal aberto análoga à de um bocal, para a qual a equação de Bernoulli é um bom modelo de escoamento. O ressalto hidráulico[6] é um exemplo de um escoamento em canal aberto com gradiente de pressão adverso. No ressalto hidráulico ocorre forte turbilhonamento, tornando impossível a identificação das linhas de corrente. Assim, a equação de Bernoulli não pode ser usada para modelar o escoamento através de um ressalto hidráulico.

[5] Veja o filme da NCFMF *Flow Visualization*.

[6] Veja os filmes da NCFMF, *Waves in Fluids* e *Stratified Flow* para exemplos desse comportamento.

A equação de Bernoulli não pode ser aplicada *através* de uma máquina como uma hélice, bomba ou moinho de vento. A equação foi deduzida pela integração ao longo de um tubo de corrente (Seção 4.4.1) ou de uma linha de corrente (Seção 6.3) na ausência de superfícies móveis, como lâminas ou pás. É impossível ter escoamento localmente permanente ou identificar linhas de corrente durante o escoamento numa máquina. A equação de Bernoulli pode ser aplicada antes e após uma máquina se as restrições quanto ao seu emprego forem satisfeitas. Entretanto, não pode ser aplicada através de uma máquina ou de um rotor.

Finalmente, a compressibilidade deve ser considerada no escoamento dos gases. Variações de massa específica, causadas por compressão dinâmica decorrente do movimento, podem ser desprezadas para finalidades da engenharia se o número de Mach local permanecer abaixo de $M \approx 0{,}3$, aproximadamente, conforme assinalado nos Problemas-Exemplo 6.3 e 6.6. Variações de temperatura podem causar mudanças significativas na massa específica de um gás, mesmo nos escoamentos a baixa velocidade. Dessa forma, a equação de Bernoulli não seria aplicável ao escoamento do ar através de um elemento de aquecimento (por exemplo, um secador de cabelos portátil), onde ocorrem importantes variações de temperatura.

6.4 RELAÇÃO ENTRE A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA E A EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A equação de Bernoulli, Eq. 6.9, foi obtida pela integração das equações de Euler ao longo de uma linha de corrente para escoamento em regime permanente, incompressível e sem atrito. Assim, a Eq. 6.9 foi deduzida a partir de uma equação da quantidade de movimento aplicada a uma partícula de fluido.

Uma equação idêntica em forma à Eq. 6.9 (embora exigindo restrições bem diferentes) pode ser obtida da primeira lei da termodinâmica. Nosso objetivo nessa seção é reduzir a equação da energia à forma da equação de Bernoulli dada pela Eq. 6.9. Tendo chegado a essa forma, compararemos as restrições para as duas equações para ajudar-nos a compreender melhor as restrições ao emprego da Eq. 6.9.

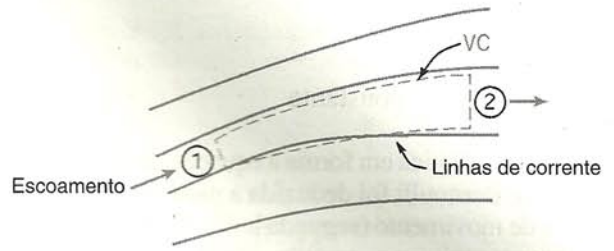
Considere o escoamento em regime permanente na ausência de forças de cisalhamento. Escolhemos um volume de controle limitado por linhas de corrente ao longo da sua periferia. Tal fronteira, mostrada na Fig. 6.5, é freqüentemente chamada de *tubo de corrente*.

Fig. 6.5 Escoamento através de um tubo de corrente.

Equação básica:

$$\dot{Q} - \overset{=0(1)}{\dot{W}_s} - \overset{=0(2)}{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}} - \overset{=0(3)}{\dot{W}_{\text{outros}}} = \overset{=0(4)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall} + \int_{\text{SC}} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.57)$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Restrições:
(1) $\dot{W}_s = 0$
(2) $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = 0$
(3) $\dot{W}_{\text{outros}} = 0$
(4) Escoamento em regime permanente
(5) Escoamento e propriedades uniformes em cada seção.

Com essas restrições, a Eq. 4.57 torna-se:

$$0 = \left(u_1 + p_1v_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)\{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \left(u_2 + p_2v_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right)\{|\rho_2 V_2 A_2|\} - \dot{Q}$$

Mas da continuidade, sob essas restrições,

$$0 = \overset{=0(4)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \rho\, d\forall} + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

ou

$$0 = \{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

Isto é,

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

Também

$$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta Q}{dm}\frac{dm}{dt} = \frac{\delta Q}{dm}\dot{m}$$

Então, da equação de energia,

$$0 = \left[\left(p_2v_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - \left(p_1v_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)\right]\dot{m} + \left(u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm}\right)\dot{m}$$

ou

$$p_1v_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = p_2v_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \left(u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm}\right)$$

Sob a restrição adicional (6) de escoamento incompressível, $v_1 = v_2 = 1/\rho$ e portanto

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \left(u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm}\right) \qquad (6.15)$$

A Eq. 6.15 reduzir-se-ia à equação de Bernoulli se o termo entre parênteses fosse zero. Então, sob a restrição adicional,

$$(7) \quad (u_2 - u_1 - \delta Q/dm) = 0$$

a equação da energia reduz-se a

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

ou

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad (6.16)$$

A Eq. 6.16 é idêntica em forma à equação de Bernoulli, Eq. 6.9. A equação de Bernoulli foi deduzida a partir de considerações de quantidade de movimento (segunda lei de Newton), e é válida para escoamento em regime permanente, incompressível, sem atrito, ao longo de uma linha de corrente. A Eq. 6.16 foi obtida pela aplicação da primeira lei da termodinâmica a um volume de controle em forma de tubo de corrente, sujeito às restrições de 1 a 7, acima. Assim, a equação de Bernoulli (Eq. 6.9) e a forma idêntica da equação da energia (Eq. 6.16) foram desenvolvidas partindo-se de modelos inteiramente diferentes, de conceitos básicos inteiramente diversos e envolvendo diferentes restrições.

Note que a restrição 7 foi necessária para obter-se a equação de Bernoulli a partir da primeira lei da termodinâmica. Essa restrição pode ser satisfeita se $\delta Q/dm$ for zero (não há transferência de calor para o fluido) e $u_2 = u_1$ (não há variação na energia interna térmica do fluido). A restrição também será satisfeita se $(u_2 - u_1)$ e $\delta Q/dm$ forem diferentes de zero, desde que os dois termos sejam iguais. O Problema-Exemplo 6.7 mostra que isso é verdadeiro para o escoamento incompressível, sem atrito.

Para o caso especial abordado nessa seção, é certo que a primeira lei da termodinâmica reduz-se à equação de Bernoulli. É importante enfatizar que a equação de Bernoulli foi obtida pela integração da forma diferencial da segunda lei de Newton (equação de Euler) para escoamento em regime permanente, incompressível, sem atrito, ao longo de uma linha de corrente. Cada termo da equação de Bernoulli tem dimensões de energia por unidade de massa. Ela é obtida portanto de uma forma similar àquela segundo a qual o método da energia é introduzido na mecânica da partícula. A equação de Bernoulli pode ser vista como um balanço de energia mecânica. Nos casos em que não há conversão de energia mecânica em térmica, as duas formas de energia são conservadas separadamente. Para esses casos, a primeira lei da termodinâmica e a segunda lei de Newton não fornecem informações separadas. Contudo, em geral, a primeira lei da termodinâmica e a segunda lei de Newton são equações independentes que devem ser satisfeitas separadamente.

EXEMPLO 6.7 — Energia Interna e Transferência de Calor no Escoamento

Considere o escoamento incompressível, sem atrito, com transferência de calor. Mostre que

$$u_2 - u_1 = \frac{\delta Q}{dm}$$

PROBLEMA-EXEMPLO 6.7

DADOS: Escoamento incompressível, sem atrito, com transferência de calor.

MOSTRAR QUE: $u_2 - u_1 = \dfrac{\delta Q}{dm}$.

SOLUÇÃO:

Em geral, a energia interna, u, pode ser expressa como $u = u(T, v)$. Para escoamento incompressível, $v =$ constante e $u = u(T)$. Assim, o estado termodinâmico do fluido é determinado apenas pela propriedade termodinâmica, T. A variação de energia interna para qualquer processo, $u_2 - u_1$, depende somente das temperaturas nos estados final e inicial.

Da equação de Gibbs, $T\,ds = du + p\,dv$, válida para uma substância pura submetida a qualquer processo, obtemos

$$T\,ds = du$$

para escoamento incompressível, uma vez que $dv = 0$. Como a variação de energia interna, du, entre estados final e inicial especificados é independente do processo, consideramos um processo reversível, para o qual $T\,ds = d\left(\dfrac{\delta Q}{dm}\right) = du$. Portanto,

$$u_2 - u_1 = \frac{\delta Q}{dm}$$

EXEMPLO 6.8 — Escoamento sem Atrito com Transferência de Calor

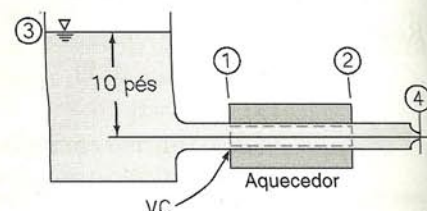
Água escoa em regime permanente de um grande reservatório aberto, através de um curto trecho de tubo e de um bocal com área de seção $A = 0{,}864$ pol.². Um aquecedor de 10 kW, bem isolado termicamente, envolve o tubo. Determine o aumento de temperatura do fluido.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.8

DADOS: Água escoa de um grande reservatório através de um sistema mostrado na figura e descarrega à pressão atmosférica. O aquecedor é de 10 kW; $A_4 = 0{,}864$ pol.².

DETERMINAR: O aumento de temperatura do fluido entre os pontos ① e ②.

SOLUÇÃO:

Equações básicas: $\dfrac{p}{\rho} + \dfrac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$

$$0 = \cancelto{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\dot{Q} - \cancelto{=0(4)}{\dot{W}_s} - \cancelto{=0(4)}{\dot{W}_{cisalhamento}} = \cancelto{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho d\forall} + \int_{SC}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Considerações:
(1) Escoamento em regime permanente
(2) Escoamento sem atrito
(3) Escoamento incompressível
(4) Não há trabalho de eixo, nem de cisalhamento
(5) Escoamento ao longo de uma linha de corrente

Sob as considerações listadas, a primeira lei da termodinâmica para o VC mostrado torna-se

$$\dot{Q} = \int_{SC}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{A_1}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \int_{A_2}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Para propriedades uniformes em ① e ②

$$\dot{Q} = -|\rho V_1 A_1|\left(u_1 + p_1 v + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right) + |\rho V_2 A_2|\left(u_2 + p_2 v + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right)$$

Da conservação de massa, $|\rho V_1 A_1| = |\rho V_2 A_2| = \dot{m}$, e

$$\dot{Q} = \dot{m}\left[u_2 - u_1 + \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)\right]$$

Para escoamento incompressível, sem atrito, permanente, ao longo de uma linha de corrente,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Portanto,

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1)$$

Como, para um fluido incompressível, $u_2 - u_1 = c\,(T_2 - T_1)$, então

$$T_2 - T_1 = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c}$$

Da continuidade,

$$\dot{m} = \rho V_4 A_4$$

Para determinar V_4, escreva a equação de Bernoulli entre a superfície livre em ③ e o ponto ④.

$$\frac{p_3}{\rho} + \frac{V_3^2}{2} + gz_3 = \frac{p_4}{\rho} + \frac{V_4^2}{2} + gz_4$$

Como $p_3 = p_4$ e $V_3 \approx 0$, segue-se que

$$V_4 = \sqrt{2g(z_3 - z_4)} = \sqrt{2 \times 32{,}2\,\frac{\text{pé}}{\text{s}^2} \times 10\,\text{pé}} = 25{,}4\ \text{pé/s}$$

e

$$\dot{m} = \rho V_4 A_4 = 1{,}94\,\frac{\text{slug}}{\text{pé}^3} \times 25{,}4\,\frac{\text{pé}}{\text{s}} \times 0{,}864\ \text{pol}^2 \times \frac{\text{pé}^2}{144\ \text{pol}^2} = 0{,}296\ \text{slug/s}$$

Admitindo que não há perdas de calor para o ambiente, obtemos

$$T_2 - T_1 = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c} = 10\ \text{kW} \times 3413\,\frac{\text{Btu}}{\text{kW}\cdot\text{h}} \times \frac{\text{h}}{3600\ \text{s}} \times \frac{\text{s}}{0{,}296\ \text{slug}} \times \frac{\text{slug}}{32{,}2\ \text{lbm}} \times \frac{\text{lbm}\cdot{}^\circ\text{R}}{1\ \text{Btu}}$$

$$T_2 - T_1 = 0{,}995^\circ\text{R} \qquad \longleftarrow \qquad T_2 - T_1$$

{ Esse problema ilustra que, em geral, a primeira lei da termodinâmica e a equação de Bernoulli são equações independentes.}

Para escoamento em regime permanente, incompressível, sem atrito e ao longo de uma linha de corrente, mostramos que a primeira lei da termodinâmica reduz-se à equação de Bernoulli. Da Eq. 6.16, concluímos que não há perda de energia mecânica em tal escoamento.

Com freqüência, convém representar o nível de energia mecânica de um escoamento por meios gráficos. A equação da energia na forma da Eq. 6.16 sugere tal representação. Dividindo-a por g, obtemos,

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{constante} \tag{6.17}$$

Cada termo na Eq. 6.17 tem dimensões de comprimento, ou "carga" do fluido em escoamento. Os termos individuais são

$\frac{p}{\rho g}$, é a carga devida à pressão estática local

$\frac{V^2}{2g}$, é a carga devida à pressão dinâmica local (energia cinética por unidade de peso do fluido em escoamento)

z, é a carga de elevação

H, é a carga total do escoamento

A *linha de energia* (LE) representa a altura de carga total. Conforme mostrado pela Eq. 6.17, a altura da LE permanece constante para o escoamento sem atrito, quando nenhum trabalho é realizado sobre ou pelo fluido. O líquido subiria até a altura da LE num tubo de carga total colocado no escoamento.

A *linha piezométrica* (LP) representa a soma das alturas de carga devidas à elevação e à pressão estática, $z + p/\rho g$. Numa tomada de pressão estática colocada no duto, o líquido subiria até a altura da LP. Para escoamento em canal aberto, a LP está na superfície livre do líquido.

Fig. 6.6 Linhas de energia e piezométrica para escoamento sem atrito.

A diferença entre as alturas da LE e da LP representa a altura de carga dinâmica (de velocidade), $V^2/2g$. A relação entre a LE, a LP e a altura de carga devida à velocidade é ilustrada esquematicamente na Fig. 6.6 para escoamento sem atrito de um tanque através de um tubo com um redutor.

A altura de carga total do escoamento mostrado na Fig. 6.6 é obtida pela aplicação da Eq. 6.17 no ponto ①, a superfície livre no grande reservatório. Ali, a velocidade é desprezível e a pressão é a atmosférica (zero manométrica). Assim, a altura de carga total é igual a z_1. Isso define a altura da linha de energia, que permanece constante para esse escoamento, uma vez que não há atrito ou trabalho.

A altura de carga devida à velocidade aumenta de zero a $V_2^2/2g$ à medida que o fluido acelera e penetra na primeira seção de tubo com diâmetro constante. Como a altura da LE é constante, a LP deve diminuir em altura. Quando a velocidade torna-se constante, a altura da LP permanece constante.

A velocidade aumenta novamente no redutor entre as seções ② e ③. À medida que a altura de carga devida à velocidade aumenta, a altura da LP diminui. Quando a velocidade torna-se constante entre as seções ③ e ④, a LP permanece constante com uma altura menor.

Na descarga livre, na seção ④, a altura de carga estática é zero (manométrica). Ali, a altura da LP é igual a z_4. Como ilustrado, a altura de carga devida à velocidade é $V_4^2/2g$. A soma da altura da LP e da altura de carga devida à velocidade iguala a altura da LE. (A carga estática é negativa entre as seções ③ e ④ porque a linha de centro do tubo está acima da LP.)

Tomadas de pressão estática e tubos de carga total ligados a manômetros são mostrados esquematicamente na Fig. 6.6. As tomadas estáticas fornecem leituras iguais à altura da linha piezométrica. Os tubos de carga total fornecem leituras iguais à altura da linha de energia.

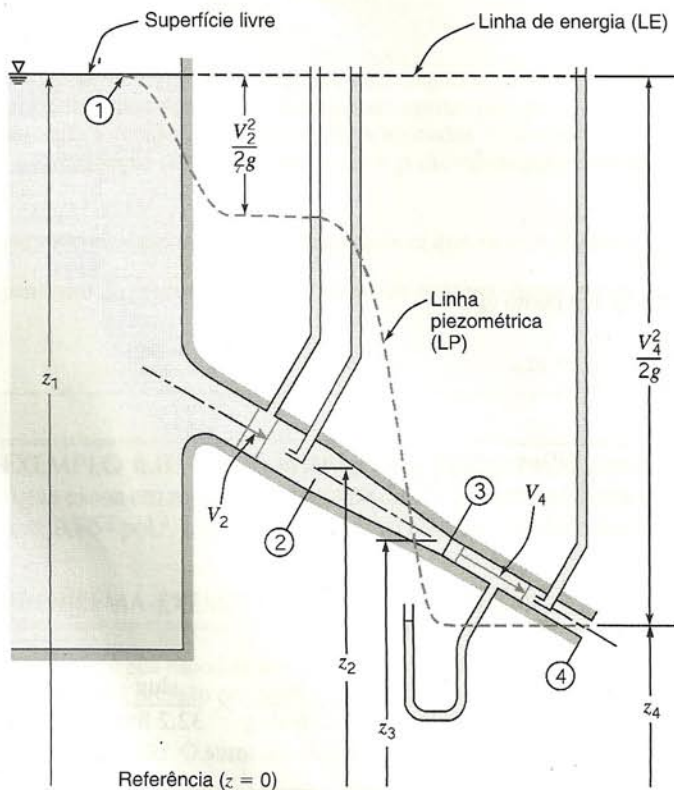
Os efeitos do atrito e as interações do trabalho com um escoamento serão abordados em detalhe no Cap. 8. O efeito do atrito é converter energia mecânica em energia térmica interna. Dessa forma, o atrito reduz a altura de carga total do fluido em escoamento, provocando uma redução gradual da altura da linha de energia.

A adição de trabalho ao fluido, como o fornecido por uma bomba por exemplo, aumenta a altura da linha de energia. O efeito da interação do trabalho com o escoamento será discutido nos Caps. 8 e 10.

*6.5 EQUAÇÃO DE BERNOULLI PARA ESCOAMENTO NÃO PERMANENTE — INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER AO LONGO DE UMA LINHA DE CORRENTE

Não é necessário restringir o desenvolvimento da equação de Bernoulli ao escoamento em regime permanente. O propósito dessa seção é desenvolver a equação correspondente para escoamento não permanente ao longo de uma linha de corrente e ilustrar o seu emprego.

A equação da quantidade de movimento para escoamento sem atrito foi estabelecida na Seção 6.1 como

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\hat{k} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \tag{6.3}$$

*Esta seção pode ser omitida sem haver perda de continuidade no material do texto.

A Eq. 6.3 é vetorial. Ela pode ser convertida numa equação escalar tomando-se o produto escalar com $d\vec{s}$, onde $d\vec{s}$ é um elemento de distância ao longo de uma linha de corrente. Então,

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{s} - g\hat{k} \cdot d\vec{s} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s} = \frac{DV}{Dt}ds$$

$$= V\frac{\partial V}{\partial s}ds + \frac{\partial V}{\partial t}ds \qquad (6.18)$$

Examinando os termos da Eq. 6.18, notamos que

$\nabla p \cdot d\vec{s} = dp$ (a variação na pressão ao longo de s)

$\hat{k} \cdot d\vec{s} = dz$ (a variação em z ao longo de s)

$\frac{\partial V}{\partial s}ds = dV$ (a variação em V ao longo de s)

Substituindo na Eq. 6.18, obtemos

$$-\frac{dp}{\rho} - g\,dz = V\,dV + \frac{\partial V}{\partial t}ds \qquad (6.19)$$

Integrando ao longo de uma linha de corrente do ponto 1 ao ponto 2 resulta

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}ds = 0 \qquad (6.20)$$

Para escoamento incompressível, a massa específica é constante. Para esse caso especial, a Eq. 6.20 torna-se

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}ds \qquad (6.21)$$

Restrições: (1) Escoamento incompressível
(2) Escoamento sem atrito
(3) Escoamento ao longo de uma linha de corrente

A fim de avaliar o termo de integral na Eq. 6.21, a variação de $\frac{\partial V}{\partial t}$ deve ser conhecida como uma função de s, ao longo da linha de corrente medida a partir do ponto 1. (Para escoamento em regime permanente, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, e a Eq. 6.21 reduz-se à Eq. 6.9.) A Eq. 6.21 pode ser aplicada a qualquer escoamento no qual as restrições sejam compatíveis com a situação física.

A aplicação da Eq. 6.21 é ilustrada no Problema-Exemplo 6.9.

EXEMPLO 6.9 — Equação de Bernoulli Não Permanente

Um longo tubo é ligado a um grande reservatório que inicialmente está cheio com água a uma profundidade de 3 m. O tubo tem 150 mm de diâmetro e 6 m de comprimento. Determine a velocidade do escoamento deixando o tubo como uma função do tempo após a remoção de um tampão na sua extremidade livre.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.9

DADOS: Tubo e grande reservatório, conforme mostrado.

DETERMINAR: $V_2(t)$.

SOLUÇÃO:

Aplique a equação de Bernoulli ao escoamento não permanente ao longo de uma linha de corrente, do ponto ① ao ponto ②.

Equação básica: $$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}ds$$
($V_1^2/2 \simeq 0(5)$; $gz_2 = 0(6)$)

Considerações:
(1) Escoamento incompressível
(2) Escoamento sem atrito
(3) Escoamento ao longo de uma linha de corrente de ① a ②
(4) $p_1 = p_2 = p_{atm}$
(5) $V_1^2 \simeq 0$
(6) $z_2 = 0$
(7) $z_1 = h =$ constante
(8) Velocidade desprezível no reservatório, exceto na pequena região perto da entrada do tubo.

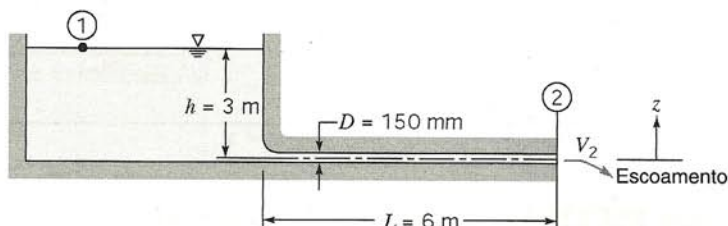
Portanto

$$gz_1 = gh = \frac{V_2^2}{2} + \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}ds$$

Em vista da consideração (8), a integral torna-se

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}ds \approx \int_0^L \frac{\partial V}{\partial t}ds$$

No tubo, $V = V_2$ em qualquer ponto; logo,

$$\int_0^L \frac{\partial V}{\partial t}ds = \int_0^L \frac{dV_2}{dt}ds = L\frac{dV_2}{dt}$$

Substituindo, dá

$$gh = \frac{V_2^2}{2} + L\frac{dV_2}{dt}$$

Separando variáveis, obtemos

$$\frac{dV_2}{2gh - V_2^2} = \frac{dt}{2L}$$

Integrando entre os limites $V = 0$ para $t = 0$ e $V = V_2$ para $t = t$,

$$\int_0^{V_2} \frac{dV}{2gh - V^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2gh}}\tanh^{-1}\left(\frac{V}{\sqrt{2gh}}\right)\right]_0^{V_2} = \frac{t}{2L}$$

Como $\tanh^{-1}(0) = 0$, obtemos

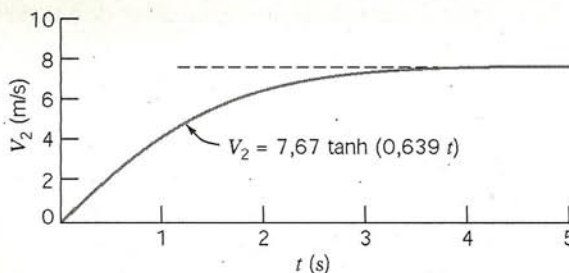
$$\frac{1}{\sqrt{2gh}}\tanh^{-1}\left(\frac{V_2}{\sqrt{2gh}}\right) = \frac{t}{2L} \quad \text{ou} \quad \frac{V_2}{\sqrt{2gh}} = \tanh\left(\frac{t}{2L}\sqrt{2gh}\right) \qquad V_2(t)$$

Para as condições dadas,

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 3\text{ m}} = 7{,}67\text{ m/s}$$

e

$$\frac{t}{2L}\sqrt{2gh} = \frac{t}{2} \times \frac{1}{6\text{ m}} \times 7{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}639t$$

O resultado é portanto $V_2 = 7{,}67\tanh(0{,}639t)$ m/s, conforme mostrado:

*6.6 ESCOAMENTO IRROTACIONAL

Um escoamento irrotacional é aquele no qual os elementos fluidos movendo-se no campo de escoamento não estão sujeitos a qualquer rotação. Para $\vec{\omega} = 0$, $\nabla \times \vec{V} = 0$, e da Eq. 5.13,

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{6.22}$$

Em coordenadas cilíndricas, da Eq. 5.16, a condição de irrotacionalidade exige que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial rV_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0 \tag{6.23}$$

6.6.1 Equação de Bernoulli Aplicada ao Escoamento Irrotacional

Na Seção 6.3.1, integramos a equação de Euler ao longo de uma linha de corrente para escoamento em regime permanente, incompressível, não viscoso a fim de obter a equação de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.9}$$

A Eq. 6.9 pode ser aplicada entre dois pontos quaisquer situados na mesma linha de corrente. Em geral, o valor da constante variará de linha de corrente para linha de corrente.

Se, além de ser invíscido, permanente e incompressível, o campo de escoamento também for irrotacional (o campo de velocidade for tal que $2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = 0$), podemos mostrar que a equação de Bernoulli pode ser aplicada entre dois pontos quaisquer. Então, o valor da constante na Eq. 6.9 será o mesmo para todas as linhas de correntes. Para ilustrar isto, começaremos com a equação de Euler na forma vetorial,

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\hat{k} = (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \tag{6.10}$$

Usando a identidade vetorial

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

vemos que, para escoamento irrotacional, onde $\nabla \times \vec{V} = 0$ segue-se que,

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V})$$

*Essa seção pode ser omitida sem haver perda de continuidade no material do texto. (Note que a Seção 5.2 contém material básico para o estudo das Seções 6.6.3, 6.6.4 e 6.6.5.)

e a equação de Euler para escoamento irrotacional pode ser escrita como

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\hat{k} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}) = \frac{1}{2}\nabla(V^2) \tag{6.24}$$

Considere um deslocamento no campo de escoamento da posição $\vec{r}$ para a posição $\vec{r}+d\vec{r}$; o deslocamento $d\vec{r}$ é arbitrário e infinitesimal em qualquer direção. Tomando o produto escalar de $d\vec{r}=dx\hat{i}+dy\hat{j}+dz\hat{k}$ com cada um dos termos da Eq. 6.24, resulta

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{r} - g\hat{k}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\nabla(V^2)\cdot d\vec{r}$$

e, por conseguinte,

$$-\frac{dp}{\rho} - g\,dz = \frac{1}{2}d(V^2)$$

ou

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(V^2) + g\,dz = 0$$

Integrando essa equação para escoamento incompressível dá

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.25}$$

Como $d\vec{r}$ foi deslocamento arbitrário, a Eq. 6.25 é válida entre quaisquer dois pontos de um campo de escoamento invíscido, permanente, incompressível, que é também irrotacional.

6.6.2 Potencial de Velocidade

Na Seção 5.2, formulamos a função de corrente, ψ, que relaciona as linhas de corrente e a vazão num escoamento bidimensional incompressível.

Podemos formular uma relação chamada função potencial, ϕ, para um campo de velocidade irrotacional. Para isso, devemos usar a identidade vetorial fundamental[7]

$$\text{rotacional (grad}\,\phi) = \nabla\times\nabla\phi = 0 \tag{6.26}$$

que é válida se ϕ for uma função escalar (das coordenadas espaciais e do tempo), tendo derivadas primeira e segunda contínuas.

Então, para um escoamento irrotacional no qual $\nabla\times\vec{V}=0$, deve existir uma função escalar ϕ tal que o gradiente de ϕ seja proporcional ao vetor velocidade, $\vec{V}$. A fim de que o sentido positivo do escoamento seja o de ϕ decrescente (análogo ao sentido positivo de transferência de calor, que é definido no sentido de temperatura decrescente), definimos ϕ tal que

$$\vec{V} \equiv -\nabla\phi \tag{6.27}$$

Portanto

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad w = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{6.28}$$

Com a função potencial definida dessa forma, a condição de irrotacionalidade, Eq. 6.22, é também satisfeita.

Em coordenadas cilíndricas,

$$\nabla = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.21}$$

[7]A prova dessa identidade pode ser encontrada em qualquer livro que trate de análise vetorial ou pela expansão da Eq. 6.26 em componentes.

Da Eq. 6.27, então, em coordenadas cilíndricas,

$$V_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad V_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad V_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{6.29}$$

O potencial de velocidade, ϕ, existe apenas para escoamento irrotacional. A função de corrente ψ satisfaz a equação da continuidade para escoamento incompressível; não está sujeita à restrição de escoamento irrotacional.

A irrotacionalidade pode ser uma hipótese válida para aquelas regiões de um escoamento nas quais as forças viscosas são desprezíveis.[8] (Tal região existe, por exemplo, fora da camada limite no escoamento sobre uma superfície sólida.) A teoria para escoamento irrotacional é desenvolvida em termos de um fluido imaginário ideal cuja viscosidade é identicamente zero. Como num escoamento irrotacional o campo de velocidade pode ser definido pela função potencial, ϕ, a teoria é freqüentemente mencionada como teoria do escoamento potencial.

Todos os fluidos reais possuem viscosidade, mas há muitas situações nas quais a hipótese de escoamento invíscido simplifica bastante a análise e, ao mesmo tempo, fornece resultados significativos. Por causa dessa utilidade e por ser matematicamente atraente, o escoamento potencial tem sido largamente estudado.[9]

6.6.3 Função de Corrente e Potencial de Velocidade para Escoamento Incompressível, Irrotacional e Bidimensional: Equação de Laplace

Para um escoamento incompressível, bidimensional e irrotacional, temos expressões para as componentes da velocidade, u e v, em termos tanto da função de corrente, ψ, quanto do potencial de velocidade, ϕ,

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{5.4}$$

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{6.28}$$

Substituindo u e v da Eq. 5.4 na condição de irrotacionalidade,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{6.22}$$

obtemos

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.30}$$

Substituindo u e v da Eq. 6.28 na equação da continuidade,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.3}$$

obtemos

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.31}$$

[8]Exemplos de movimentos rotacionais e irrotacionais são mostrados no filme da NCFMF *Vorticity*.

[9]Qualquer pessoa interessada num estudo detalhado da teoria do escoamento potencial pode achar as referências [4-6] úteis.

As Eqs. 6.30 e 6.31 são formas da equação de Laplace — uma equação que surge em muitas áreas das ciências físicas e da engenharia. Qualquer função ψ ou ϕ que satisfaça a equação de Laplace representa um possível campo de escoamento bidimensional, incompressível e irrotacional.

Na Seção 5.2 mostramos que a função de corrente, ψ, é constante ao longo de uma linha de corrente. Para $\psi =$ constante, $d\psi = 0$ e

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0$$

A inclinação de uma linha de corrente — uma linha de ψ constante — é dada por

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = -\frac{\partial \psi/\partial x}{\partial \psi/\partial y} = -\frac{-v}{u} = \frac{v}{u} \qquad (6.32)$$

Ao longo de uma linha de ϕ constante, $d\phi = 0$ e

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = 0$$

Em conseqüência, a inclinação de uma linha de potencial — uma linha de ϕ constante — é dada por

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = -\frac{\partial \phi/\partial x}{\partial \phi/\partial y} = -\frac{u}{v} \qquad (6.33)$$

A última igualdade na Eq. 6.33 resulta do uso da Eq. 6.28.

Comparando as Eqs. 6.32 e 6.33, vemos que a inclinação de uma linha de ψ constante em qualquer ponto é a recíproca negativa da inclinação da linha de ϕ constante naquele ponto; linhas de ψ constante e de ϕ constante são ortogonais. Essa propriedade das linhas potenciais e das linhas de corrente é útil nas análises gráficas de campos de escoamentos.

EXEMPLO 6.10 — Potencial de Velocidade

Considere o campo de escoamento dado por $\psi = ax^2 - ay^2$, onde $a = 3\ s^{-1}$. Mostre que o escoamento é irrotacional. Determine o potencial de velocidade para esse escoamento.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.10

DADOS: Campo de escoamento incompressível com $\psi = ax^2 - ay^2$, onde $a = 3\ s^{-1}$.

DETERMINAR: (a) A rotação do fluido.
(b) O potencial de velocidade para o escoamento.

SOLUÇÃO:

Para escoamento no plano xy, ω_z é a única componente não nula do vetor rotação. Se o escoamento é irrotacional, então $\omega_z = 0$. Como

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{e} \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

então

$$u = \frac{\partial}{\partial y}(ax^2 - ay^2) = -2ay \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 - ay^2) = -2ax$$

e daí

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2ax) - \frac{\partial}{\partial y}(-2ay) = -2a + 2a = 0 \longleftarrow 2\omega_z$$

Portanto, o escoamento é irrotacional.

As componentes da velocidade podem ser escritas em termos do potencial de velocidade como

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Em conseqüência, $u = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = -2ay$ e $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2ay$. Integrando com relação a x dá $\phi = 2axy + f(y)$, onde $f(y)$ é uma função arbitrária de y. Então

$$v = -2ax = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}[2axy + f(y)]$$

Portanto, $-2ax = -2ax - \dfrac{\partial f(y)}{\partial y} = -2ax - \dfrac{df}{dy}$, assim $\dfrac{df}{dy} = 0$ e $f =$ constante. Então

$$\phi = 2axy + \text{constante} \longleftarrow \phi$$

Podemos demonstrar também que linhas de ψ constante e ϕ constante são ortogonais.

$$\psi = ax^2 - ay^2 \quad \text{e} \quad \phi = 2axy + c$$

Para ψ constante, $d\psi = 0 = 2ax\,dx - 2ay\,dy$, então $\left.\dfrac{dy}{dx}\right)_{\psi=c} = \dfrac{x}{y}$

Para ϕ constante, $d\phi = 0 = 2ay\,dx + 2ax\,dy$, então $\left.\dfrac{dy}{dx}\right)_{\phi=c} = -\dfrac{y}{x}$

As inclinações das linhas de ϕ constante e ψ constante são recíprocas negativas. Por conseguinte, as linhas de ϕ constante são ortogonais às linhas de ψ constante.

{ Esse problema ilustra a relação entre a função de corrente, o campo de velocidade e o potencial de velocidade. }

6.6.4 Escoamentos Planos Elementares

Diversos escoamentos potenciais podem ser construídos superpondo-se configurações de escoamentos elementares. As funções ψ e ϕ para cinco escoamentos bidimensionais — um escoamento uniforme, uma fonte, um sumidouro, um vórtice e um dipolo — encontram-se resumidos na Tabela 6.1. As funções ψ e ϕ podem ser obtidas do campo de velocidade para cada escoamento elementar.

Um *escoamento uniforme* de velocidade constante paralelo ao eixo x satisfaz a equação da continuidade e a condição de irrotacionalidade identicamente. Na Tabela 6.1, mostramos as funções ψ e ϕ para um escoamento uniforme no sentido positivo do eixo x.

Para um escoamento uniforme de magnitude constante, V, inclinado de um ângulo α em relação ao eixo x,

$$\psi = (V\cos\alpha)y - (V\,\text{sen}\,\alpha)x$$

$$\phi = -(V\,\text{sen}\,\alpha)y - (V\cos\alpha)x$$

Uma *fonte* simples é uma configuração de escoamento no plano xy no qual o escoamento é radial para fora a partir do eixo z e simétrico em todas as direções. A intensidade, q, da fonte, é a vazão em volume por unidade de profundidade. Em qualquer raio, r, de uma fonte, a velocidade tangencial, V_θ, é zero; a velocidade radial, V_r, é igual a vazão em volume por unidade de profundidade, q, dividida pela área do escoamento por unidade de profundidade, $2\pi r$. Logo, $V_r = \dfrac{q}{2\pi r}$ para uma fonte. As funções ψ e ϕ para uma fonte são mostradas na Tabela 6.1.

Num *sumidouro* simples, o fluxo é radial para dentro; um sumidouro é uma fonte negativa. As funções ψ e ϕ para um sumidouro mostradas na Tabela 6.1 são as negativas das correspondentes funções para uma fonte.

A origem tanto de uma fonte quanto de um sumidouro é um ponto singular, uma vez que a velocidade radial aproxima-se de infinito quando o raio aproxima-se de zero. Assim, enquanto um escoamento real pode assemelhar-se a uma fonte ou a um sumidouro para alguns valores de r, fontes e sumidouros não têm equivalente físico exato. O valor essencial do conceito de fontes e sumidouros é que, quando combinados com outros escoamentos elementares, eles produzem configurações que representam adequadamente escoamentos reais.

Uma configuração de escoamento na qual as linhas de corrente são círculos concêntricos é um vórtice. Num *vórtice livre (irrotacional)*, as partículas fluidas não giram à medida que transladam em trajetórias circulares em torno do centro do vórtice. A distribuição de velocidade num vórtice irrotacional pode ser determinada das equações de Euler e de Bernoulli. Para escoamento irrotacional, a equação de Bernoulli é válida entre dois pontos quaisquer no campo de escoamento. Para escoamento num plano horizontal,

$$\frac{1}{\rho}\,dp = -V_\theta\,dV_\theta$$

A componente da equação de Euler normal à linha de corrente é

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{V_\theta^2}{r}$$

Combinando essas equações resulta

$$\frac{dp}{\rho} = -V_\theta\,dV_\theta = \frac{V_\theta^2}{r}\,dr$$

Da última igualdade

$$V_\theta\,dr + r\,dV_\theta = 0$$

Integrando essa equação obtém-se

$$V_\theta r = \text{constante}$$

A intensidade, K, do vórtice é definida como $K = 2\pi r V_\theta$; as dimensões de K são L^2/t (vazão em volume por unidade de profundidade). O vórtice irrotacional é uma aproximação razoável do campo de escoamento num furacão (exceto na região da origem; a origem é um ponto singular).

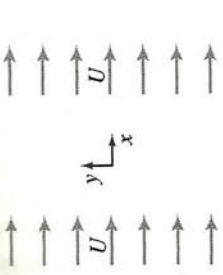
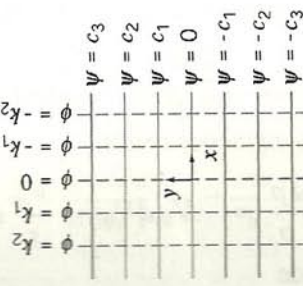
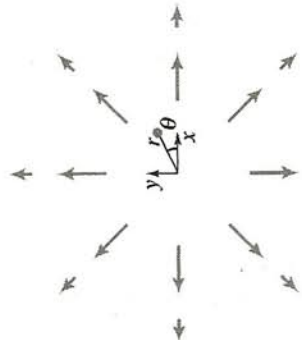
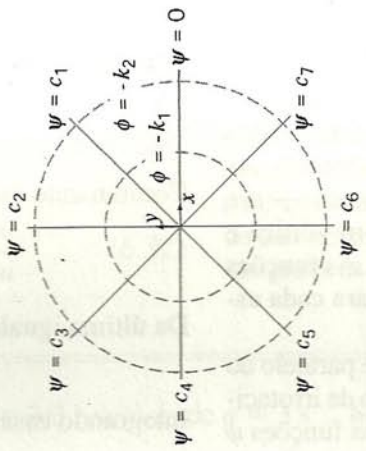
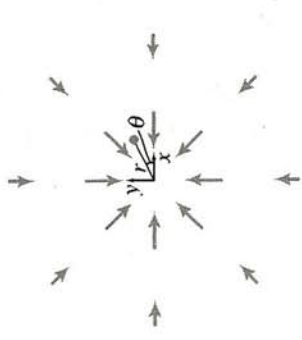
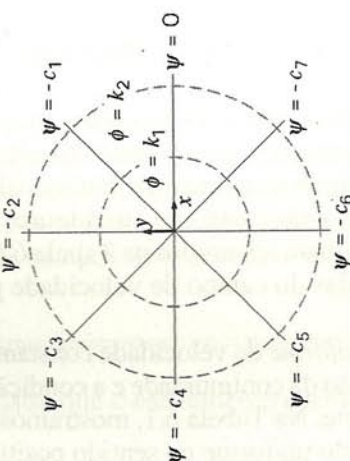
O último escoamento "elementar" listado na Tabela 6.1 é o *dipolo*. Esse escoamento é produzido matematicamente, permitindo-se que uma fonte e um sumidouro de intensidades numericamente iguais se cruzem. No limite, à medida que a distância, δs, entre eles tende para zero, as suas intensidades aumentam, de modo que o produto $\dfrac{q\delta s}{2\pi}$ tende para um valor finito, Λ, que é denominado intensidade do dipolo.

6.6.5 Superposição de Escoamentos Planos Elementares

Mostramos na Seção 6.6.3 que tanto ϕ quanto ψ satisfazem a equação de Laplace para um escoamento que seja incompressível e irrotacional. Como a equação de Laplace é uma equação diferencial parcial, linear e homogênea, as soluções podem ser superpostas (somadas) para desenvolver configurações de escoamento mais complexas e interessantes. Assim, se ψ_1 e ψ_2 satisfazem a equação de Laplace, então $\psi_3 = \psi_1 + \psi_2$ também satisfaz. Os escoamentos planos elementares são como os tijolos de uma construção, nesse processo de superposição.

O objetivo da superposição de escoamentos elementares é a produção de configurações semelhantes àquelas de interesse prático. O modelo de escoamento ideal postula um fluido ideal com viscosidade nula e, por conseguinte, com tensões de cisalhamento nulas. Como não há escoamento na direção transversal a uma linha de corrente, qualquer contorno de linhas de corrente pode ser imaginado como representando uma superfície sólida.

A combinação de elegância matemática e utilidade do escoamento potencial atraiu muitos para o seu estudo. Alguns dos mais famosos matemáticos da história estudaram a teoria e a aplicação da "hidrodinâmica", como era denominado o escoamento potencial antes de 1900. A lista de nomes inclui Bernoulli, Lagrange, d'Alembert, Cauchy, Rankine e Euler [7].

Tabela 6.1 Escoamentos Planos Elementares

Escoamento Uniforme (sentido positivo de x)

$u = U \qquad \psi = Uy$

$v = 0 \qquad \phi = -Ux$

$\Gamma = 0$ em qualquer curva fechada

Escoamento de Fonte (a partir da origem)

$V_r = \dfrac{q}{2\pi r} \qquad \psi = \dfrac{q}{2\pi}\theta$

$V_\theta = 0 \qquad \phi = -\dfrac{q}{2\pi}\ln r$

A origem é ponto singular
q é a vazão volumétrica por unidade de profundidade
$\Gamma = 0$ em qualquer curva fechada

Escoamento de sumidouro (em direção da origem)

$V_r = -\dfrac{q}{2\pi r} \qquad \psi = -\dfrac{q}{2\pi}\theta$

$V_\theta = 0 \qquad \phi = \dfrac{q}{2\pi}\ln r$

A origem é ponto singular
q é a vazão volumétrica por unidade de profundidade
$\Gamma = 0$ em qualquer curva fechada

Tabela 6.1 Escoamentos Planos Elementares (*cont.*)

Vórtice Irrotacional (sentido de rotação anti-horário, centro na origem)

$$V_r = 0 \qquad \psi = -\frac{K}{2\pi}\ln r$$

$$V_\theta = \frac{K}{2\pi r} \qquad \phi = -\frac{K}{2\pi}\theta$$

A origem é ponto singular
K é a intensidade do vórtice
$\Gamma = K$ em qualquer curva fechada englobando a origem
$\Gamma = 0$ em qualquer curva fechada não englobando a origem

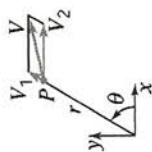
Dipolo (centro na origem)

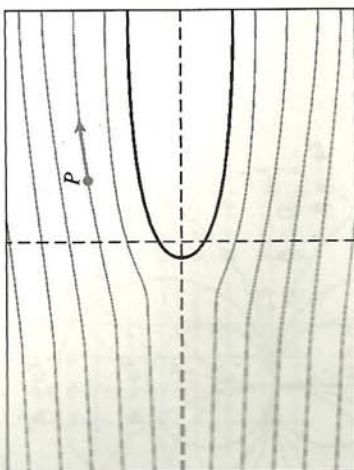
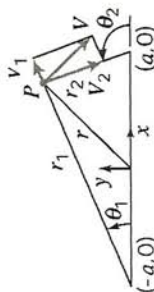
$$V_r = -\frac{\Lambda}{r^2}\cos\theta \qquad \psi = -\frac{\Lambda \operatorname{sen}\theta}{r}$$

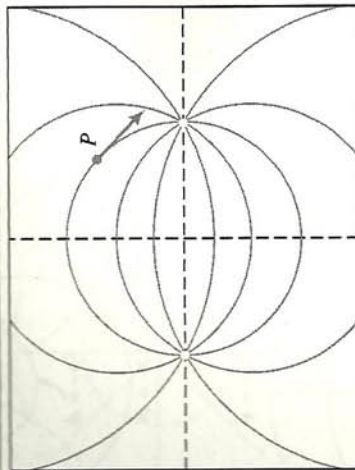
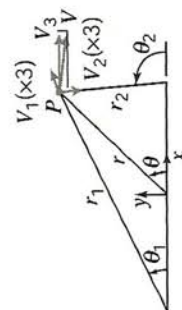
$$V_\theta = -\frac{\Lambda}{r^2}\operatorname{sen}\theta \qquad \phi = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r}$$

A origem é ponto singular
Λ é a intensidade do dipolo
$\Gamma = 0$ em qualquer curva fechada

Tabela 6.2 Superposição de Escoamentos Planos Elementares

Fonte e Escoamento Uniforme (escoamento sobre um meio-corpo)

$$\psi = \psi_{so} + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta + Uy = \frac{q}{2\pi}\theta + Ur\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi}\ln r - Ux = -\frac{q}{2\pi}\ln r - Ur\cos\theta$$

Fonte e Sumidouro (intensidade igual, distância de separação sobre o eixo $x = 2a$)

$$\psi = \psi_{so} + \psi_{si} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_{si} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi}\ln r_1 + \frac{q}{2\pi}\ln r_2 = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Fonte, Sumidouro e Escoamento Uniforme (escoamento sobre um corpo de Rankine)

$$\psi = \psi_{so} + \psi_{si} + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 + Uy$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) + Ur\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_{si} + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\frac{q}{2\pi}\ln r_1 + \frac{q}{2\pi}\ln r_2 - Ux$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} - Ur\cos\theta$$

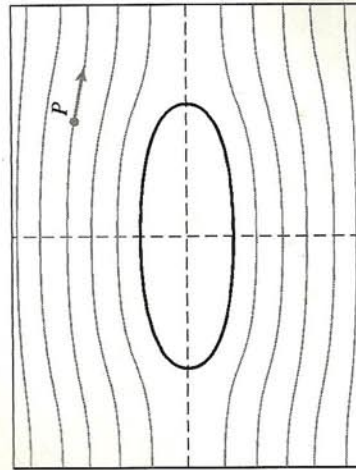
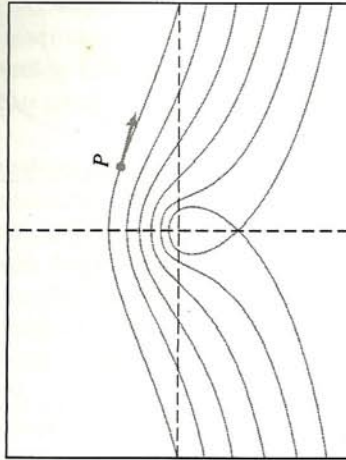
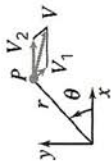



Tabela 6.2 Superposição de Escoamentos Planos Elementares (*cont.*)

Vórtice (sentido horário) e Escoamento Uniforme

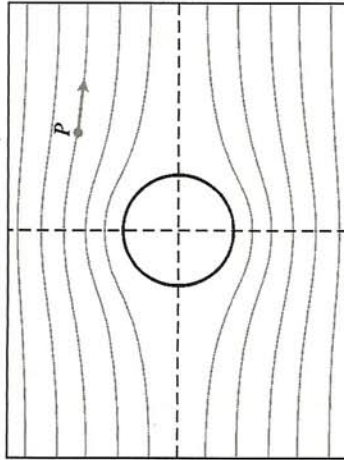
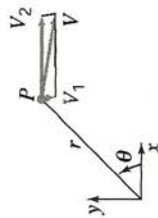
$$\psi = \psi_v + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{K}{2\pi}\ln r + Uy = \frac{K}{2\pi}\ln r + Ur\,\text{sen}\,\theta$$

$$\phi = \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = \frac{K}{2\pi}\theta - Ux = \frac{K}{2\pi}\theta - Ur\cos\theta$$

Dipolo e Escoamento Uniforme (escoamento sobre um cilindro)

$$\psi = \psi_d + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{\Lambda\,\text{sen}\,\theta}{r} + Uy = -\frac{\Lambda\,\text{sen}\,\theta}{r} + Ur\,\text{sen}\,\theta$$

$$\psi = U\left(r - \frac{\Lambda}{Ur}\right)\text{sen}\,\theta = Ur\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\text{sen}\,\theta \qquad a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}}$$

$$\phi = \phi_d + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} - Ux = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} - Ur\cos\theta$$

$$\phi = -U\left(r + \frac{\Lambda}{Ur}\right)\cos\theta = -Ur\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

Dipolo, Vórtice (sentido horário) e Escoamento Uniforme (escoamento sobre um cilindro com circulação)

$$\psi = \psi_d + \psi_v + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = -\frac{\Lambda\,\text{sen}\,\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\ln r + Uy$$

$$\psi = -\frac{\Lambda\,\text{sen}\,\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\ln r + Ur\,\text{sen}\,\theta = Ur\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\text{sen}\,\theta + \frac{K}{2\pi}\ln r$$

$$\phi = \phi_d + \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\theta - Ux$$

$$a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}};\ K < 4\pi a U \qquad \phi = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\theta - Ur\cos\theta = -Ur\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{K}{2\pi}\theta$$

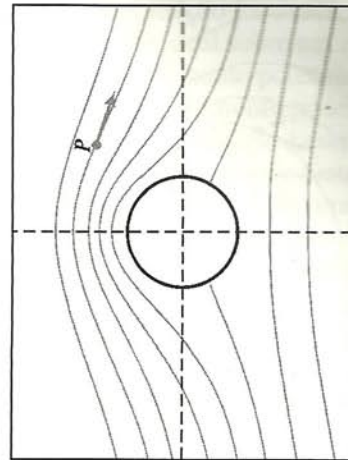
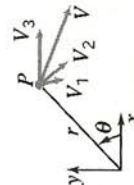
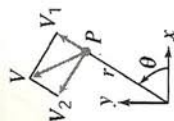
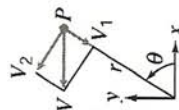



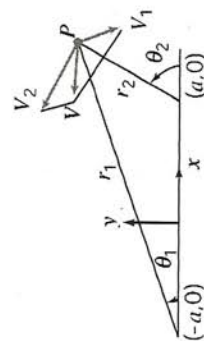
Tabela 6.2 Superposição de Escoamentos Planos Elementares (*cont.*)

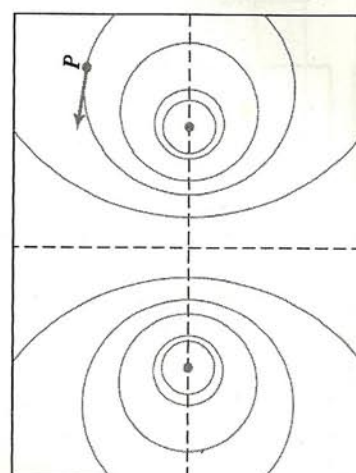
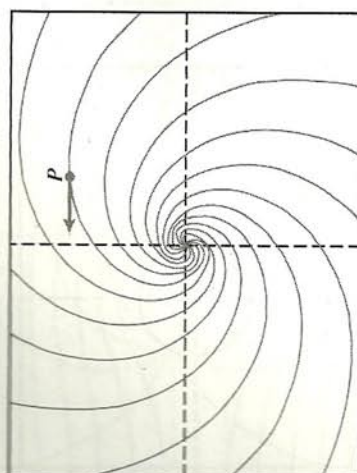
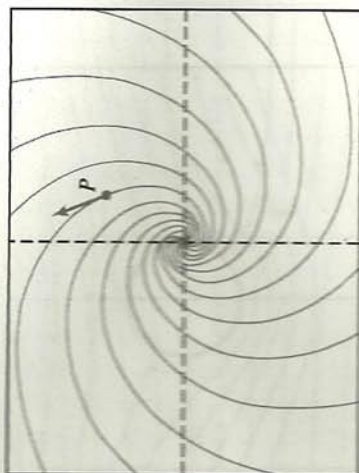
Fonte e Vórtice (vórtice em espiral)

$$\psi = \psi_{so} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta - \frac{K}{2\pi}\ln r$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi}\ln r - \frac{K}{2\pi}\theta$$

Sumidouro e Vórtice

$$\psi = \psi_{si} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{q}{2\pi}\theta - \frac{K}{2\pi}\ln r$$

$$\phi = \phi_{si} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = \frac{q}{2\pi}\ln r - \frac{K}{2\pi}\theta$$

Par de Vórtices (intensidade igual, rotação oposta, distância de separação sobre o eixo $x = 2a$)

$$\psi = \psi_{v1} + \psi_{v2} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{K}{2\pi}\ln r_1 + \frac{K}{2\pi}\ln r_2 = \frac{K}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\phi = \phi_{v1} + \phi_{v2} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{K}{2\pi}\theta_1 + \frac{K}{2\pi}\theta_2 = \frac{K}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1)$$

Ao final do século XIX, estudiosos da hidrodinâmica pura tinham fracassado na tentativa de produzir resultados que concordassem com a experiência. Escoamentos potenciais produziam formas de corpos com sustentação, mas previam arrasto nulo (o "paradoxo de d'Alembert"). Duas influências mudaram a situação: primeiro, Prandtl introduziu o conceito de camada limite e começou a desenvolver a teoria, e, segundo, o interesse na aeronáutica aumentou fortemente no início do século XX. Arrasto e sustentação para escoamentos viscosos são tratados no Cap. 9.

Prandtl demonstrou por análise matemática e através de experiências elegantemente simples que os efeitos viscosos ficam confinados a uma delgada camada limite na superfície de um corpo. Mesmo para fluidos reais, o escoamento fora da camada limite comporta-se como se o fluido tivesse viscosidade nula. Os gradientes de pressão oriundos dos escoamentos externos são impressos na camada limite. Escoamentos de camada limite são tratados no Cap. 9.

O dado mais importante para um cálculo do escoamento de um fluido real na camada limite (e assim, do arrasto sobre um corpo) é a distribuição de pressão. Desde que o campo de velocidade seja conhecido como resultado da solução do escoamento potencial, a distribuição de pressão pode ser calculada. O conhecimento do comportamento da camada limite torna possível prever o arrasto e, em alguns casos, a sustentação sobre um objeto.

Dois métodos de combinação de escoamentos elementares podem ser usados. O método direto consiste na combinação de escoamentos elementares, seguida do cálculo direto da configuração de linhas de corrente, forma do corpo, campo de velocidade, ponto de estagnação e distribuição de pressão. Diversos exemplos de configurações de escoamentos produzidos pelo método direto são dados na Tabela 6.2.

O Problema-Exemplo 6.11 ilustra o método da superposição. A combinação de um dipolo com um escoamento uniforme fornece o escoamento em regime permanente de um fluido ideal sobre um cilindro. Essa combinação foi usada para desenvolver a configuração do escoamento ideal sobre um cilindro mostrada na Fig. 2.12. A solução do escoamento potencial fornece o campo de velocidade. A equação de Bernoulli pode, então, ser usada para obter o campo de pressão. A análise é estendida no Problema-Exemplo 6.12 para incluir a geração de sustentação sobre um cilindro. Diversos exemplos adicionais de superposição são incluídos nos problemas do final deste capítulo.

Configurações complexas podem ser desenvolvidas pela combinação de escoamentos elementares. Fontes de linhas distribuídas, sumidouros e "imagens" podem ser empregados para criar corpos de formas arbitrárias. Técnicas matemáticas poderosas, tais como variáveis complexas e transformações conformes, podem ser usadas para a obtenção de campos de escoamento de geometria interessante [8-11].

O método inverso de superposição calcula a forma do corpo que produzirá uma desejada distribuição de pressão. Singularidades distribuídas — vórtices, fontes e sumidouros localizados no eixo ou na superfície do corpo — são usadas para modelar o corpo [12]. Um programa de computador complexo deve ser usado para avaliar a distribuição de singularidades necessária para produzir a desejada distribuição de pressão [13].

Atualmente, o emprego de computadores cada vez mais poderosos e o desenvolvimento de códigos computacionais mais rápidos têm permitido a solução de problemas tridimensionais complexos utilizando-se os métodos direto ou inverso [14].

EXEMPLO 6.11 — Escoamento sobre um Cilindro: Superposição de Dipolo e Escoamento Uniforme

Para o escoamento bidimensional, incompressível e irrotacional, a superposição de um dipolo e um escoamento uniforme representam o escoamento em torno de um cilindro circular. Obtenha a função de corrente e o potencial de velocidade para essa configuração de escoamento. Determine o campo de velocidade, localize os pontos de estagnação e a superfície do cilindro, e obtenha a distribuição de pressão superficial. Integre a distribuição de pressão para obter as forças de arrasto e sustentação sobre o cilindro circular.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.11

DADOS: Escoamento bidimensional, incompressível e irrotacional formado pela superposição de um dipolo e um escoamento uniforme.

DETERMINAR:
(a) A função de corrente e o potencial de velocidade.
(b) O campo de velocidade.
(c) Os pontos de estagnação.
(d) A superfície do cilindro.
(e) A distribuição de pressão superficial.
(f) A força de arrasto sobre o cilindro circular.
(g) A força de sustentação sobre o cilindro circular.

SOLUÇÃO:

Funções de corrente podem ser somadas porque o campo de escoamento é incompressível e irrotacional. Assim, da Tabela 6.1, a função de corrente para a combinação é

$$\psi = \psi_d + \psi_{uf} = -\frac{\Lambda \operatorname{sen}\theta}{r} + Ur\operatorname{sen}\theta \qquad \longleftarrow \psi$$

O potencial de velocidade é

$$\phi = \phi_d + \phi_{uf} = -\frac{\Lambda \cos\theta}{r} - Ur\cos\theta \qquad \longleftarrow \phi$$

As correspondentes componentes da velocidade são obtidas usando-se a Eq. 6.29, e são

$$V_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\Lambda \cos\theta}{r^2} + U\cos\theta$$

$$V_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\Lambda \operatorname{sen}\theta}{r^2} - U\operatorname{sen}\theta$$

O campo de velocidade é

$$\vec{V} = V_r\hat{e}_r + V_\theta\hat{e}_\theta = \left(-\frac{\Lambda\cos\theta}{r^2} + U\cos\theta\right)\hat{e}_r + \left(-\frac{\Lambda\operatorname{sen}\theta}{r^2} - U\operatorname{sen}\theta\right)\hat{e}_\theta$$

$\vec{V}$

Os pontos de estagnação estão onde $\vec{V} = V_r\hat{e}_r + V_\theta\hat{e}_\theta = 0$.

$$V_r = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r^2} + U\cos\theta = \cos\theta\left(U - \frac{\Lambda}{r^2}\right)$$

Logo, $V_r = 0$ quando $r = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}} = a$. Também,

$$V_\theta = -\frac{\Lambda\operatorname{sen}\theta}{r^2} - U\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\theta\left(U + \frac{\Lambda}{r^2}\right)$$

Logo, $V_\theta = 0$ quando $\theta = 0, \pi$.
Os pontos de estagnação são $(r, \theta) = (a, 0), (a, \pi)$.

Pontos de estagnação

Note que $V_r = 0$ ao longo de $r = a$, e isso representa o escoamento em torno de um cilindro circular, conforme mostrado na Tabela 6.2. O escoamento é irrotacional, logo a equação de Bernoulli pode ser aplicada entre dois pontos quaisquer. Aplicando a equação entre um ponto bem distante à montante e outro na superfície do cilindro (desprezando diferenças de elevações), obtemos

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$$

Então

$$p - p_\infty = \tfrac{1}{2}\rho(U^2 - V^2)$$

Ao longo da superfície, $r = a$, e

$$V^2 = V_\theta^2 = \left(-\frac{\Lambda}{a^2} - U\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta = 4U^2\operatorname{sen}^2\theta$$

onde $\Lambda = Ua^2$. Substituindo resulta

$$p - p_\infty = \tfrac{1}{2}\rho(U^2 - 4U^2\operatorname{sen}^2\theta) = \tfrac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\operatorname{sen}^2\theta)$$

ou

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - 4\operatorname{sen}^2\theta$$

Distribuição de pressão

Arrasto é a componente de força paralela à direção das linhas de corrente do escoamento livre. A força de arrasto é dada por

$$F_D = \int_A -p\,dA\cos\theta = \int_0^{2\pi} -pa\,d\theta b\cos\theta$$

em que $dA = ad\theta b$, onde b é o comprimento do cilindro normal ao diagrama. Substituindo $p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\operatorname{sen}^2\theta)$,

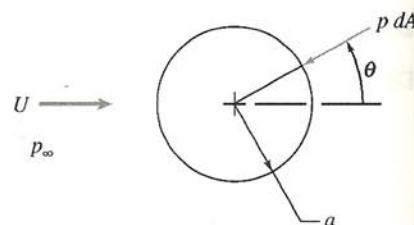
$$F_D = \int_0^{2\pi} -p_\infty ab\cos\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\operatorname{sen}^2\theta)\,ab\cos\theta\,d\theta$$

$$= -p_\infty ab\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\rho U^2 ab\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\rho U^2 ab\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$F_D = 0$$

F_D

Sustentação é a componente de força normal à direção das linhas de corrente do escoamento livre. (Por convenção, arrasto positivo é uma força para cima.) A força de arrasto é dada por

$$F_L = \int_A p\,dA(-\operatorname{sen}\theta) = -\int_0^{2\pi} pa\,d\theta\,b\operatorname{sen}\theta$$

Substituindo p obtemos

$$F_L = -\int_0^{2\pi} p_\infty ab \operatorname{sen}\theta\, d\theta - \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\operatorname{sen}^2\theta)ab \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= p_\infty ab\cos\theta\Big]_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2}\rho U^2 ab\cos\theta\Big]_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2}\rho U^2 ab\left[\frac{4\cos^3\theta}{3} - 4\cos\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$F_L = 0 \quad \longleftarrow \quad F_L$$

Esse problema ilustra as técnicas empregadas para combinar escoamentos planos elementares na formação de uma configuração de escoamento de interesse prático. Os resultados para a força de arrasto sobre um cilindro ilustram o paradoxo d'Alembert: Análise de escoamento potencial prediz arrasto zero. A força de sustentação é zero para esse escoamento porque não existe circulação (veja Problema-Exemplo 6.12 para um escoamento potencial com força de sustentação diferente de zero).

EXEMPLO 6.12 — Escoamento sobre um Cilindro com Circulação: Superposição de Dipolo, Escoamento Uniforme e Vórtice Livre de Sentido Horário

Para um escoamento bidimensional, incompressível e irrotacional, a superposição de um dipolo, um escoamento uniforme e um vórtice livre representam o escoamento em torno de um cilindro circular com circulação. Obtenha a função de corrente e o potencial de velocidade para esse modelo de escoamento, utilizando um vórtice livre com rotação em sentido horário. Determine o campo de velocidades, localize os pontos de estagnação e a superfície do cilindro, e obtenha a distribuição de pressões nessa superfície. Integre a distribuição de pressão para obter as forças de arrasto e de sustentação sobre o cilindro circular. Relacione a força de sustentação sobre o cilindro com a circulação do vórtice livre.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.12

DADOS: Escoamento bidimensional, incompressível, irrotacional formado pela superposição de um dipolo, um escoamento uniforme e um vórtice livre de sentido horário.

DETERMINAR:
- **(a)** A função de corrente e o potencial de velocidade.
- **(b)** O campo de velocidade.
- **(c)** Os pontos de estagnação.
- **(d)** A superfície do cilindro.
- **(e)** A distribuição de pressão na superfície.
- **(f)** A força de arrasto no cilindro circular.
- **(g)** A força de sustentação no cilindro circular.
- **(h)** A força de sustentação em termos da circulação do vórtice livre.

SOLUÇÃO:

Funções de corrente podem ser adicionadas porque o campo de escoamento é incompressível e irrotacional. A partir da Tabela 6.1, a função de corrente e o potencial de velocidades para um vórtice livre de sentido horário são

$$\psi_{fv} = \frac{K}{2\pi}\ln r \qquad \phi_{fv} = \frac{K}{2\pi}\theta$$

Utilizando os resultados do Problema-Exemplo 6.11, a função de corrente para a combinação é

$$\psi = \psi_d + \psi_{uf} + \psi_{fv}$$

$$\psi = -\frac{\Lambda \operatorname{sen}\theta}{r} + Ur\operatorname{sen}\theta + \frac{K}{2\pi}\ln r \quad \longleftarrow \quad \psi$$

O potencial de velocidade para a combinação é

$$\phi = \phi_d + \phi_{uf} + \phi_{fv}$$

$$\phi = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} - Ur\cos\theta + \frac{K}{2\pi}\theta \quad \longleftarrow \quad \phi$$

As correspondentes componentes da velocidade são obtidas usando as Eqs. 6.29 como

$$V_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r^2} + U\cos\theta \qquad (1)$$

$$V_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\Lambda\operatorname{sen}\theta}{r^2} - U\operatorname{sen}\theta - \frac{K}{2\pi r} \qquad (2)$$

O campo de velocidade é

$$\vec{V} = V_r\hat{e}_r + V_\theta\hat{e}_\theta$$

$$\vec{V} = \left(-\frac{\Lambda\cos\theta}{r^2} + U\cos\theta\right)\hat{e}_r + \left(-\frac{\Lambda\,\mathrm{sen}\,\theta}{r} - U\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{K}{2\pi r}\right)\hat{e}_\theta \qquad \vec{V}$$

Os pontos de estagnação estão localizados onde $\vec{V} = V_r\hat{e}_r + V_\theta\hat{e}_\theta = 0$. Da Eq. 1,

$$V_r = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r^2} + U\cos\theta = \cos\theta\left(U - \frac{\Lambda}{r^2}\right)$$

Então, $V_r = 0$ quando $r = \sqrt{\Lambda/U} = a$ — Superfície do cilindro

Os pontos de estagnação são localizados sobre $r = a$. Substituindo na Eq. 2 com $r = a$,

$$V_\theta = -\frac{\Lambda\,\mathrm{sen}\,\theta}{a^2} - U\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{K}{2\pi a}$$

$$= -\frac{\Lambda\,\mathrm{sen}\,\theta}{\Lambda/U} - U\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{K}{2\pi a}$$

$$V_\theta = -2U\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{K}{2\pi a}$$

Então $V_\theta = 0$ ao longo de $r = a$ quando

$$\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{K}{4\pi Ua} \quad \text{ou} \quad \theta = \mathrm{sen}^{-1}\left[\frac{-K}{4\pi Ua}\right]$$

Pontos de estagnação: $r = a \quad \theta = \mathrm{sen}^{-1}\left[\dfrac{-K}{4\pi Ua}\right]$ — Pontos de estagnação

Como no Problema-Exemplo 6.11, $V_r = 0$ ao longo de $r = a$, logo esse campo de escoamento representa uma vez mais o escoamento em torno de um cilindro circular, conforme mostrado na Tabela 6.2. Para $K = 0$, a solução é idêntica àquela do Problema-Exemplo 6.11.

A presença do vórtice livre ($K > 0$) move os pontos de estagnação para baixo do centro do cilindro. O vórtice livre altera portanto a simetria vertical do campo de escoamento. O campo de escoamento possui dois pontos de estagnação para uma faixa de intensidade de vórtice entre $0 \leq K \leq 4\pi Ua$.

Um único ponto de estagnação ocorre em $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ quando $K = 4\pi Ua$.

Mesmo com o vórtice livre presente, o campo de escoamento é irrotacional e a equação de Bernoulli pode ser aplicada entre dois pontos quaisquer. Aplicando a equação entre um ponto distante à montante e outro ponto sobre a superfície do cilindro obtemos

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$$

Desprezando as diferenças de elevação,

$$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho(U^2 - V^2) = \frac{1}{2}\rho U^2\left[1 - \left(\frac{U}{V}\right)^2\right]$$

Ao longo da superfície $r = a$ e $V_r = 0$, logo

$$V^2 = V_\theta^2 = \left(-2U\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{K}{2\pi a}\right)^2$$

e

$$\left(\frac{V}{U}\right)^2 = 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \frac{2K}{\pi Ua}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{K^2}{4\pi^2U^2a^2}$$

Então

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2\left(1 - 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta - \frac{2K}{\pi Ua}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{K^2}{4\pi^2U^2a^2}\right) \qquad p(\theta)$$

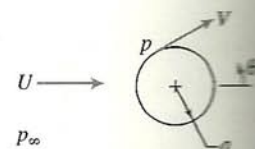
Arrasto é a componente da força paralela à direção das linhas de corrente do escoamento livre. Como no Problema-Exemplo 6.11, a força de arrasto é dada por

$$F_D = \int_A -p\,dA\cos\theta = \int_0^{2\pi} -pa\,d\theta\,b\cos\theta$$

em que $dA = ad\theta b$, onde b é o comprimento do cilindro normal ao diagrama.

Comparando as distribuições de pressão, o vórtice livre contribui somente para os termos contendo o fator K. A contribuição desses termos para a força de arrasto é

$$\frac{F_{D_{fv}}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{2K}{\pi Ua}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{K^2}{4\pi^2U^2a^2}\right)ab\cos\theta\,d\theta \qquad (3)$$

$$\frac{F_{D_{fv}}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2K}{\pi Ua}ab\frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{2}\Bigg]_0^{2\pi} + \frac{K^2}{4\pi^2U^2a^2}ab\,\mathrm{sen}\,\theta\Bigg]_0^{2\pi} = 0 \qquad F_D$$

Sustentação é a componente da força normal à direção das linhas de corrente do escoamento livre. (Força para cima é definida como sustentação positiva.) A força de sustentação é dada por

$$F_L = \int_A -p\,dA\,\mathrm{sen}\,\theta = \int_0^{2\pi} -pa\,d\theta\,b\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Comparando a distribuição de pressões, o vórtice livre contribui somente para os termos contendo o fator K. A contribuição desses termos na força de sustentação é

$$\frac{F_{L_{fv}}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{2K}{\pi U a}\mathrm{sen}\,\theta + \frac{K^2}{4\pi^2U^2a^2}\right)ab\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2K}{\pi U a}\int_0^{2\pi} ab\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta + \frac{K^2}{4\pi^2U^2a^2}\int_0^{2\pi} ab\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2Kb}{\pi U}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{4}\right]_0^{2\pi} + \frac{K^2b}{4\pi^2U^2a}\cos\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$\frac{F_{L_{fv}}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2Kb}{\pi U}\left[\frac{2\pi}{2}\right] = \frac{2Kb}{U}$$

Então $F_{L_{fv}} = \rho U K b.$ $\qquad F_L$

A circulação é definida pela Eq. 5.18 como

$$\Gamma \equiv \oint \vec{V}\cdot d\vec{s}$$

Sobre a superfície do cilindro, $r = a$, e $\vec{V} = V_\theta \hat{e}_\theta$, logo

$$\Gamma = \int_0^{2\pi}\left(-2U\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{K}{2\pi a}\right)\hat{e}_\theta \cdot a\,d\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} 2Ua\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi}\frac{K}{2\pi}\,d\theta$$

$$\Gamma = -K$$

Circulação

Substituindo na expressão para sustentação,

$$F_L = \rho U K b = \rho U(-\Gamma)b = -\rho U \Gamma b$$

ou a força de sustentação por unidade de comprimento do cilindro é

$$\frac{F_L}{b} = -\rho U \Gamma$$

$\frac{F_L}{b}$

Esse problema ilustra de novo a técnica usada para combinar escoamentos elementares planos para formar um modelo de escoamento de interesse prático. Como no Problema-Exemplo 6.11, a análise de escoamento potencial prediz arrasto zero. Porém, a força de sustentação é diferente de zero desde que exista circulação. A expressão resultante para a sustentação por unidade de comprimento do cilindro, $\frac{F_L}{b} = -\rho U \Gamma$, é geral. A relação é válida para qualquer campo de escoamento potencial plano. (O sinal menos também é geral. Como mostrado na figura neste exemplo, o escoamento livre é da esquerda para a direita. Um vórtice com rotação em sentido horário é necessário para produzir sustentação positiva (para cima). A circulação Γ é negativa para um vórtice horário. Substituindo $U > 0$ e $\Gamma < 0$ na expressão para sustentação obtemos $F_L > 0$.

6.7 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o estudo do Cap. 6, você deverá ser capaz de:

1. Escrever a equação de Euler (a) na forma vetorial, (b) em coordenadas retangulares, (c) em coordenadas cilíndricas e (d) em coordenadas de linha de corrente.
2. Integrar a equação de Euler ao longo de uma linha de corrente num escoamento em regime permanente para obter a equação de Bernoulli. Enunciar as restrições ao uso da equação de Bernoulli.
3. Definir pressão estática, pressão de estagnação e pressão dinâmica.
4. Para escoamento em regime permanente, incompressível e não viscoso através de um tubo de corrente, enunciar as condições sob as quais a primeira lei da termodinâmica reduz-se à equação de Bernoulli.

*5. Escrever a equação de Bernoulli para um escoamento não permanente ao longo de uma linha de corrente. Enunciar as restrições quanto ao seu emprego.

*6. Para um escoamento em regime permanente, não viscoso, incompressível e irrotacional, mostrar que a equação de Bernoulli pode ser aplicada entre dois pontos quaisquer no campo de escoamento.

*7. Para um campo de escoamento bidimensional, irrotacional, incompressível:
   (a) Dado o campo de velocidade, determinar o potencial de velocidade, ϕ.

*Esses objetivos aplicam-se às seções que podem ser omitidas sem haver perda de continuidade no material do texto.

(b) Dado o potencial de velocidade, determinar o campo de velocidade.
(c) Mostrar que linhas de ψ constante e de ϕ constante são ortogonais.
(d) Dado ψ, determinar ϕ (e vice-versa).

*8. Dada a função de corrente, ψ, para um escoamento bidimensional e irrotacional em torno de um corpo, determinar:
(a) a equação da superfície do corpo.
(b) a distribuição de pressão ao longo da superfície do corpo.
(c) as forças de arrasto e sustentação agindo sobre o corpo.

9. Resolver os problemas do final do capítulo que se relacionam com o material que você estudou.

*Esses objetivos aplicam-se às seções que podem ser omitidas sem haver perda de continuidade no material do texto.

REFERÊNCIAS

1. Shaw, R., "The Influence of Hole Dimensions on Static Pressure Measurements," *J. Fluid Mech., 7,* Part 4, April 1960, pp. 550–564.
2. Chue, S. H., "Pressure Probes for Fluid Measurement," *Progress in Aerospace Science, 16,* 2, 1975, pp. 147–223.
3. United Sensor Corporation, 3 Northern Blvd., Amherst, NH 03031, phone (603) 672-0909.
4. Robertson, J. M., *Hydrodynamics in Theory and Application.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1965.
5. Streeter, V. L., *Fluid Dynamics.* New York: McGraw-Hill, 1948.
6. Vallentine, H. R., *Applied Hydrodynamics.* London: Butterworths, 1959.
7. Rouse, H., and S. Ince, *History of Hydraulics.* New York: Dover, 1957.
8. Lamb, H., *Hydrodynamics.* New York: Dover, 1945.
9. Milne-Thomson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics,* 4th ed. New York: Macmillan, 1960.
10. Karamcheti, K., *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics.* New York: Wiley, 1966.
11. Kirchhoff, R. H., *Potential Flows: Computer Graphic Solutions.* New York: Marcel Dekker, 1985.
12. Kuethe, A. M., and C.-Y. Chow, *Foundations of Aerodynamics: Bases of Aerodynamic Design,* 4th ed. New York: Wiley, 1986.
13. Hess, J. L., and A. M. O. Smith, "Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies," in *Progress in Aeronautical Sciences,* Volume 8, ed. by D. Kuchemann. Oxford: Pergamon Press, 1966.
14. Shang, J. S., "An Assessment of Numerical Solutions of the Complete Navier-Stokes Equations," *AIAA J. Aircraft, 22,* 5, May 1985, pp. 353–370.

PROBLEMAS

6.1 Um campo de escoamento incompressível é dado por $\vec{V}=(Ax+By)\hat{i}-Ay\hat{j}$, onde $A = 1\ \text{s}^{-1}$, $B = 2\ \text{s}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. Determine a magnitude e o sentido da aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (1, 2)$. Determine o gradiente de pressão no mesmo ponto, se $\vec{g}=-g\hat{j}$ e o fluido for a água.

6.2 Considere o campo de escoamento com velocidade dada por $\vec{V}=Axy\hat{i}-By^2\hat{j}$; onde $A = 2\ \text{pés}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, $B = 1\ \text{pé}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em pés. A massa específica é 2 slug/pé^3 e a gravidade atua no sentido negativo dos y. Calcule a aceleração de uma partícula fluida e o gradiente de pressão no ponto $(x, y) = (1, 1)$.

6.3 Um escoamento horizontal de água é descrito pelo campo de velocidade $\vec{V}=(Ax+Bt)\hat{i}+(-Ay+Bt)\hat{j}$, onde $A = 10\ \text{s}^{-1}$, $B = 5\ \text{pés}\cdot\text{s}^{-2}$, x e y são em pés e t é em segundos. Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (1, 5)$ em $t = 10$ s. Avalie $\partial p/\partial x$, nas mesmas condições.

6.4 Um campo de velocidade num fluido com massa específica de 1500 kg/m^3 é dado por $\vec{V}=(Ax-By)t\hat{i}-(Ay+Bx)t\hat{j}$, onde $A = 1\ \text{s}^{-2}$, $B = 2\ \text{s}^{-2}$, x e y são em metros e t é em segundos. As forças de campo são desprezíveis. Avalie ∇p no ponto $(x, y) = (1, 2)$ para $t = 1$ s.

6.5 Considere o campo de escoamento dado por $\vec{V}=(Axy-Bx^2)\hat{i}+(Axy-By^2)\hat{j}$, onde $A = 2\ \text{pés}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, $B = 1\ \text{pé}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em pés. A densidade é 2 slug/pé^3 e a aceleração da gravidade age na direção negativa do eixo de y. Calcule a aceleração de uma partícula fluida e o gradiente de pressão no ponto $(x, y) = (1, 1)$.

6.6 A componente x da velocidade num campo de escoamento incompressível é dada por $u = Ax$, onde $A = 2\ \text{s}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. A pressão no ponto $(x, y) = (0, 0)$ é $p_0 = 190$ kPa(manométrica). A massa específica é $\rho = 1{,}50$ kg/m^3 e o eixo z é vertical. Avalie a componente y da velocidade de mais simples possível. Calcule a aceleração do fluido e determine o gradiente de pressão no ponto $(x, y) = (2, 1)$. Determine a distribuição de pressão ao longo do eixo positivo de x.

6.7 Num escoamento sem atrito e incompressível, o campo de velocidade em m/s e a força de campo são dados por $\vec{V}=Ax\hat{i}-Ay\hat{j}$ e $\vec{g}=-g\hat{k}$; as coordenadas são medidas em metros. A pressão é p_0 no ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Obtenha uma expressão para o campo de pressão, $p(x, y, z)$.

6.8 A distribuição de velocidade num campo de escoamento bidimensional e permanente no plano xy é $\vec{V}=(Ax-B)\hat{i}+(C-Ay)\hat{j}$, onde $A = 2\ \text{s}^{-1}$, $B = 5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ e $C = 3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; as

coordenadas são medidas em metros e a distribuição das forças de campo é $\vec{g} = -g\hat{k}$. O campo de velocidade representa o escoamento de um fluido incompressível? Encontre o ponto de estagnação do campo de escoamento. Obtenha uma expressão para o gradiente de pressão no campo de escoamento. Avalie a diferença de pressão entre o ponto $(x, y) = (1, 3)$ e a origem se a massa específica é 1,2 kg/m³.

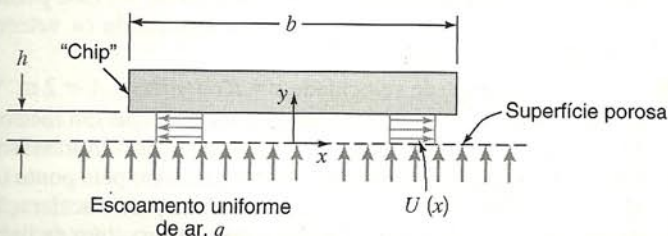
6.9 Um líquido incompressível com massa específica igual a 900 kg/m³ e viscosidade desprezível escoa em regime permanente através de um tubo horizontal de diâmetro constante. Em uma seção porosa de comprimento $L = 0{,}3$ m, líquido é removido a uma razão constante por unidade de comprimento de tal forma que a velocidade uniforme axial no tubo é $u(x) = U(1 - x/2L)$, onde $U = 5$ m/s. Desenvolva expressões para a aceleração de uma partícula fluida ao longo da linha de centro da seção porosa para o gradiente de pressão ao longo da linha de centro. Avalie na pressão de saída se a pressão na entrada da seção porosa é igual a 35 kPa (manométrica).

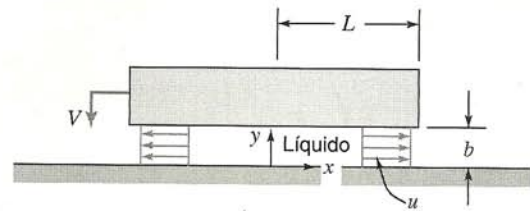
6.10 Para o escoamento do Problema 4.101, mostre que a variação da velocidade radial uniforme é $V_r = Q/2\pi rh$. Obtenha expressões para a componente r de uma partícula fluida na fresta e para a variação de pressão como função da distância radial em relação aos orifícios centrais.

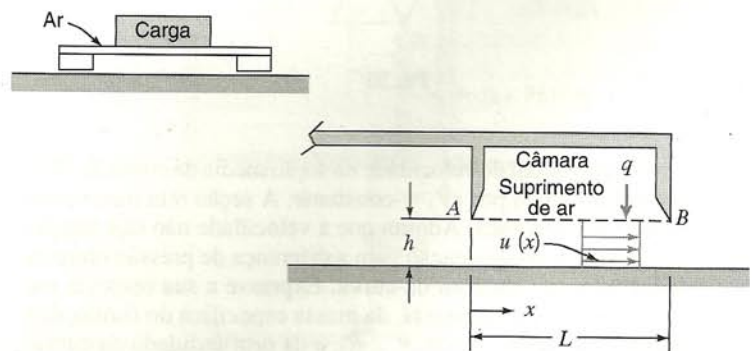
6.11 Um fluido incompressível, não viscoso, flui para dentro de um tubo redondo, horizontal, através de sua parede porosa. O tubo é fechado na extremidade esquerda e o escoamento descarrega para a atmosfera pela extremidade direita. Simplificando, considere a componente x da velocidade no tubo uniforme em qualquer seção. A massa específica do fluido é ρ, o diâmetro e o comprimento do tubo são D e L, respectivamente, e a velocidade uniforme de entrada do fluido é v_0. O escoamento é em regime permanente. Obtenha uma expressão algébrica para a componente x da aceleração de uma partícula fluida localizada na posição x, em termos de v_0, x e D. Determine uma expressão para o gradiente de pressão, $\partial p/\partial x$, na posição x. Integre a fim de obter uma expressão para a pressão manométrica em $x = 0$.

6.12 Considere o escoamento do Problema 5.42. Avalie a magnitude e direção da força de pressão líquida que age sobre a placa superior entre r_i e R, se $r_i = R/2$.

6.13 Considere novamente o campo de escoamento do Problema 5.57. Admita que o escoamento é incompressível com $\rho = 1{,}23$ kg/m³ e atrito desprezível. Admita ainda que a velocidade vertical do escoamento de ar é $v_0 = 15$ mm/s, que a meia largura da cavidade é $L = 22$ mm e a sua altura é $h = 1{,}2$ mm. Calcule o gradiente de pressão em $(x, y) = (L, h)$. Obtenha uma equação para as linhas de corrente do escoamento dentro da cavidade.

6.14 Um "chip" retangular de microcircuito flutua numa fina camada de ar, com espessura $h = 0{,}5$ mm, acima de uma superfície porosa. A largura do "chip" é $b = 20$ mm, conforme mostrado. O seu comprimento, L, é muito grande na direção perpendicular ao plano da figura. Não há escoamento na direção z. Admita que o escoamento na direção x, na fresta sob o "chip", é uniforme. O escoamento é incompressível e os efeitos de atrito podem ser desprezados. Use um volume de controle adequadamente escolhido para mostrar que $U(x) = qx/h$ na fresta. Determine uma expressão geral para a aceleração de uma partícula fluida na fresta. Avalie a aceleração máxima. Obtenha uma expressão para o gradiente de pressão, $\partial p/\partial x$, e esboce a distribuição de pressão sob o "chip". Mostre p_{atm} no seu esboço. A força líquida de pressão sobre o "chip" é orientada para cima ou para baixo? Explique. Para as condições mostradas, com $q = 0{,}06$ m³/s/m, estime a massa por unidade de comprimento do "chip".

P6.14

6.15 Uma camada de líquido separa duas superfícies planas, conforme mostrado. A superfície inferior é estacionária; a superfície superior move-se para baixo à velocidade constante, V. A superfície móvel tem largura, w, perpendicular ao plano da figura, e $w >> L$. A camada de líquido incompressível, de massa específica ρ, é espremida para fora do espaço entre as superfícies. Admita que o escoamento é uniforme em qualquer seção e despreze a viscosidade como primeira aproximação. Use um volume de controle adequadamente escolhido para mostrar que $u = Vx/b$ dentro da fresta, onde $b = b_0 - Vt$. Obtenha uma expressão algébrica para a aceleração de uma partícula fluida localizada em x. Determine o gradiente de pressão, $\partial p/\partial x$, na camada líquida. Determine a distribuição de pressão, $p(x)$. Obtenha uma expressão para a força líquida de pressão que atua na superfície plana (móvel) superior.

P6.15

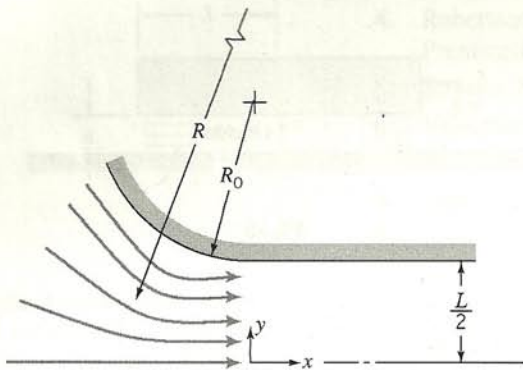
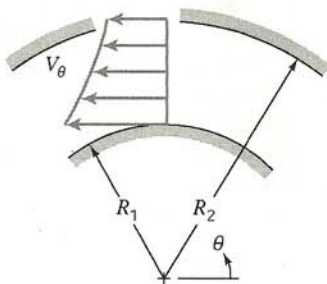
6.16 Grandes pesos podem ser movidos com relativa facilidade sobre colchões de ar empregando-se uma plataforma de carga conforme mostrado. O ar é suprido da câmara através da superfície porosa AB. Ele penetra no espaço entre a carga e o piso verticalmente à velocidade uniforme, q. Uma vez ali, todo o ar flui no sentido positivo de x (não há escoamento através do plano localizado em $x = 0$). Admita que o escoamento de ar na fresta é incompressível e uniforme em cada seção, com velocidade $u(x)$, conforme mostrado na vista ampliada. Embora a fresta seja estreita ($h << L$), despreze efeitos de atrito em primeira aproximação. Use um volume de controle adequadamente escolhido para mostrar que $u(x) = qx/h$, na fresta. Calcule a aceleração de uma partícula fluida na fresta. Avalie o gradiente de pressão, $\partial p/\partial x$, e esboce a distribuição de pressão dentro da fresta. Certifique-se de indicar a pressão em $x = L$.

P6.16

6.17 Ar a 20 psia e 100°F escoa em torno de um canto arredondado na entrada de um difusor. A velocidade do ar é 150 pés/s, e o raio de curvatura das linhas de corrente é 3 pol. Determine a magnitude da aceleração centrípeta experimentada por uma partícula fluida percorrendo o canto. Expresse a sua resposta em gs. Avalie o gradiente de pressão, $\partial p/\partial r$.

6.18 Escoamento permanente, incompressível e sem atrito, da direita para a esquerda sobre um cilindro circular estacionário de raio a, é dado pelo campo de velocidade

$$\vec{V} = U\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1\right]\cos\theta\,\hat{e}_r + U\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 1\right]\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta$$

Considere o escoamento ao longo da linha de corrente formando a superfície do cilindro, $r = a$. Expresse as componentes do gradiente de pressão em termos do ângulo θ. Trace um gráfico da velocidade, V, como função de r, ao longo da linha radial $\theta = \pi/2$ para $r > a$.

6.19 Para modelar a distribuição de velocidade na seção curva de entrada de um túnel de vento, o raio de curvatura das linhas de corrente é expresso como $R = LR_0/2y$. Como primeira aproximação, admita que a velocidade do ar ao longo de cada linha de corrente é $V = 20$ m/s. Avalie a variação de pressão de $y = 0$ até a parede do túnel em $y = L/2$, se $L = 150$ mm e $R_0 = 0{,}6$ m.

P6.19

P6.20

6.20 A variação radial de velocidade na seção média da curva de 180° mostrada é dada por rV_θ = constante. A seção reta transversal da curva é quadrada. Admita que a velocidade não seja função de z. Deduza uma equação para a diferença de pressão entre os lados interno e externo da curva. Expresse a sua resposta em termos da vazão em massa, da massa específica do fluido, dos parâmetros geométricos, R_1 e R_2, e da profundidade da curva, $h = R_1 - R_2$.

6.21 O campo de velocidade, no plano horizontal xy, em um escoamento bidimensional, incompressível e não viscoso é dado por $\vec{V}=(Ax+B)\hat{i}-Ay\hat{j}$, onde $A = 1\ \text{s}^{-1}$ e $B = 2$ m/s; x e y são medidos em metros. Mostre que as linhas de corrente para esse escoamento são dadas por $(x + B/A)y = constante$. Plote as linhas de corrente passando pelos pontos $(x, y) = (1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 2)$. No ponto $(x, y) = (1, 2)$, avalie e plote o vetor aceleração e o vetor velocidade. Determine a componente da aceleração ao longo da linha de corrente nesse mesmo ponto; expresse-a como um vetor. Avalie o gradiente de pressão ao longo da linha de corrente no mesmo ponto se o fluido for o ar. Que afirmação, se há alguma, você pode fazer relativa aos valores da pressão nos pontos $(1, 1)$ e $(2, 2)$?

6.22 Considere o campo de velocidade $\vec{V}=(A/x)\hat{i}+(Ay/x^2)\hat{j}$, onde $A = 7{,}25\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, e as coordenadas são medidas em metros. Mostre que esse é um possível escoamento incompressível. Determine a equação da linha de corrente passando pelo ponto $(x, y) = (2, 1)$. Deduza uma expressão algébrica para a aceleração da partícula fluida ao longo da linha de corrente nesse ponto.

6.23 Um campo de velocidade é dado por $\vec{V}=Axy\hat{i}+By^2\hat{j}$; $A = 0{,}2\ \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, B é uma constante e as coordenadas são medidas em metros. Determine o valor e unidades para B se esse campo de velocidade representar um escoamento incompressível. Calcule a aceleração de uma partícula de fluido no ponto $(x, y) = (2, 1)$. Avalie a componente da aceleração da partícula normal ao vetor velocidade nesse ponto.

6.24 A componente y da velocidade num campo de escoamento bidimensional incompressível é dada por $v = -Axy$, onde v é em m/s, as coordenadas são medidas em metros, e $A = 1\ \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Não há componente ou variação de velocidade na direção z. Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (1, 2)$. Estime o raio de curvatura da linha de corrente que passa por esse ponto. Trace um gráfico da linha de corrente mostrando os vetores velocidade e aceleração.

6.25 A componente x da velocidade num campo de escoamento bidimensional incompressível é dada por $u = Ax^2$; as coordenadas são medidas em pés e $A = 1\ \text{pé}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Não há componente ou variação de velocidade na direção z. Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (1, 2)$. Estime o raio de curvatura da linha de corrente que passa por esse ponto. Trace um gráfico da linha de corrente mostrando os vetores velocidade e aceleração.

6.26 A componente x da velocidade num campo de escoamento bidimensional incompressível é dada por $u = Axy$; as coordenadas são medidas em pés, e $A = 2\ \text{pé}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Não há componente ou variação de velocidade na direção z. Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (2, 1)$. Estime o raio de curvatura da linha de corrente que passa por esse ponto. Trace um gráfico da linha de corrente mostrando os vetores velocidade e aceleração.

6.27 A componente y da velocidade num campo de escoamento bidimensional incompressível é dada por $v = Ay^2$; as coordenadas são medidas em metros e $A = 1\ \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Não há componente ou variação de velocidade na direção z. Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x, y) = (2, 1)$. Estime o raio de curvatura da linha de corrente que passa por esse ponto. Trace um gráfico da linha de corrente mostrando os vetores velocidade e aceleração.

6.28 Considere o campo de velocidade $\vec{V}=Ax^2\hat{i}-Bxy\hat{j}$; $A = 2\ \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $B = 4\ \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. Mostre que esse é um possível escoamento incompressível. Obtenha a equação da linha de corrente passando pelo ponto $(x, y) = (1, 2)$. Deduza uma expressão algébrica para a aceleração de uma partícula de fluido. Estime o raio de curvatura da linha de corrente em $(x, y) = (1, 2)$.

6.29 Água escoa a uma velocidade de 3 m/s. Calcule a pressão dinâmica desse escoamento. Expresse sua resposta em milímetros de mercúrio.

6.30 Calcule a pressão dinâmica que corresponde à velocidade de 100 km/h em ar padrão. Expresse sua resposta em milímetros de água.

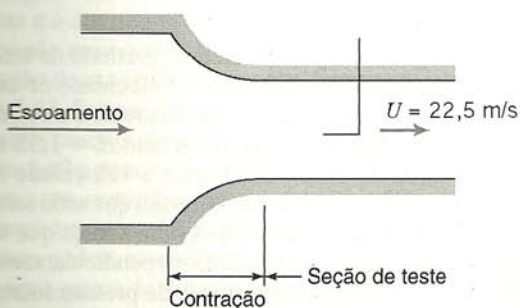
6.31 Calcule a mínima redução em pressão estática necessária para criar uma velocidade de escoamento de ar de 25 m/s numa seção de teste do túnel de vento de sucção do Problema 6.36. Expresse sua resposta em milímetros de água.

6.32 Um tubo de pitot-estática é usado para medir a velocidade do ar nas condições padrão num ponto de um escoamento. A fim de assegurar que o escoamento possa ser considerado incompressível para cálculos com precisão de engenharia, a velocidade deve ser mantida em 100 m/s ou menos. Determine a deflexão do manômetro, em milímetros de água, que corresponde à velocidade máxima desejada.

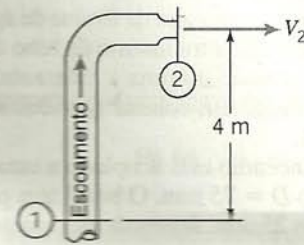
6.33 Um jato de ar de um bocal é lançado perpendicularmente a uma parede na qual se localiza uma tomada de pressão. Um manômetro conectado à tomada mostra uma altura de carga de 0,14 pol. de mercúrio acima da pressão atmosférica. Determine a velocidade aproximada do ar que sai do bocal se ele está a 40°F e 14,7 psia.

6.34 Trabalhos de manutenção em sistemas hidráulicos de alta pressão exigem cuidados especiais. Um pequeno vazamento pode causar um jato de fluido hidráulico de alta velocidade que pode penetrar na pele e provocar sérios ferimentos (por isso, os mecânicos são orientados a usar um pedaço de papel ou cartão rígido, e *não o dedo*, para procurar vazamentos). Calcule e plote a velocidade de um jato de vazamento, como função da pressão do sistema, para pressões até 40 MPa (manométrica). Explique como um jato de alta velocidade de fluido hidráulico pode causar ferimentos.

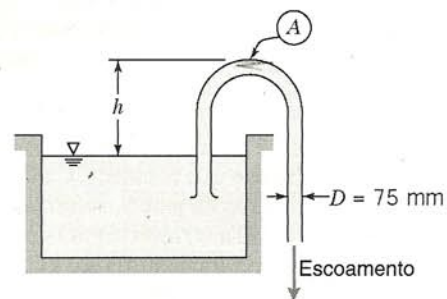
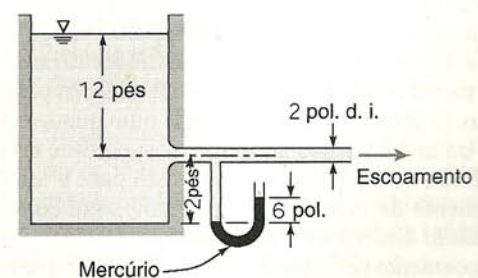
6.35 Um túnel de vento em circuito aberto aspira ar da atmosfera através de um bocal com perfil aerodinâmico. Na seção de teste, onde o escoamento é retilíneo e aproximadamente uniforme, uma tomada de pressão estática é instalada na parede do túnel. Um manômetro conectado à tomada mostra que a pressão estática dentro do túnel é de 45 mm de água abaixo da pressão atmosférica. Admita que o ar é incompressível, a 25°C e 100 kPa (absoluta). Calcule a velocidade do ar na seção de teste do túnel de vento.

6.36 São mostradas a contração de entrada e a seção de teste de um túnel de vento de laboratório. A velocidade do ar na seção de teste é $U = 22{,}5$ m/s. Um tubo de carga total apontado para montante indica que a pressão de estagnação na linha de centro da seção de teste é 6,0 mm de água abaixo da pressão atmosférica. A pressão barométrica e a temperatura corrigidas no laboratório são 99,1 kPa (absoluta) e 23°C. Avalie a pressão dinâmica na linha de centro da seção de teste do túnel de vento. Calcule a pressão estática no mesmo ponto. Qualitativamente, compare a pressão estática na parede do túnel com aquela na linha de centro. Explique por que as duas podem não ser idênticas.

P6.36

6.37 O carrinho mostrado no Problema 4.106 rola com atrito desprezível. O carrinho é acelerado para a direita. A velocidade do jato é $V = 40$ m/s. A área do jato permanece constante em $A = 25$ mm². Despreze forças viscosas entre a água e a pá. Quando o carrinho atinge uma velocidade $U = 15$ m/s, calcule a pressão de estagnação da água deixando o bocal com respeito a um observador fixo, a pressão de estagnação do jato de água deixando o bocal com respeito a um observador sobre a pá e a velocidade absoluta do jato deixando a pá com respeito a um observador fixo. Como as forças viscosas afetariam essa última pressão de estagnação, isto é, as forças viscosas aumentariam, diminuiriam ou deixariam invariável essa pressão de estagnação? Justifique sua resposta.

6.38 Água escoa em regime permanente pelo tubo vertical de 0,1 m de diâmetro e é descarregada à pressão atmosférica pelo bocal com 0,05 m de diâmetro. A velocidade da corrente na saída do bocal deve ser de 20 m/s. Calcule a pressão manométrica mínima requerida na seção ①, admitindo escoamento sem atrito.

P6.38

6.39 Água escoa num tubo circular. Numa seção, o diâmetro é 0,3 m, a pressão estática é 260 kPa (manométrica), a velocidade é 3 m/s e a elevação é 10 m acima do nível do solo. Numa seção à jusante ao nível do solo, o diâmetro do tubo é 0,15 m. Determine a pressão manométrica na seção à jusante, desprezando os efeitos de atrito.

6.40 Pode-se considerar que a água escoa sem atrito através do sifão. A vazão em volume é 0,03 m³/s, a temperatura é 20°C e o diâmetro do tubo é 75 mm. Calcule a altura máxima permissível, h, de modo que a pressão no ponto A fique acima da pressão de vapor da água.

P6.40

P6.41

6.41 Água flui de um tanque muito grande através de um tubo de 2 pol. de diâmetro. O líquido escuro no manômetro é mercúrio. Estime a velocidade no tubo e a vazão de descarga.

6.42 Uma corrente de líquido movendo-se a baixa velocidade deixa um bocal apontado diretamente para baixo. A velocidade pode ser considerada uniforme na seção de saída do bocal e os efeitos de atrito podem ser ignorados. Na saída do bocal, localizada na cota z_0, a velocidade e a área do jato são V_0 e A_0, respectivamente. Determine a variação da área do jato com a elevação.

6.43 Numa experiência de laboratório, a água flui radialmente para fora, à velocidade moderada, através do espaço entre discos planos paralelos. O perímetro dos discos é aberto para a atmosfera. Os discos têm diâmetro $D = 150$ mm e o espaçamento entre eles é $h = 0{,}8$ mm. A vazão em massa de água medida é $\dot{m} = 305$ g/s. Admitindo escoamento sem atrito no espaço entre os discos, estime a pressão estática teórica, naquele espaço, no raio $r = 50$ mm. Na situação de laboratório, onde algum atrito existe, a pressão medida no mesmo local seria acima ou abaixo do valor teórico? Por quê?

6.44 Considere novamente o bocal borrifador plano do Problema 4.75. Admita que a espessura da lâmina de água deixando o bocal é $t = 0{,}5$ mm e o diâmetro interno do tubo de entrada é $D_1 = 20$ mm. Avalie a pressão mínima a montante, p_1, necessária para produzir uma vazão em volume $Q = 3{,}0$ m³/h através do conjunto do bocal.

6.45 Um bocal de incêndio está acoplado a uma mangueira com diâmetro interno $D = 75$ mm. O bocal tem perfil suave e diâmetro de saída $d = 25$ mm. A pressão de projeto na entrada do bocal é $p_1 = 689$ kPa (manométrica). Avalie a máxima vazão em volume possível para o bocal.

6.46 Considere o escoamento de ar permanente, incompressível e sem atrito sobre a asa de um avião. O ar que se aproxima da asa está a 10 psia, 40°F e tem uma velocidade de 200 pés/s em relação à asa. Num certo ponto do escoamento, a pressão é $-0{,}40$ psi (manométrica). Calcule a velocidade do ar em relação à asa nesse ponto.

6.47 A admissão de água do mar para refrigeração de um reator deve ser localizada no casco externo de um submarino nuclear. A velocidade máxima do submarino submerso é 35 nós. No local da admissão, a velocidade da água paralela ao casco é 20 nós, quando o submarino se move à velocidade máxima. A admissão de água se dá a 3,5 m abaixo da linha de centro do casco. Determine a pressão estática máxima que pode ser esperada na admissão a 100 m abaixo da superfície livre.

6.48 Um barômetro de mercúrio é transportado num carro num dia sem vento. A temperatura é de 20°C e a altura corrigida do barômetro é de 761 mm de mercúrio. Uma janela é ligeiramente aberta quando o carro viaja a 105 km/h. A leitura do barômetro no carro em movimento é 5 mm mais baixa do que quando o carro está parado. Explique o que acontece. Calcule a velocidade local do ar fluindo ao lado da janela, *relativa* ao carro.

6.49 Uma pessoa num automóvel a 60 mph segura um tubo de pitot-estática afastado da janela, colocando-o face à corrente de ar no escoamento não perturbado. O tubo está conectado a um manômetro diferencial dentro do carro. Admitindo ausência de vento, determine a leitura do manômetro que seria observada. Qual seria a leitura do manômetro se o carro trafegasse contra um vento de 20 mph?

6.50 Um carro de corrida de Indianápolis trafega a 98,3 m/s numa reta. O engenheiro da equipe deseja localizar uma tomada de ar na carroceria para obter ar de refrigeração para as vestes do piloto. O plano é colocar a tomada num ponto em que a velocidade do ar é 25,5 m/s ao longo da superfície do carro. Calcule a pressão estática no local proposto para a tomada. Expresse o aumento de pressão acima do ambiente como uma fração da pressão dinâmica da corrente livre.

6.51 Escoamento permanente, sem atrito, incompressível e da esquerda para a direita sobre um cilindro circular estacionário de raio a é representado pelo campo de velocidade

$$\vec{V} = U\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\cos\theta\,\hat{e}_r - U\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta$$

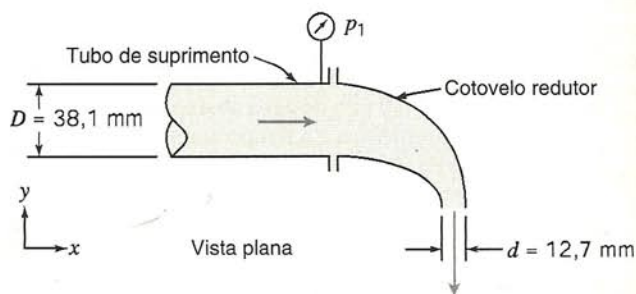
Obtenha uma expressão para a distribuição de pressão ao longo da linha de corrente formando a superfície do cilindro, $r = a$. Determine os locais onde a pressão estática sobre o cilindro é igual à pressão estática da corrente livre.

6.52 Considere o campo de escoamento $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, onde $A = 3$ s^{-1} e as coordenadas são medidas em metros. A gravidade está no sentido negativo de z, $\vec{g} = -g\hat{k}$. Calcule a força do fluido no plano yz na região limitada por $y = 1$, $y = 2$, $z = 0$ e $z = 2$, se a pressão em $(x, y, z) = (0, \frac{1}{2}, 0)$ é 250 libras por pé quadrado e o fluido tem a massa específica da água.

6.53 Um bocal de incêndio está acoplado a uma mangueira com diâmetro interno $D = 3{,}0$ pol. O bocal tem perfil suave e diâmetro de saída $d = 1{,}0$ pol. O bocal foi projetado para operar com uma pressão de água na entrada de 100 psig. Determine a vazão em volume de projeto do bocal. (Expresse a sua resposta em gpm.) Avalie a força axial necessária para manter o bocal fixo. Indique se o acoplamento com a mangueira está sob tração ou compressão.

6.54 Água flui em regime permanente através de um tubo de diâmetro 3,25 pol. e é descarregada através de um bocal com diâmetro 1,25 pol. para a pressão atmosférica. A vazão em volume é 24,5 gpm. Calcule a pressão estática mínima requerida no tubo a fim de produzir essa vazão. Avalie a força axial do conjunto do bocal sobre o flange do tubo.

6.55 Um bocal de perfil suave, com diâmetro de saída $d = 20$ mm, está acoplado a um tubo reto por meio de flanges. Água escoa no tubo de diâmetro $D = 50$ mm e o bocal descarrega para a atmosfera. Para escoamento permanente e desprezando os efeitos de viscosidade, determine a vazão em volume no tubo correspondente à força axial calculada de 45,5 N necessária para manter o bocal unido ao tubo.

6.56 Água escoa em regime permanente através de um cotovelo redutor, conforme mostrado. O cotovelo é liso e curto, e o escoamento acelera de modo que o efeito do atrito é pequeno. A vazão em volume é $Q = 1{,}27$ L/s. O cotovelo está num plano horizontal. Estime a pressão manométrica na seção ①. Calcule a componente x da força exercida *pelo* cotovelo redutor *sobre* o tubo de suprimento de água.

P6.56

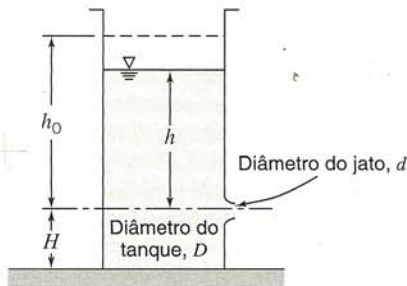
6.57 Um jato d'água é dirigido para cima, partindo de um bocal bem projetado de área $A_1 = 600$ mm²; a velocidade de saída do jato é $V_1 = 3{,}6$ m/s. O escoamento é permanente e a corrente líquida não se rompe. O ponto 2 está localizado $H = 1{,}55$ m acima do plano de saída do bocal. Determine a velocidade no jato não perturbado no ponto 2. Calcule a pressão que seria sentida por um tubo de estagnação colocado ali. Avalie a força que seria exercida sobre uma placa plana colocada perpendicularmente à corrente no ponto 2. Esboce a distribuição de pressão sobre a placa.

6.58 Um objeto com uma superfície inferior plana move-se para baixo contra o jato do borrifador do Problema 4.59, com velocida-

de $U = 5$ pés/s. Determine a pressão mínima de suprimento necessária para produzir um jato de saída do sistema com velocidade $V = 15$ pés/s. Calcule a pressão máxima exercida pelo jato líquido sobre o objeto plano no instante em que o objeto está $h = 1{,}5$ pé acima da saída do jato. Estime a força do jato d'água sobre o objeto plano.

6.59 Água escoa por uma torneira de cozinha de 0,5 pol. de diâmetro com vazão de 2 gpm. O ralo da pia está 18 pol. abaixo da saída da torneira. A área da seção transversal da corrente fluida aumentará, diminuirá ou permanecerá constante entre a saída da torneira e o ralo? Explique brevemente. Se uma placa for mantida diretamente abaixo da torneira, como variará a força requerida para manter a placa numa posição horizontal com a altura acima do ralo? Explique sucintamente.

6.60 Para um velho truque de salão, usa-se um carretel de linha vazio e uma carta de baralho. A carta é colocada contra o fundo do carretel. Contrariando a intuição, quando se sopra para baixo através do orifício central do carretel, a carta não é expelida para fora. Ao contrário, ela é "sugada" contra o carretel. Explique.

6.61 O tanque de diâmetro D tem um orifício de arestas bem arredondadas com diâmetro d. Em $t = 0$, o nível de água está na altura h_0. Desenvolva uma expressão para a altura adimensional da água, h/h_0, em qualquer instante posterior. Para $D/d = 10$, plote h/h_0 como função do tempo com h_0 como parâmetro para $0{,}1 \leq h_0 \leq 1$ m. Para $h_0 = 1$ m, trace um gráfico de h/h_0 como função do tempo com D/d como parâmetro para $2 \leq D/d \leq 10$.

P6.61

6.62 O nível de água num grande tanque é mantido na altura H acima do nível do terreno à sua volta. Um orifício bem arredondado feito na lateral do tanque descarrega um jato horizontal. Desprezando o atrito, determine a altura h na qual o orifício deve ser feito para que a água atinja o solo na distância horizontal máxima X do tanque. Plote X/H como função de h/H.

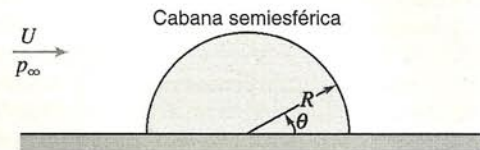
6.63 Um jato de ar horizontal axissimétrico com 10 mm de diâmetro atinge um disco vertical estacionário de 200 mm de diâmetro. A velocidade do jato é de 50 m/s na saída do bocal. Um manômetro é ligado ao centro do disco. Calcule (a) a deflexão, se o líquido do manômetro tem DR = 1,75, e (b) a força exercida pelo jato sobre o disco. Esboce a configuração de linhas de corrente e a distribuição de pressão na face do disco.

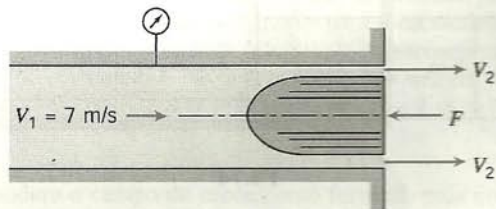
6.64 Obtenha uma expressão para a distribuição de pressão como uma função do raio para o disco do jogo *hóquei* de mesa do Problema 5.43. Estime a massa do disco.

6.65 Muitos parques de recreação usam estruturas de *bolha* inflável. Uma bolha para 4 quadras de tênis é formatada grosseiramente como um semicilindro circular com diâmetro de 30 m e um comprimento de 60 m. Os sopradores usados para inflar a estrutura podem manter a pressão do ar dentro da bolha em 10 mm de água acima da pressão ambiente. A bolha está sujeita à ação do vento que sopra a 50 km/h na direção perpendicular ao eixo da forma semicilíndrica. Usando coordenadas polares, com ângulo θ medido a partir do solo no lado da estrutura que é a borda de ataque do vento, a distribuição de pressão resultante pode ser expressa como

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_w^2} = 1 - 4\,\text{sen}^2\,\theta$$

onde p é a pressão na superfície, p_∞ é a pressão atmosférica e V_w é a velocidade do vento. Determine a força vertical exercida sobre a estrutura.

6.66 O escoamento sobre uma cabana semiesférica pode ser aproximado pela distribuição de velocidade do Problema 6.51 com $0 \leq \theta \leq \pi$. Durante uma tempestade, a velocidade do vento atinge 100 km/h; a temperatura externa é de 5°C. Um barômetro dentro da cabana indica 720 mm de mercúrio; a pressão p_∞ é também de 720 mm de Hg. A cabana tem um diâmetro de 6 m e um comprimento de 18 m. Determine a força que tende a levantar a cabana das suas fundações.

P6.66

6.67 Água escoa a baixa velocidade através de um tubo circular com diâmetro interno de 50 mm. Um tampão bem arredondado de 40 mm de diâmetro é mantido na extremidade do tubo por onde a água descarrega para a atmosfera. Ignore efeitos de atrito e admita perfis uniformes de velocidade em cada seção. Determine a pressão medida pelo manômetro e a força requerida para manter o tampão no lugar.

P6.67

6.68 Num tanque, ar de alta pressão força uma corrente de água através de um pequeno orifício arredondado, de área A. A pressão é alta o suficiente para que a gravidade possa ser desprezada. O ar expande-se lentamente de modo que a expansão pode ser considerada isotérmica. O volume inicial de ar no tanque é $\forall_0$. Em tempos posteriores o volume de ar é $\forall(t)$; o volume total do tanque é $\forall_t$. Obtenha uma expressão algébrica para a vazão em massa de água saindo do tanque. Determine uma expressão algébrica para a taxa de variação da massa de água dentro do tanque. Desenvolva uma equação diferencial ordinária e a resolva para a massa de água no tanque em qualquer instante. Trace um gráfico da massa de água no tanque como função do tempo.

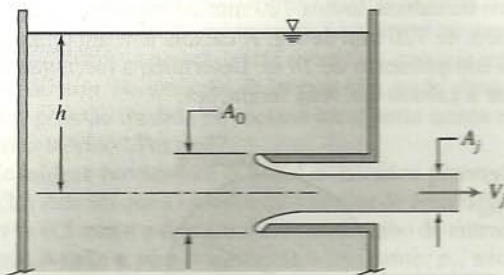
6.69 Repita o Problema 6.68 supondo que o ar se expande de forma tão rápida que essa expansão pode ser tratada como sendo adiabática.

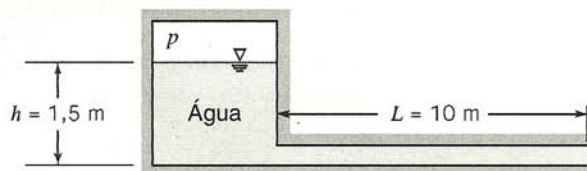
6.70 Descreva a distribuição de pressão no exterior de um edifício sujeito à ação do vento em regime permanente. Identifique os locais das pressões máxima e mínima no lado externo do edifício. Discuta os efeitos dessas pressões sobre a infiltração do ar externo para dentro do edifício.

6.71 Imagine uma mangueira de jardim com uma corrente d'água escoando para fora através de um bocal. Explique por que a ponta

da mangueira pode ficar instável quando segura a meio metro ou mais da saída do bocal.

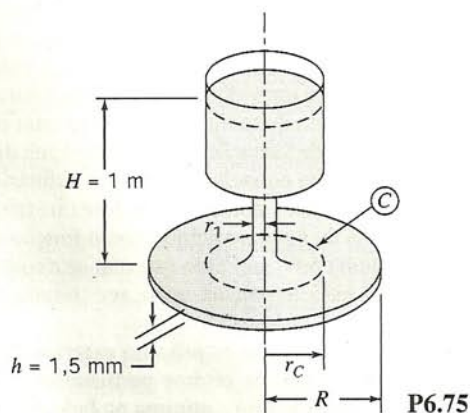
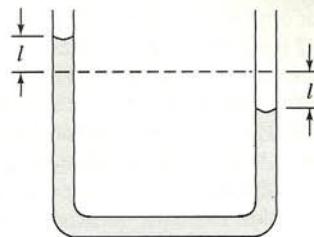
6.72 Um aspirador realiza sucção usando uma corrente de água fluindo através de um venturi. Analise a forma e as dimensões de tal dispositivo. Comente sobre as limitações ao seu uso.

6.73 Um tanque com um orifício *reentrante* chamado *bocal de Borda* é mostrado. O fluido é não viscoso e incompressível. O orifício reentrante elimina o escoamento ao longo das paredes do tanque, de forma que a pressão ali é aproximadamente hidrostática. Calcule o coeficiente de contração, $C_c = A_j/A_0$. Sugestão: Equacione a força de pressão hidrostática não equilibrada com a quantidade de movimento do jato.

P6.73

***6.74** Ar comprimido é usado para acelerar a passagem da água em um tubo. Despreze a velocidade no reservatório e admita que o escoamento no tubo é uniforme em qualquer seção. Num instante particular, sabe-se que $V = 2$ m/s e $dV/dt = 2{,}50$ m/s^2. A área da seção reta do tubo é $A = 0{,}02$ m^2. Determine a pressão no tanque nesse instante.

P6.74

***6.75** Considere o sistema de escoamento constituído de reservatório e disco duplo, com o nível do reservatório mantido constante. O escoamento entre os discos é iniciado do repouso em $t = 0$. Avalie a taxa de variação da vazão em volume em $t = 0$, se $r_1 = 50$ mm.

P6.75

* Esses problemas requerem material das seções que foram omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

***6.76** Aplique a equação de Bernoulli não permanente ao manômetro de tubo em *U* de diâmetro constante mostrado. Admita que o manômetro é inicialmente defletido e então liberado. Obtenha uma equação diferencial para *l* como uma função do tempo.

P6.76

***6.77** Dois discos circulares de raio *R* estão separados pela distância *b*. O disco superior move-se na direção do inferior a uma velocidade constante, *V*. O espaço entre eles está cheio com um fluido incompressível, sem atrito, que é espremido para fora à medida que os discos se aproximam um do outro. Admita que em qualquer seção radial a velocidade é uniforme em toda a largura da fresta, *b*. Entretanto, note que *b* é uma função do tempo. A pressão em volta dos discos é atmosférica. Determine a pressão manométrica em $r = 0$.

***6.78** Considere o tanque do Problema 4.34. Usando a equação de Bernoulli não permanente ao longo de uma linha de corrente, avalie a razão mínima de diâmetros, D/d, necessária para justificar a hipótese de que o escoamento no tanque é quase permanente.

***6.79** Determine se a equação de Bernoulli pode ou não ser aplicada entre raios diferentes para o campo de escoamento de vórtice (a) $\vec{V} = \omega r \hat{e}_\theta$ e (b) $\vec{V} = \hat{e}_\theta K / 2\pi r$.

***6.80** Considere o escoamento representado pela função de corrente $\psi = Ax^2y$, onde A é uma constante dimensional igual a 2,5 m^{-1} · s^{-1}. A massa específica é 2,45 slug/pé^3. O escoamento é rotacional? Pode a diferença de pressão entre os pontos $(x, y) = (1, 4)$ e $(2, 1)$ ser avaliada? Se afirmativo, faça-o; caso não seja possível, explique por quê.

***6.81** O campo de velocidade para um escoamento bidimensional é $\vec{V} = (Ax - By)t\hat{i} - (Bx + Ay)t\hat{j}$, onde $A = 1$ s^{-2}, $B = 2$ s^{-2}, t em segundos e as coordenadas são medidas em metros. Trata-se de um possível escoamento incompressível? O escoamento é permanente ou não permanente? Mostre que o escoamento é irrotacional e deduza uma expressão para o potencial de velocidade.

***6.82** A função de corrente de um campo de escoamento é $\psi = Ax^2y - By^3$, onde $A = 1$ m^{-1} · s^{-1}, $B = 1/3$ m^{-1} · s^{-1} e as coordenadas são medidas em metros. Determine uma expressão para o potencial de velocidade.

***6.83** Um campo de escoamento é representado pela função de corrente $\psi = x^2 - y^2$. Determine o correspondente campo de velocidade. Mostre que esse campo de escoamento é irrotacional e obtenha a função potencial.

***6.84** Considere o campo de escoamento representado pela função potencial $\phi = x^2 - y^2$. Verifique que esse escoamento é incompressível e obtenha a correspondente função de corrente.

***6.85** Considere o campo de escoamento representado pela função potencial $\phi = Ax^2 + Bxy - Ay^2$. Verifique que esse escoamento é incompressível e determine a correspondente função de corrente.

***6.86** Considere o campo de escoamento representado pelo potencial de velocidade $\phi = Ax + Bx^2 - By^2$, onde $A = 1$ m · s^{-1}, $B = 1$ s^{-1} e as coordenadas são medidas em metros. Obtenha expressões para o campo de velocidade e para a função de corrente. Calcule a diferença de pressão entre a origem e o ponto $(x, y) = (1, 2)$.

***6.87** Um campo de escoamento é representado pela função potencial $\phi = Ay^3 - Bx^2y$, onde $A = 1/3$ m^{-1} · s^{-1}, $B = 1$ m^{-1} · s^{-1} e as

coordenadas são medidas em metros. Obtenha uma expressão para a magnitude do vetor velocidade. Determine a função de corrente para o escoamento. Trace as linhas de corrente $\psi = -4{,}0$ e $4\ m^2/s$ para $x \geqslant 0$. Plote suficientes linhas de potencial (ϕ) para demonstrar a ortogonalidade das linhas de ψ constante e de ϕ constante.

***6.88** Um campo de escoamento incompressível é caracterizado pela função de corrente $\psi = 3Ax^2y - Ay^3$, onde $A = 1\ m^{-1} \cdot s^{-1}$. Trace algumas linhas de corrente no primeiro quadrante. Mostre que esse escoamento é irrotacional. Deduza o potencial de velocidade para o escoamento. Trace um gráfico com suficientes linhas de potencial (ϕ) para demonstrar a ortogonalidade das linhas de ψ constante e de ϕ constante.

***6.89** A distribuição de velocidade num escoamento bidimensional, permanente, não viscoso, no plano xy, é $\vec{V}=(Ax+B)\hat{i}+(C-Ay)\hat{j}$, onde $A = 3\ s^{-1}$, $B = 6$ m/s, $C = 4$ m/s e as coordenadas são medidas em metros. A distribuição de força de campo é $\vec{B}=-g\hat{k}$ e a massa específica é 825 kg/m³. Isso representa um possível escoamento incompressível? Trace as linhas de corrente no semiplano superior. Determine os pontos de estagnação do campo de escoamento. O escoamento é irrotacional? Se afirmativo, obtenha a função potencial. Avalie a diferença de pressão entre a origem e o ponto $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

***6.90** Um certo campo de escoamento irrotacional no plano xy tem função de corrente $\psi = Bxy$, onde $B = 0{,}25\ s^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. Trace diversas linhas de corrente no primeiro quadrante. Marque o sentido de ψ crescente. Indique o sentido do escoamento. Determine a vazão entre os pontos $(x, y) = (2, 2)$ e $(3, 3)$. Determine o potencial de velocidade para esse escoamento. Trace algumas linhas de potencial de velocidade constante sobre o gráfico das linhas de corrente. Marque o sentido de ϕ crescente.

***6.91** Considere o escoamento sobre um cilindro circular de raio a, usado no Problema-Exemplo 6.11. Mostre que $V_r = 0$ ao longo das linhas $(r, \theta) = (r, \pm \pi/2)$. Plote V_θ/U como função do raio para $r \geqslant a$, ao longo da linha $(r, \theta) = (r, \pi/2)$. Determine a distância além da qual a influência do cilindro é inferior a 1 por cento de U.

***6.92** Considere um escoamento em torno de um cilindro circular com velocidade de corrente livre da direita para a esquerda e vórtice livre de sentido anti-horário. Mostre que a força de sustentação sobre o cilindro pode ser expressa como $F_L = -\rho U\Gamma$, como ilustrado no Exemplo 6.12.

***6.93** Um modelo grosseiro de um furacão é constituído pela combinação de um sumidouro de intensidade $q = 2800\ m^2/s$ e um vórtice livre, de intensidade $K = 5600\ m^2/s$. Obtenha a função de corrente e o potencial de velocidade para esse campo de escoamento. Estime o raio além do qual o escoamento pode ser tratado como incompressível. Determine a pressão manométrica naquele raio.

***6.94** Uma fonte e um sumidouro de igual intensidade são colocados sobre o eixo x em $x = -a$ e $x = a$, respectivamente. Obtenha a função de corrente e o potencial de velocidade para o campo de escoamento resultante. Determine pontos sobre o eixo de y entre os quais passa metade da vazão total em volume.

***6.95** Considere um escoamento incompressível não viscoso no plano xy. Admita que duas fontes de igual intensidade, q, estão localizadas ao longo do eixo x em $x = \pm a$. Esboce linhas de corrente para o campo de escoamento produzido pelo par de fontes. Indique os locais dos pontos de estagnação do escoamento. Avalie a função de corrente para o campo de escoamento combinado no ponto $(x, y) = (a, a)$. Determine a vazão em volume que passa entre o eixo dos y e o ponto $(x, y) = (a, a)$. Se a pressão no ponto de estagnação for p_0, obtenha expressões para as pressões estática e dinâmica no ponto $(x, y) = (a, a)$.

***6.96** A configuração de escoamento de um par de vórtices deve ser investigada. Um vórtice de sentido horário está localizado em $(x, y) = (-a, 0)$, e um anti-horário de igual intensidade em $(x, y) = (a, 0)$. Determine a função de corrente, potencial de velocidade e campo de velocidade para esse escoamento combinado. Avalie a distribuição de pressão ao longo do eixo y.

***6.97** Uma fonte e um sumidouro com intensidades de mesma magnitude, $q = 3\pi\ m^2/s$, são colocados sobre o eixo x em $x = -a$ e $x = a$, respectivamente. Um escoamento uniforme, com velocidade $U = 20$ m/s no sentido positivo de x, é adicionado a fim de obter-se o escoamento sobre um corpo de Rankine. Obtenha a função de corrente, potencial de velocidade e campo de velocidade para o escoamento combinado. Determine o valor de ψ = constante na linha de corrente de estagnação. Localize os pontos de estagnação se $a = 0{,}3$ m.

***6.98** Considere novamente o escoamento sobre um corpo de Rankine do Problema 6.97. A meia largura, h, do corpo na direção y é dada pela equação transcendente

$$\frac{h}{a} = \cot\left(\frac{\pi U h}{q}\right)$$

Avalie a meia largura, h. Determine a velocidade local e a pressão nos pontos $(x, y) = (0, \pm h)$. Admita que a massa específica do fluido é igual à do ar padrão.

***6.99** Um campo de escoamento é formado pela combinação de um escoamento uniforme no sentido positivo de x, com $U = 10$ m/s, e um vórtice anti-horário, com intensidade $K = 4\pi\ m^2/s$, localizado na origem. Obtenha a função de corrente, potencial de velocidade e campo de velocidade para o escoamento combinado. Localize os pontos de estagnação do escoamento. Trace a linha de corrente que passa pelo ponto $\theta = \pi/2$ em $r = 1$ e 0,5 m, $(r, \theta) = (0, 0)$, e $\theta = -\pi/2$ em $r = 0{,}5$ e 1 m.

***6.100** Considere o campo de escoamento formado pela combinação de um escoamento uniforme no sentido positivo de x e uma fonte localizada na origem. Obtenha expressões para a função de corrente, potencial de velocidade e campo de velocidade para o escoamento combinado. Se $U = 25$ m/s, determine a intensidade da fonte se o ponto de estagnação está localizado em $x = -0{,}5$ m. Trace a linha de corrente de estagnação. Avalie as localizações dos ramos da linha de corrente de estagnação, bem longe, à jusante.

***6.101** Considere o campo de escoamento formado pela combinação de um escoamento uniforme no sentido positivo de x e uma fonte localizada na origem. Seja $U = 30$ m/s e $q = 150\ m^2/s$. Plote a razão entre a velocidade local e a velocidade de corrente livre como função de θ ao longo da linha de corrente de estagnação. Localize o(s) ponto(s) sobre a linha de corrente de estagnação onde a velocidade atinge seu valor máximo. Determine a pressão manométrica nesse(s) ponto(s) se a massa específica do fluido é 1,2 kg/m³.

***6.102** Considere o campo de escoamento formado pela combinação de um escoamento uniforme no sentido positivo de x e um sumidouro localizado na origem. Seja $U = 50$ m/s e $q = 90\ m^2/s$. Utilize um volume de controle adequadamente escolhido para avaliar a força líquida por unidade de profundidade necessária para manter no lugar (no ar padrão) a forma de superfície gerada pela linha de corrente de estagnação.

* Esses problemas requerem material das seções que foram omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

Capítulo 7

ANÁLISE DIMENSIONAL E SEMELHANÇA

Como pouquíssimos escoamentos reais podem ser solucionados com exatidão usando-se apenas métodos analíticos, o desenvolvimento da mecânica dos fluidos tem dependido muito de resultados experimentais. Em geral, a solução de problemas reais envolve uma combinação de análise e informação experimental. Primeiro, a situação do escoamento real é aproximada por meio de um modelo matemático simples o suficiente para fornecer uma solução. Em seguida, medições experimentais são feitas para verificar os resultados analíticos. Com base nessas medições, refina-se a análise. Os resultados experimentais são um elo essencial nesse processo iterativo.

Contudo, o trabalho experimental de laboratório é simultaneamente dispendioso e demorado. Um objetivo óbvio é obter o máximo de informações do mínimo de experiências. A análise dimensional é uma importante ferramenta que em muitos casos nos auxilia na consecução desse objetivo. Os parâmetros adimensionais que obtemos também podem ser usados na correlação de dados para apresentação, usando-se o menor número possível de gráficos.

Quando a realização de teste experimental em um protótipo de tamanho real é impossível ou de custo proibitivo (como acontece com freqüência), o único modo viável de atacar o problema é o teste de modelos em laboratório. Se desejamos prever o comportamento do protótipo a partir de medições no modelo, é óbvio que não podemos fazer qualquer teste em qualquer modelo. Os escoamentos no modelo e no protótipo devem ser relacionados por leis de escala conhecidas. Investigaremos as condições necessárias para se obter essa similaridade entre os escoamentos no modelo e no protótipo após a discussão sobre análise dimensional.

7.1 NATUREZA DA ANÁLISE DIMENSIONAL

A maioria dos fenômenos da mecânica dos fluidos depende, de uma maneira complexa, de parâmetros de geometria e de escoamento. Por exemplo, considere a força de arrasto sobre uma esfera lisa estacionária imersa numa corrente uniforme. Que experiências devem ser conduzidas para determinar a força de arrasto sobre a esfera? Para responder a essa pergunta, devemos especificar os parâmetros que são importantes na determinação da força de arrasto. Claramente, esperaríamos que a força de arrasto dependesse do tamanho da esfera (caracterizado pelo diâmetro, D), da velocidade do fluido, V, e da sua viscosidade, μ. Além disso, a massa específica do fluido, ρ, também poderia ser importante. Representando a força de arrasto por F, podemos escrever a equação simbólica

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

Embora possamos ter ignorado parâmetros dos quais a força de arrasto depende, tais como a rugosidade superficial (ou tenhamos incluído parâmetros dos quais ela não depende), formulamos o problema da determinação da força de arrasto para uma esfera estacionária em termos de quantidades que são tanto controláveis quanto mensuráveis em laboratório.

Imaginemos uma série de experiências para determinar a dependência de F em relação às variáveis, D, V, ρ e μ. Depois de construir uma adequada instalação de testes, o trabalho poderia começar. Para obter uma curva de F *versus* V para valores fixos de ρ, μ e D, precisaríamos de testes para 10 valores de V. Para explorar o efeito do diâmetro, cada teste seria repetido para esferas de 10 diferentes diâmetros. Se o procedimento fosse repetido para 10 valores de ρ e de μ, por sua vez, a aritmética simples nos mostraria que 10^4 testes individuais seriam necessários. Admitindo que cada teste levasse meia hora e que trabalhássemos oito horas por dia, a série completa iria requerer dois anos e meio para ser encerrada. Desnecessário dizer que poderia haver também algumas dificuldades na apresentação dos dados. Plotando F *versus* V, com D como um parâmetro, para cada combinação de valores de massa específica e viscosidade, todos os dados poderiam ser apresentados num total de 100 gráficos. Na melhor das hipóteses, a utilidade de tais resultados seria limitada.

Felizmente, podemos obter resultados significativos com esforço muito menor pelo emprego da análise dimensional. Conforme mostrado no Problema-Exemplo 7.1, todos os dados para a força de arrasto sobre uma esfera lisa podem ser traçados como uma relação funcional entre dois parâmetros adimensionais, na forma

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f_1\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

A forma da função ainda deve ser determinada experimentalmente. Entretanto, em vez de precisarmos conduzir 10^4 experiências, poderíamos estabelecer a natureza da função com a mesma precisão com apenas 10 experiências. O tempo economizado na realização desses 10 testes em vez de 10^4 é óbvio. E mais importante é a maior conveniência experimental. Não mais precisamos

encontrar fluidos com 10 valores diferentes de massa específica e viscosidade. Nem temos que fabricar 10 esferas de diâmetros diferentes. Em vez disso, apenas a razão $\rho VD/\mu$ deve ser variada. Isto pode ser conseguido simplesmente por uma mudança na velocidade, por exemplo.

O teorema dos Pi de Buckingham é um enunciado da relação entre uma função expressa em termos de parâmetros dimensionais e uma função correlata expressa em termos de parâmetros adimensionais. O emprego do teorema dos Pi de Buckingham permite-nos desenvolver os parâmetros adimensionais de modo rápido e fácil.

7.2 TEOREMA DOS PI DE BUCKINGHAM

Dado um problema físico no qual o parâmetro dependente é uma função de $n - 1$ parâmetros independentes, podemos expressar a relação entre as variáveis em forma funcional, como

$$q_1 = f(q_2, q_3, \ldots, q_n)$$

onde q_1 é o parâmetro dependente e $q_2, q_3, \ldots, q_n$ são os $n - 1$ parâmetros independentes. Matematicamente, podemos expressar a relação funcional na forma equivalente

$$g(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$$

onde g é uma função não especificada diferente de f. Para o arrasto sobre a esfera, escrevemos a equação simbólica

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

Poderíamos do mesmo modo ter escrito

$$g(F, D, V, \rho, \mu) = 0$$

O teorema dos Pi de Buckingham [1] declara que: Dada uma relação entre n parâmetros da forma

$$g(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$$

então os n parâmetros podem ser agrupados em $n - m$ razões independentes adimensionais, ou parâmetros Π, que podem ser expressos em forma funcional por

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-m}) = 0$$

ou

$$\Pi_1 = G_1(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-m})$$

O número m é usualmente,[1] mas nem sempre, igual ao número mínimo, r, de dimensões independentes necessárias para especificar as dimensões de todos os parâmetros $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

O teorema não prevê a forma funcional de G ou de G_1. A relação funcional entre os parâmetros independentes adimensionais Π deve ser determinada experimentalmente.

Os $n - m$ parâmetros adimensionais Π obtidos por esse procedimento são independentes. Um parâmetro Π não é independente se ele puder ser formado por um produto ou quociente dos outros parâmetros do problema. Por exemplo, se

$$\Pi_5 = \frac{2\Pi_1}{\Pi_2\Pi_3} \quad \text{ou} \quad \Pi_6 = \frac{\Pi_1^{3/4}}{\Pi_3^2}$$

então, nem Π_5 nem Π_6 são independentes dos outros parâmetros adimensionais.

[1]Ver o Problema-Exemplo 7.3.

Existem diversos métodos para determinar os parâmetros adimensionais. Um procedimento detalhado é apresentado na próxima seção.

7.3 DETERMINAÇÃO DOS GRUPOS Π

Qualquer que seja o método empregado na determinação dos parâmetros adimensionais, começa-se listando todos os parâmetros que sabidamente (ou supostamente) afetam o fenômeno de escoamento dado. Reconhece-se que alguma experiência é de valia na organização dessa lista. Estudantes que não têm experiência sentem-se muitas vezes em apuros pela necessidade de aplicar julgamento de engenharia em uma aparente dose maciça. Contudo, é difícil errar se uma generosa seleção de parâmetros for feita.

Se você suspeitar que um fenômeno depende de um dado parâmetro, inclua-o. Se a sua suspeita for correta, as experiências mostrarão que o parâmetro deve ser incluído para se obter resultados consistentes. Se, no entanto, ele for estranho ao fenômeno, um parâmetro Π extra pode resultar; porém, as experiências mostrarão que ele pode ser desconsiderado. Por isso, não tenha receio de incluir todos os parâmetros que você julgar importantes.

Os seis passos listados a seguir descrevem um procedimento recomendado para determinar os parâmetros Π:

Passo 1. *Liste todos os parâmetros envolvidos.* (Seja n o número de parâmetros.) Se todos os parâmetros pertinentes não forem incluídos, uma relação pode ser obtida, mas ela não representará o fenômeno completamente. Se houver inclusão de parâmetros que na verdade não têm efeito sobre o fenômeno físico, o processo de análise dimensional mostrará que eles não entram na relação buscada, ou então um ou mais grupos adimensionais estranhos aos fenômenos serão obtidos, conforme mostrarão os experimentos.

Passo 2. *Selecione um conjunto de dimensões fundamentais (primárias), p. ex., MLt ou FLt.* (Note que, para problemas de transferência de calor, você também pode precisar de T para a temperatura, e em sistemas elétricos, de q para a carga elétrica.)

Passo 3. *Liste as dimensões de todos os parâmetros em termos das dimensões primárias.* (Seja r o número de dimensões primárias.) Tanto a força quanto a massa podem ser selecionadas como uma dimensão primária.

Passo 4. *Selecione da lista um número r de parâmetros que, em conjunto, incluam todas as dimensões primárias.* Esses parâmetros serão todos combinados com cada um dos parâmetros remanescentes, um por vez, e serão chamados de parâmetros repetentes. Nenhum desses parâmetros pode ter dimensões que sejam potências de dimensões de outro parâmetro repetente; por exemplo, não inclua simultaneamente um comprimento (L) e um momento de inércia de uma área (L^4) como parâmetros repetentes. Os parâmetros repetentes escolhidos podem aparecer em todos os grupos adimensionais obtidos; por isso, *não* inclua o parâmetro dependente entre aqueles selecionados nesse passo.

Passo 5. *Estabeleça equações dimensionais combinando os parâmetros selecionados no Passo 4 com cada um*

dos outros parâmetros para formar grupos dimensionais. (Haverá $n - m$ equações.) Resolva as equações dimensionais para obter os $n - m$ grupos adimensionais.

Passo 6. *Verifique se cada grupo obtido é adimensional.* Se a massa foi inicialmente selecionada como uma dimensão primária, é aconselhável verificar os grupos utilizando a força como uma dimensão primária, ou vice-versa.

A relação funcional entre os parâmetros Π deve ser determinada experimentalmente. O procedimento detalhado para determinar os parâmetros Π adimensionais é ilustrado nos Problemas-Exemplo 7.1 e 7.2.

EXEMPLO 7.1 — Força de Arrasto sobre uma Esfera Lisa

Conforme observado na Seção 7.1, a força de arrasto, F, sobre uma esfera lisa depende da velocidade relativa, V, do diâmetro da esfera, D, da massa específica do fluido, ρ, e da viscosidade do fluido, μ. Obtenha um conjunto de grupos adimensionais que possam ser usados para correlacionar dados experimentais.

PROBLEMA-EXEMPLO 7.1

DADOS: $F = f(\rho, V, D, \mu)$ para uma esfera lisa.

DETERMINAR: Um conjunto apropriado de grupos adimensionais.

SOLUÇÃO:

(Os números circunscritos referem-se aos passos do procedimento de determinação dos parâmetros adimensionais Π.)

① $F \quad V \quad D \quad \rho \quad \mu$ — $n = 5$ parâmetros dimensionais

② Selecione as dimensões primárias M, L e t

③ $F \quad V \quad D \quad \rho \quad \mu$

$$\frac{ML}{t^2} \qquad \frac{L}{t} \qquad L \qquad \frac{M}{L^3} \qquad \frac{M}{Lt}$$

$r = 3$ dimensões primárias

④ Selecione os parâmetros repetentes ρ, V, D — $m = r = 3$ parâmetros repetentes

⑤ Então, resultarão $n - m = 2$ grupos adimensionais. Estabelecendo equações dimensionais, obtemos

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F \quad \text{e} \quad \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{t^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

Equacionando os expoentes de M, L e t resulta

$$\left.\begin{array}{lrl} M: & a + 1 = 0 & a = -1 \\ L: & -3a + b + c + 1 = 0 & c = -2 \\ t: & -b - 2 = 0 & b = -2 \end{array}\right\} \quad \text{Portanto, } \Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

De modo semelhante,

$$\Pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu \quad \text{e} \quad \left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \left(\frac{M}{Lt}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{lrl} M: & d + 1 = 0 & d = -1 \\ L: & -3d + e + f - 1 = 0 & f = -1 \\ t: & -e - 1 = 0 & e = -1 \end{array}\right\} \quad \text{Portanto, } \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

⑥ Verifique usando dimensões F, L e t

$$[\Pi_1] = \left[\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right] \quad \text{e} \quad F \frac{L^4}{Ft^2} \left(\frac{t}{L}\right)^2 \frac{1}{L^2} = 1$$

onde [ ] significa "tem dimensões de", e

$$[\Pi_2] = \left[\frac{\mu}{\rho V D}\right] \quad \text{e} \quad \frac{Ft}{L^2} \frac{L^4}{Ft^2} \frac{t}{L} \frac{1}{L} = 1$$

A relação funcional é $\Pi_1 = f(\Pi_2)$, ou

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right)$$

como observado anteriormente. A forma da função, f, deve ser determinada experimentalmente.

EXEMPLO 7.2 — Queda de Pressão no Escoamento Dentro de um Tubo

A queda de pressão, Δp, para escoamento permanente incompressível viscoso através de um tubo retilíneo horizontal, depende do comprimento do tubo, l, da velocidade média, $\bar{V}$, da viscosidade do fluido, μ, do diâmetro do tubo, D, da massa específica do fluido, ρ, e da altura média de "rugosidade", e. Determine um conjunto de grupos adimensionais que possa ser usado para correlacionar dados.

PROBLEMA-EXEMPLO 7.2

DADOS: $\Delta p = f(\rho, \bar{V}, D, l, \mu, e)$ para escoamento num tubo circular.

DETERMINAR: Um conjunto adequado de grupos adimensionais.

SOLUÇÃO:

(Os números circunscritos referem-se aos passos do procedimento de determinação dos parâmetros adimensionais Π.)

① $\Delta p \quad \rho \quad \mu \quad \bar{V} \quad l \quad D \quad e$ — $n = 7$ parâmetros

② Escolha as dimensões primárias M, L e t

③ $\Delta p \quad \rho \quad \mu \quad \bar{V} \quad l \quad D \quad e$

$$\frac{M}{Lt^2} \quad \frac{M}{L^3} \quad \frac{M}{Lt} \quad \frac{L}{t} \quad L \quad L \quad L$$

$r = 3$ dimensões primárias

④ Selecione os parâmetros repetentes ρ, $\bar{V}$, D — $m = r = 3$ parâmetros repetidos

⑤ Então, resultarão $n - m = 4$ grupos adimensionais. Estabelecendo equações dimensionais, temos:

$$\Pi_1 = \rho^a \bar{V}^b D^c \Delta p \quad \text{e}$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{M}{Lt^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{aligned} M&: \quad 0 = a + 1 \\ L&: \quad 0 = -3a + b + c - 1 \\ t&: \quad 0 = -b - 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -2 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\Pi_1 = \rho^{-1}\,\bar{V}^{-2}\,D^0 \Delta p = \dfrac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2}$

$$\Pi_2 = \rho^d \bar{V}^e D^f \mu \quad \text{e}$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \frac{M}{Lt} = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{aligned} M&: \quad 0 = d + 1 \\ L&: \quad 0 = -3d + e + f - 1 \\ t&: \quad 0 = -e - 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} d &= -1 \\ e &= -1 \\ f &= -1 \end{aligned}$$

Portanto, $\Pi_2 = \dfrac{\mu}{\rho \bar{V} D}$

$$\Pi_3 = \rho^g \bar{V}^h D^i l \quad \text{e}$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^g \left(\frac{L}{t}\right)^h (L)^i L = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{aligned} M&: \quad 0 = g \\ L&: \quad 0 = -3g + h + i + 1 \\ t&: \quad 0 = -h \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} g &= 0 \\ h &= 0 \\ i &= -1 \end{aligned}$$

Portanto, $\Pi_3 = \dfrac{l}{D}$

$$\Pi_4 = \rho^j \bar{V}^k D^l e \quad \text{e}$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^j \left(\frac{L}{t}\right)^k (L)^l L = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{aligned} M&: \quad 0 = j \\ L&: \quad 0 = -3j + k + l + 1 \\ t&: \quad 0 = -k \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} j &= 0 \\ k &= 0 \\ l &= -1 \end{aligned}$$

Portanto, $\Pi_4 = \dfrac{e}{D}$

⑥ Verifique, usando dimensões F, L, t

$$[\Pi_1] = \left[\frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2}\right] \quad \text{e} \quad \frac{F}{L^2}\frac{L^4}{Ft^2}\frac{t^2}{L^2} = 1 \qquad [\Pi_3] = \left[\frac{l}{D}\right] \quad \text{e} \quad \frac{L}{L} = 1$$

$$[\Pi_2] = \left[\frac{\mu}{\rho \bar{V} D}\right] \quad \text{e} \quad \frac{Ft}{L^2}\frac{L^4}{Ft^2}\frac{t}{L}\frac{1}{L} = 1 \qquad [\Pi_4] = \left[\frac{e}{D}\right] \quad \text{e} \quad \frac{L}{L} = 1$$

Finalmente, a relação funcional é

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$$

ou

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho \bar{V} D}, \frac{l}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

{ Experimentos em muitos laboratórios mostraram que essa relação correlaciona bem os dados. Discutiremos este resultado com mais detalhes na Seção 8.7.1. }

O procedimento delineado anteriormente, onde m é tomado igual a r (o menor número possível de dimensões independentes para especificar as dimensões de todos os parâmetros envolvidos), quase sempre produz o número correto de parâmetros Π adimensionais. Em alguns casos surgem dificuldades porque o número de dimensões primárias difere quando as variáveis são expressas em termos de sistemas de dimensões diferentes. O valor de m pode ser estabelecido com segurança determinando-se o posto da matriz dimensional; m é igual ao posto da matriz dimensional. O procedimento é ilustrado no Problema-Exemplo 7.3.

Os $n - m$ grupos adimensionais obtidos do procedimento são independentes, mas não únicos. Se um conjunto diferente de parâmetros repetentes for escolhido, diferentes grupos resultarão. Os parâmetros repetentes escolhidos podem aparecer em todos os grupos adimensionais obtidos. A experiência sugere que a viscosidade apareceria em um único parâmetro adimensional. Por isso, μ *não* deveria ser escolhido como um parâmetro repetente.

A escolha de ρ, com dimensões M/L^3, da velocidade V, com dimensões L/T, e de um comprimento característico, L, com dimensão L, como variáveis repetentes leva, em geral, a um conjunto de parâmetros adimensionais que têm se mostrado como os mais adequados para correlacionar ampla faixa de dados experimentais. O que não é surpreendente, se reconhecermos que as forças de inércia são importantes na maioria dos problemas de mecânica dos fluidos. Da segunda lei de Newton, $F = ma$; a massa pode ser escrita como $m = \rho V\!\!\!\!-$ e, visto que o volume tem as dimensões de L^3, $m \propto \rho L^3$. A aceleração pode ser escrita como $a = dv/dt = v\,dv/ds$, e daí $a \propto V^2/L$. Assim, a força de inércia, F, é proporcional a $\rho V^2 L^2$.

Se $n - m = 1$, então um só parâmetro adimensional Π é obtido. Nesse caso, o teorema dos Pi de Buckingham indica que o parâmetro único Π deve ser uma constante.

EXEMPLO 7.3 — Efeito Capilar: Uso da Matriz Dimensional

Quando um pequeno tubo é mergulhado numa poça de líquido, a tensão superficial causa a formação de um menisco na superfície livre, que sobe ou desce dependendo do ângulo de contato na interface sólido-líquido-gás. Experiências indicam que a magnitude do efeito capilar, Δh, é uma função do diâmetro do tubo, D, do peso específico do líquido, γ, e da tensão superficial, σ. Determine o número de parâmetros Π independentes que podem ser formados e obtenha um conjunto.

PROBLEMA-EXEMPLO 7.3

DADOS: $\Delta h = f(D, \gamma, \sigma)$

DETERMINAR: **(a)** O número de parâmetros Π independentes.
(b) Um conjunto de parâmetros Π.

Líquido
(Peso específico = γ
Tensão superficial = σ)

SOLUÇÃO:

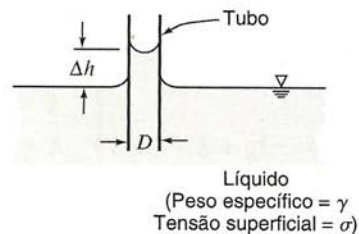
(Os números circunscritos referem-se aos passos do procedimento de determinação dos parâmetros adimensionais Π.)

① $\Delta h \quad D \quad \gamma \quad \sigma \qquad n = 4$ parâmetros dimensionais

② Escolha as dimensões primárias (use tanto as dimensões M, L, t quanto F, L, t para ilustrar o problema da determinação de m)

③ (*a*) M, L, t

$$\begin{array}{cccc} \Delta h & D & \gamma & \sigma \\ L & L & \dfrac{M}{L^2 t^2} & \dfrac{M}{t^2} \end{array}$$

$r = 3$ dimensões primárias

(*b*) F, L, t

$$\begin{array}{cccc} \Delta h & D & \gamma & \sigma \\ L & L & \dfrac{F}{L^3} & \dfrac{F}{L} \end{array}$$

$r = 2$ dimensões primárias

Então, para cada conjunto de dimensões primárias perguntamos, "m é igual a r?" Vamos verificar a matriz dimensional para descobrir. As matrizes dimensionais são

	Δh	D	γ	σ
M	0	0	1	1
L	1	1	−2	0
t	0	0	−2	−2

	Δh	D	γ	σ
F	0	0	1	1
L	1	1	−3	−1

O ponto de uma matriz é igual à ordem do seu maior determinante não nulo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 - (1)(-2) + (1)(-2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \qquad \therefore m = 2 \qquad m \neq r$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0 \qquad \therefore m = 2 \qquad m = r$$

④ $m = 2$. Escolha D, γ como parâmetros repetentes.

⑤ Resultarão $n - m = 2$ grupos adimensionais.

$$\Pi_1 = D^a \gamma^b \Delta h \quad \text{e} \quad (L)^a \left(\frac{M}{L^2t^2}\right)^b (L) = M^0L^0t^0$$

$$\left.\begin{aligned} M&: \ b + 0 = 0 \\ L&: \ a - 2b + 1 = 0 \\ t&: \ -2b + 0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad b = 0, \quad a = -1$$

Portanto, $\Pi_1 = \dfrac{\Delta h}{D}$

$$\Pi_2 = D^c \gamma^d \sigma \quad \text{e} \quad (L)^c \left(\frac{M}{L^2t^2}\right)^d \frac{M}{t^2} = M^0L^0t^0$$

$$\left.\begin{aligned} M&: \ d + 1 = 0 \\ L&: \ c - 2d = 0 \\ t&: \ -2d - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad d = -1, \quad c = -2$$

Portanto, $\Pi_2 = \dfrac{\sigma}{D^2\gamma}$

⑥ Verifique usando dimensões F, L, t.

$$[\Pi_1] = \left[\frac{\Delta h}{D}\right] \quad \text{e} \quad \frac{L}{L} = 1$$

$$[\Pi_2] = \left[\frac{\sigma}{D^2\gamma}\right] \quad \text{e} \quad \frac{F}{L}\frac{1}{L^2}\frac{L^3}{F} = 1$$

$m = 2$. Escolha D, γ como parâmetros repetentes.

Resultarão $n - m = 2$ grupos adimensionais.

$$\Pi_1 = D^e \gamma^f \Delta h \qquad (L)^e \left(\frac{F}{L^3}\right)^f L = F^0L^0t^0$$

$$\left.\begin{aligned} F&: \ f = 0 \\ L&: \ e - 3f + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad e = -1$$

Portanto, $\Pi_1 = \dfrac{\Delta h}{D}$

$$\Pi_2 = D^g \gamma^h \sigma \qquad (L)^g \left(\frac{F}{L^3}\right)^h \frac{F}{L} = F^0L^0t^0$$

$$\left.\begin{aligned} F&: \ h + 1 = 0 \\ L&: \ g - 3h - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad h = -1, \quad g = -2$$

Portanto, $\Pi_2 = \dfrac{\sigma}{D^2\gamma}$

Verifique usando dimensões M, L, t

$$[\Pi_1] = \left[\frac{\Delta h}{D}\right] \quad \text{e} \quad \frac{L}{L} = 1$$

$$[\Pi_2] = \left[\frac{\sigma}{D^2\gamma}\right] \quad \text{e} \quad \frac{M}{t^2}\frac{1}{L^2}\frac{L^2t^2}{M} = 1$$

Portanto, ambos os sistemas de dimensões fornecem os mesmos parâmetros adimensionais Π. A relação funcional predita é

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta h}{D} = f\left(\frac{\sigma}{D^2\gamma}\right)$$

Esse resultado é razoável do ponto de vista físico. O fluido é estático; não se poderia esperar que o tempo fosse uma dimensão importante. A finalidade desse problema é ilustrar o emprego da matriz dimensional na determinação do número requerido de parâmetros repetentes.

7.4 GRUPOS ADIMENSIONAIS DE IMPORTÂNCIA NA MECÂNICA DOS FLUIDOS

Ao longo dos anos, várias centenas de grupos adimensionais diferentes que são importantes na engenharia foram identificados. Seguindo a tradição, cada um desses grupos recebeu o nome de um cientista ou engenheiro proeminente, geralmente daquele que foi o pioneiro no seu uso. Vários grupos são tão fundamentais e ocorrem com tanta freqüência na mecânica dos fluidos que dispenderemos algum tempo para aprender as suas definições. O entendimento do seu significado físico também aumenta a percepção dos fenômenos que estudamos.

As forças encontradas nos fluidos em escoamento incluem aquelas devidas à inércia, viscosidade, pressão, gravidade, tensão superficial e compressibilidade. A razão entre duas forças quaisquer será adimensional. Mostramos previamente que a força de inércia é proporcional a $\rho V^2 L^2$. Para facilitar a formação de razões entre forças, podemos expressar cada uma das forças remanescentes como segue:

$$\text{Força viscosa} = \tau A = \mu \frac{du}{dy} A \propto \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu VL$$

$$\text{Força de pressão} = (\Delta p) A \propto (\Delta p) L^2$$

$$\text{Força de gravidade} = mg \propto g\rho L^3$$

$$\text{Força de tensão superficial} = \sigma L$$

$$\text{Força de compressibilidade} = E_v A \propto E_v L^2$$

As forças de inércia são importantes na maioria dos problemas de mecânica dos fluidos. A razão entre a força de inércia e cada uma das outras listadas anteriormente, leva a cinco grupos adimensionais fundamentais encontrados na mecânica dos fluidos.

Na década de 1880, Osborne Reynolds, engenheiro britânico, estudou a transição entre os regimes laminar e turbulento num tubo. Ele descobriu que o parâmetro (que mais tarde recebeu seu nome)

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{\nu}$$

é um critério pelo qual o regime do escoamento pode ser determinado. Experiências posteriores mostraram que o *número de Reynolds* é um parâmetro chave para outros casos de escoamento também. Então, em geral,

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

onde L é um comprimento característico, descritivo da geometria do campo de escoamento. O número de Reynolds é a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas. Escoamentos com "grandes" números de Reynolds são, em geral, turbulentos. Escoamentos nos quais as forças de inércia são "pequenas" comparadas com as forças viscosas são escoamentos de características laminares.

Em ensaios com modelos aerodinâmicos e outros é conveniente apresentar os dados de pressão na forma adimensional. A razão

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

é formada, onde Δp é a pressão local menos a pressão de corrente livre, e ρ e V são propriedades da corrente livre do escoamento. Essa razão recebeu o nome de Leonhard Euler, matemático suíço que fez muitos trabalhos analíticos pioneiros em mecânica dos fluidos. Euler recebeu o crédito de ter sido o primeiro a reconhecer o papel da pressão no movimento dos fluidos; as equações de Euler do Cap. 6 demonstram esse papel. O *número de Euler* é a razão entre as forças de pressão e as forças de inércia. (O fator 1/2 é introduzido no denominador para dar a pressão dinâmica.) O número de Euler é freqüentemente chamado de *coeficiente de pressão, C_p*.

No estudo dos fenômenos de cavitação, a diferença de pressão, Δp, é tomada como $\Delta p = p - p_v$, onde p é a pressão na corrente líquida e p_v é a pressão de vapor do líquido na temperatura de teste. Combinando esses parâmetros com ρ e V na corrente líquida, resulta o parâmetro adimensional denominado *número de cavitação*,

$$Ca = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

William Froude foi um engenheiro naval britânico. Juntamente com seu filho, Robert Edmund Froude, descobriu que o parâmetro

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

era significativo para escoamentos com efeitos de superfície livre. Elevando o *número de Froude* ao quadrado, temos

$$Fr^2 = \frac{V^2}{gL} = \frac{\rho V^2 L^2}{\rho g L^3}$$

que pode ser interpretado como a razão entre as forças de inércia e as forças de gravidade. O comprimento, L, é um comprimento característico descritivo do campo de escoamento. No caso de escoamento em canal aberto, o comprimento característico é a profundidade de água; números de Froude inferiores à unidade indicam escoamento subcrítico e valores maiores que a unidade indicam escoamentos supercríticos.

O *número de Weber* é a razão entre as forças de inércia e as forças de tensão superficial. Ele pode ser escrito

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$

Na década de 1870, o físico austríaco Ernst Mach introduziu o parâmetro

$$M = \frac{V}{c}$$

onde V é a velocidade do escoamento e c a velocidade local do som. Análises e experiências mostraram que o *número de Mach* é um parâmetro chave que caracteriza os efeitos de compressibilidade num escoamento. O número de Mach pode ser escrito

$$M = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{\dfrac{dp}{d\rho}}} = \frac{V}{\sqrt{\dfrac{E_v}{\rho}}} \quad \text{ou} \quad M^2 = \frac{\rho V^2 L^2}{E_v L^2}$$

que pode ser interpretado como uma razão entre as forças de inércia e as forças devidas à compressibilidade. Para escoamen-

to realmente incompressível (sob algumas condições mesmo os líquidos são bastante compressíveis), $c = \infty$ de modo que $M = 0$.

7.5 SEMELHANÇA DE ESCOAMENTOS E ESTUDOS DE MODELOS

Para ser útil, um teste com modelo deve fornecer dados que possam, por meio de transposição de escalas, fornecer as forças, momentos e cargas dinâmicas que existiriam no protótipo em tamanho real. Que condições devem ser atendidas para se assegurar a semelhança entre os escoamentos de modelo e de protótipo?

Talvez o requisito mais óbvio é que o modelo e o protótipo devem ser geometricamente semelhantes. A *semelhança geométrica* requer que o modelo e o protótipo tenham a mesma forma e que todas as dimensões lineares do modelo sejam relacionadas às correspondentes dimensões do protótipo por um fator de escala constante.

Um segundo requisito é que os escoamentos de protótipo e de modelo sejam *cinematicamente semelhantes*. Dois escoamentos são cinematicamente semelhantes quando as velocidades em pontos correspondentes estão no mesmo sentido e relacionam-se em magnitude por meio de um fator de escala constante. Assim, dois escoamentos cinematicamente semelhantes também têm configurações de linhas de correntes relacionadas por um fator de escala constante. Como as fronteiras formam as linhas de corrente limítrofes, escoamentos que são cinematicamente semelhantes devem ser também geometricamente semelhantes.

Em princípio, a semelhança cinemática exigiria que um túnel de vento de seção transversal reta infinita fosse usado na obtenção de dados para arrasto sobre um objeto, a fim de modelar corretamente o desempenho num campo de escoamento infinito. Na prática, essa restrição pode ser consideravelmente relaxada, permitindo o emprego de um equipamento de tamanho razoável.

A semelhança cinemática requer que os regimes de escoamento sejam os mesmos para modelo e protótipo. Se efeitos de compressibilidade ou de cavitação, que podem até mudar os padrões qualitativos de um escoamento, não estiverem presentes no escoamento de protótipo, eles devem ser evitados no escoamento de modelo.

Quando dois escoamentos têm distribuições de força tais que tipos idênticos de forças são paralelas e relacionam-se em magnitude por um fator de escala constante em todos os pontos correspondentes, então os dois escoamentos são *dinamicamente semelhantes*.

Os requisitos para semelhança dinâmica são os mais restritivos. Semelhança cinemática requer semelhança geométrica; a semelhança cinemática é um requisito necessário, mas não suficiente, para a semelhança dinâmica.

A fim de estabelecer as condições necessárias para a completa semelhança dinâmica, todas as forças que são importantes no escoamento devem ser consideradas. Dessa forma, os efeitos de forças viscosas, de forças de pressão, de forças de tensão superficial, e assim por diante, devem ser considerados. As condições de teste devem ser estabelecidas de tal forma que todas as forças importantes sejam relacionadas pelo mesmo fator de escala entre os escoamentos de modelo e de protótipo. Quando existe semelhança dinâmica, os dados medidos num escoamento sobre o modelo podem ser relacionados quantitativamente com as condições do escoamento sobre o protótipo. Quais são, então, as condições que asseguram semelhança dinâmica entre os escoamentos de modelo e de protótipo?

O teorema dos Pi de Buckingham pode ser usado na obtenção dos grupos adimensionais que governam um fenômeno de escoamento; para a consecução da semelhança dinâmica entre escoamentos geometricamente semelhantes devemos duplicar os grupos adimensionais independentes; assim procedendo, o parâmetro dependente é também duplicado.

Por exemplo, ao considerar a força de arrasto sobre uma esfera no Problema-Exemplo 7.1 começamos com

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

O teorema dos Pi de Buckingham predizia a relação funcional

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f_1\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

Na Seção 7.4 mostramos que os parâmetros adimensionais podem ser vistos como razões entre forças. Assim, ao considerar um escoamento de modelo e um escoamento de protótipo em torno de uma esfera (os escoamentos são geometricamente semelhantes), os escoamentos serão também dinamicamente semelhantes se o parâmetro independente $\rho VD/\mu$ for duplicado entre modelo e protótipo, isto é, se

$$\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)_{\text{modelo}} = \left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)_{\text{protótipo}}$$

Além disso, se

$$Re_{\text{modelo}} = Re_{\text{protótipo}}$$

então o parâmetro dependente, $F/\rho V^2 D^2$, é duplicado entre modelo e protótipo, isto é

$$\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\text{modelo}} = \left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\text{protótipo}}$$

e os resultados obtidos do estudo do modelo podem ser utilizados na predição do arrasto no protótipo em tamanho real.

A força real decorrente do fluido sobre o objeto não é a mesma em ambos os casos, mas o valor do seu grupo adimensional é. Os dois testes podem ser realizados usando-se fluidos diferentes, se desejado, desde que os números de Reynolds sejam igualados. Por conveniência experimental, os dados de teste podem ser medidos no ar em um túnel de vento e os resultados podem ser usados para prever o arrasto na água conforme ilustrado no Problema-Exemplo 7.4.

EXEMPLO 7.4 — Semelhança: Arrasto de um Transdutor Sonar

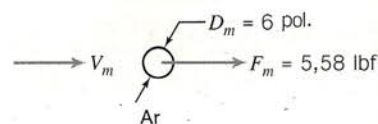
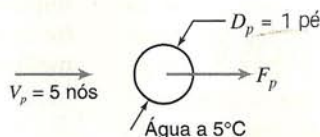
O arrasto de um transdutor sonar deve ser previsto com base em dados de teste em túnel de vento. O protótipo, uma esfera com 1 pé de diâmetro, deve ser rebocado a 5 nós (milhas náuticas por hora) na água do mar, a 5°C. O modelo tem 6 pol. de diâmetro. Determine a velocidade de teste requerida no ar. Se o arrasto do modelo nas condições de teste for 5,58 lbf, estime o arrasto do protótipo.

PROBLEMA-EXEMPLO 7.4

DADOS: Transdutor sonar a ser testado num túnel de vento.

DETERMINAR: (a) V_m.
(b) F_p.

D_p = 1 pé; V_p = 5 nós; F_p; Água a 5°C

D_m = 6 pol.; V_m; F_m = 5,58 lbf; Ar

SOLUÇÃO:

Uma vez que o protótipo opera na água e o teste do modelo deve ser feito no ar, resultados úteis poderão ser esperados somente se os efeitos de cavitação estiverem ausentes no escoamento sobre o protótipo e os efeitos de compressibilidade estiverem ausentes nos testes com o modelo. Sob essas condições,

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

e o teste deve ser conduzido a

$$Re_{\text{modelo}} = Re_{\text{protótipo}}$$

para assegurar semelhança dinâmica. Para a água do mar a 5°C, $\rho = 1{,}99$ slug/pé³ e $\nu \approx 1{,}69 \times 10^{-5}$ pé²/s. Nas condições de protótipo,

$$V_p = \frac{5 \text{ nmi}}{\text{h}} \times \frac{6080 \text{ pé}}{\text{nmi}} \times \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} = 8{,}44 \text{ pé/s}$$

$$Re_p = \frac{V_p D_p}{\nu_p} = 8{,}44 \frac{\text{pé}}{\text{s}} \times 1 \text{ pé} \times \frac{\text{s}}{1{,}69 \times 10^{-5} \text{ pé}^2} = 4{,}99 \times 10^5$$

As condições de teste com o modelo devem reproduzir esse número de Reynolds. Então,

$$Re_m = \frac{V_m D_m}{\nu_m} = 4{,}99 \times 10^5$$

Para o ar padrão (60°F e 14,7 psia), $\rho = 0{,}00238$ slug/pé³ e $\nu = 1{,}57 \times 10^{-4}$ pé²/s. O túnel de vento deve ser operado a

$$V_m = Re_m \frac{\nu_m}{D_m} = 4{,}99 \times 10^5 \times 1{,}57 \times 10^{-4} \frac{\text{pé}^2}{\text{s}} \times \frac{1}{0{,}5 \text{ pé}}$$

$$V_m = 157 \text{ pé/s} \qquad V_m$$

Essa velocidade é baixa o suficiente para que os efeitos de compressibilidade sejam desprezados.

Nessas condições de teste, os escoamentos de modelo e de protótipo são dinamicamente semelhantes. Portanto,

$$\left.\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_m = \left.\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_p$$

e

$$F_p = F_m \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{V_p^2}{V_m^2} \frac{D_p^2}{D_m^2} = 5{,}58 \text{ lbf} \times \frac{1{,}99}{0{,}00238} \times \frac{(8{,}44)^2}{(157)^2} \times \frac{1}{(0{,}5)^2}$$

$$F_p = 53{,}9 \text{ lbf} \qquad F_p$$

Se a cavitação fosse esperada — se a sonda do sonar fosse operada a alta velocidade próximo à superfície livre da água — então resultados úteis não poderiam ser obtidos de um teste com modelo no ar.

{ Esse problema demonstra o cálculo de valores de protótipo a partir de dados de teste de modelo. }

7.5.1 Semelhança Incompleta

Mostramos que para alcançar semelhança dinâmica completa entre escoamentos geometricamente semelhantes é necessário duplicar os grupos adimensionais independentes; assim procedendo, o parâmetro dependente será duplicado.

Na situação simplificada do Problema-Exemplo 7.4, a duplicação do número de Reynolds entre modelo e protótipo assegurou escoamentos dinamicamente semelhantes. Testes no ar permitiram a reprodução exata do número de Reynolds (o que também poderia ter sido obtido num túnel de água, para essa situação). A força de arrasto sobre uma esfera realmente depende da natureza do escoamento de camada limite. Portanto, a semelhança geométrica requer que a rugosidade superficial relativa seja a mesma para modelo e protótipo. Isso significa que a rugosidade relativa também é um parâmetro que deve ser reproduzido entre

Universidade Federal do Rio G. do Norte
BIBLIOTECA CENTRAL

as situações para modelo e para protótipo. Se admitirmos que o modelo foi cuidadosamente construído, valores medidos do arrasto nos testes com o modelo poderão ser transpostos por escala para prever o arrasto nas condições de operação do protótipo.

Em muitos estudos com modelos, a consecução da semelhança dinâmica exige a reprodução de diversos grupos adimensionais. Em alguns casos, a completa semelhança dinâmica entre modelo e protótipo pode não ser alcançada. A determinação da força de arrasto (resistência) de um navio é um exemplo de uma dessas situações. A resistência sobre a superfície de um navio surge do atrito de contato com o casco (forças viscosas) e da resistência de ondas de superfície (forças de gravidade). A semelhança dinâmica completa requer que os números de Froude e de Reynolds sejam reproduzidos entre modelo e protótipo.

Em geral não é possível prever analiticamente a resistência causada pela formação de ondas, então ela deve ser modelada. Isso exige que

$$Fr_m = \frac{V_m}{(gL_m)^{1/2}} = Fr_p = \frac{V_p}{(gL_p)^{1/2}}$$

A igualdade dos números de Froude entre modelo e protótipo requer uma razão entre velocidades de

$$\frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2}$$

a fim de garantir configurações de ondas de superfície dinamicamente semelhantes.

Para qualquer escala de comprimento do modelo, a igualdade dos números de Froude determina a razão entre velocidades. Apenas a viscosidade cinemática pode ser alterada a fim de reproduzir o número de Reynolds. Então,

$$Re_m = \frac{V_m L_m}{\nu_m} = Re_p = \frac{V_p L_p}{\nu_p}$$

leva à condição que

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{V_m}{V_p}\frac{L_m}{L_p}$$

Se utilizarmos a razão entre velocidades obtida da igualdade dos números de Froude, a igualdade dos números de Reynolds leva a uma razão entre viscosidades cinemáticas de

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2}\frac{L_m}{L_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2}$$

Se L_m/L_p igualar 1/100 (uma escala típica de comprimento para testes com modelos de navios), então ν_m/ν_p deve ser 1/1000. A Fig. A.3 mostra que o mercúrio é o único líquido com viscosidade cinemática inferior à da água. Contudo, é apenas uma ordem de grandeza menor, aproximadamente; dessa forma, a razão entre viscosidades cinemáticas necessária para duplicar o número de Reynolds não pode ser obtida.

A água é o único fluido viável para a maioria dos testes com modelos de escoamentos com superfície livre. A obtenção da semelhança dinâmica completa requereria, então, um teste com um modelo em tamanho real. Entretanto, estudos de modelos fornecem informações úteis mesmo quando a semelhança completa não é obtida. A Fig. 7.1 apresenta dados obtidos num teste com um modelo de navio, em escala 1:80, realizado no laboratório de Hidromecânica da Academia Naval dos Estados Unidos. O gráfico mostra dados do coeficiente de resistência *versus* o número de Froude. Os pontos quadrados foram calculados a partir de valores da resistência total medida no teste.

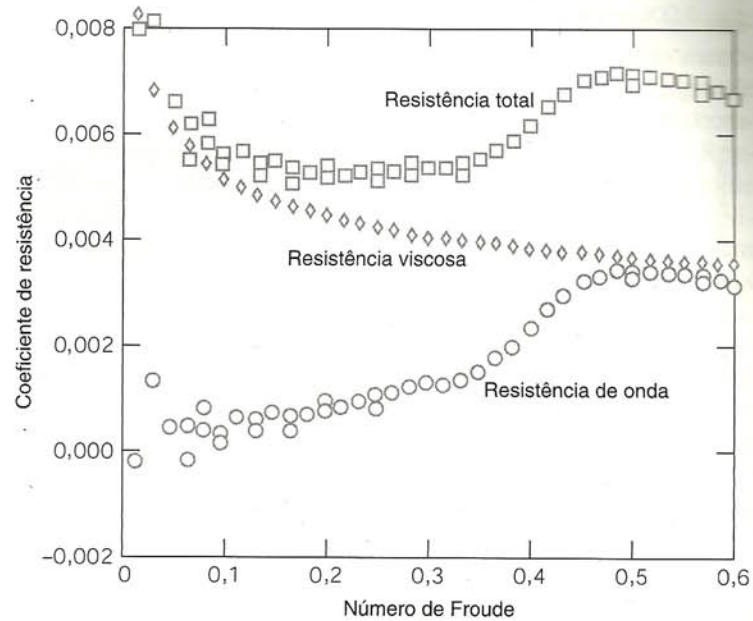



Fig. 7.1 Dados do teste de modelo em escala 1:80 do navio fragata *Oliver Hazard Perry* (FFG-7). (Dados do Laboratório de Hidromecânica da Academia Naval dos E.U.A., cortesia do Prof. Bruce Johnson.)

A resistência de navios em tamanho real pode ser calculada a partir de resultados de testes com modelo, usando-se o seguinte procedimento. A configuração das ondas de superfície, e por conseguinte a resistência por formação de ondas, é equiparada entre modelo e protótipo para números de Froude correspondentes. O arrasto viscoso sobre o modelo é estimado usando-se os métodos analíticos do Cap. 9 (os coeficientes estimados de resistência por atrito estão assinalados na Fig. 7.1 como losangos). A resistência por formação de ondas do modelo é calculada como a diferença entre o arrasto total e o arrasto de atrito estimado (os coeficientes estimados de resistência por formação de ondas para o modelo estão plotados como círculos).

A resistência por formação de ondas do protótipo é calculada com o transporte por escala do número de Froude, equacionando os coeficientes de resistência por formação de ondas para modelo e protótipo. Os pontos plotados como círculos na Fig. 7.2 para o protótipo são idênticos aos coeficientes do modelo para números de Froude correspondentes. O arrasto de atrito com o casco calculado analiticamente para o protótipo, mostrado na Fig. 7.2 pelos losangos, é somado aos coeficientes de resistência por formação de ondas transportados por escala, para prever os coeficientes de resistência total do protótipo.

Como o número de Reynolds não pode ser reproduzido para testes com modelos de navios, o comportamento da camada limite não é o mesmo para modelo e protótipo. O número de Reynolds do modelo é apenas $(L_m/L_p)^{3/2}$ maior que o valor do protótipo, de modo que a extensão do escoamento laminar na camada limite no modelo é também aumentada por um fator correspondente. O método acima descrito admite que o comportamento de camada limite pode ser transportado por fator de escala. Para tornar isto possível, a camada limite do modelo é "forçada" ou "estimulada" a tornar-se turbulenta num

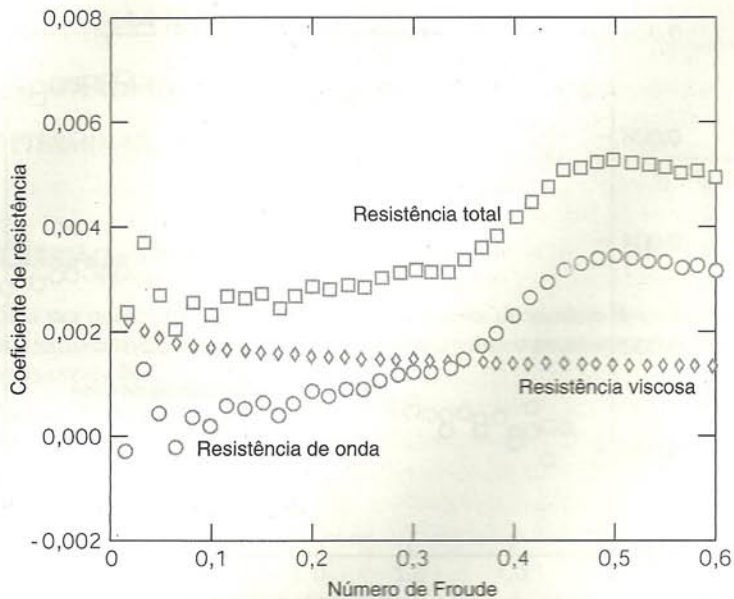



Fig. 7.2 Resistência de um navio em tamanho real prevista a partir de resultados de teste de modelo. (Dados do Laboratório de Hidromecânica da Academia Naval dos E.U.A., cortesia do Prof. Bruce Johnson.)

local que corresponda ao comportamento do navio em tamanho real. Pregos, ou "tachas", foram utilizados para estimular a camada limite para os resultados com modelo apresentados na Fig. 7.1.

Um fator de correção é, algumas vezes, adicionado aos coeficientes para tamanho real, calculados a partir dos dados de teste com modelo. Esse fator leva em consideração a rugosidade, a ondulação e a falta de uniformidade que inevitavelmente são mais pronunciadas no navio real do que no modelo. Comparações entre as previsões resultantes de testes com modelos e medições feitas em provas de mar com o navio sugerem uma precisão global dentro de ± 5 por cento [2].

O número de Froude é um importante parâmetro na modelagem matemática de rios e portos. Nessas situações não é prático obter semelhança completa. O emprego de uma escala razoável para o modelo levaria a profundidades de água extremamente pequenas. Forças viscosas e forças de tensão superficial teriam, relativamente, efeitos muito mais pronunciados no escoamento de modelo do que no de protótipo. Conseqüentemente, diferentes escalas de comprimento são empregadas para as direções vertical e horizontal. As forças viscosas no escoamento mais profundo de modelo são aumentadas por meio de elementos artificiais de rugosidade.

A ênfase na economia de combustível tornou a redução do arrasto aerodinâmico importante para automóveis, caminhões e ônibus. A maior parte do trabalho de desenvolvimento de configurações de baixo arrasto é feita usando testes com modelos. Tradicionalmente, os modelos de automóveis têm sido construídos na escala de 3/8, na qual um modelo de um automóvel real tem uma área frontal de aproximadamente 0,3 m^2. Dessa forma, os testes podem ser feitos num túnel de vento com área de seção de 6 m^2 ou maior. Na escala 3/8, uma velocidade de vento de cerca de 150 mph é necessária para modelar um protótipo trafegando

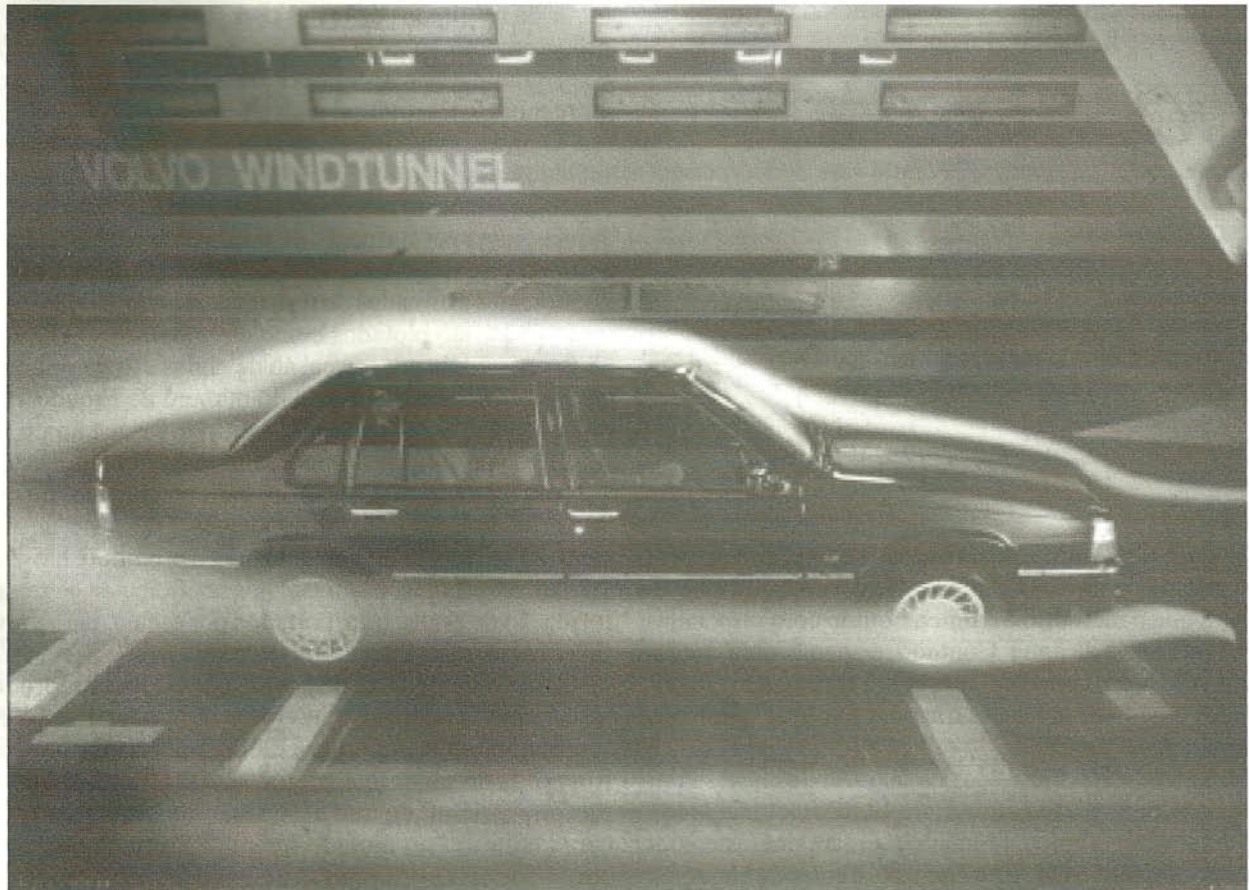



Fig. 7.3 Automóvel em escala real em teste no túnel de vento da Volvo, usando linhas de corrente de fumaça para visualização do escoamento. (Fotografia cortesia da Volvo Cars of North America, Inc.)

no limite legal de velocidade. Então, não há problema quanto aos efeitos da compressibilidade, mas os modelos em escala são caros e levam muito tempo para serem construídos.

Um grande túnel de vento (as dimensões da seção de teste são 5,4 m de altura, 10,4 m de largura e 21,3 m de comprimento; a velocidade máxima do ar é de 250 km/h com o túnel vazio) é usado pela General Motors para testar automóveis em tamanho real em velocidades de auto-estrada. A grande seção de teste permite o uso de automóveis saídos da linha de produção ou maquetes de argila em tamanho real com os estilos de carroceria propostos. Muitos outros fabricantes de veículos automotores estão usando instalações semelhantes; a Fig. 7.3 mostra um "sedan" em tamanho real sendo testado no túnel de vento da Volvo. A velocidade relativamente baixa permite a visualização do escoamento, usando-se tufos ou correntes de "fumaça".[2] Empregando "modelos" em tamanho real, estilistas e engenheiros podem trabalhar juntos em busca de resultados ótimos.

É mais difícil obter semelhança dinâmica em testes de caminhões e ônibus; os modelos devem ser feitos em escalas menores do que aquelas usadas para automóveis.[3] Uma escala grande para testes de caminhões e ônibus é 1:8. Para se obter uma completa semelhança dinâmica pela reprodução do número de Reynolds nessa escala, seria necessária uma velocidade de teste de 440 mph, o que introduziria efeitos indesejáveis de compressibilidade, e os escoamentos de modelo e de protótipo não seriam cinematicamente semelhantes. Felizmente, os caminhões e os ônibus são objetos "rombudos". Experiências mostram que acima de um certo número de Reynolds, o seu arrasto adimensional torna-se independente do número de Reynolds [5]. Embora a semelhança não seja completa, dados medidos de testes podem ser transportados por escala para prever as forças de arrasto do protótipo. O procedimento é ilustrado no Problema-Exemplo 7.5.

Para detalhes adicionais sobre as técnicas e aplicações da análise dimensional consulte [6-9].

[2] Uma mistura de nitrogênio líquido e vapor d'água pode ser usada para produzir linhas de emissão de "fumaça" que evaporam e não entopem as telas finas usadas para reduzir o nível de turbulência em um túnel de vento. Linhas de emissão podem se tornar "coloridas" em fotos pela colocação de um filtro sobre a lente da câmera. Essa e outras técnicas para visualização de escoamento são detalhadas em [3] e [4].

[3] O comprimento do veículo é particularmente importante em testes com grandes ângulos de ataque para simular comportamento através do vento. Considerações sobre obstrução de túneis limitam o tamanho aceitável do modelo. Veja [5] para práticas recomendadas.

EXEMPLO 7.5 — Semelhança Incompleta: Arrasto Aerodinâmico sobre um Ônibus

Os seguintes dados de teste num túnel de vento de um modelo em escala 1:16 de um ônibus estão disponíveis:

Velocidade do ar (m/s)	18,0	21,8	26,0	30,1	35,0	38,5	40,9	44,1	46,7
Força de arrasto (N)	3,10	4,41	6,09	7,97	10,7	12,9	14,7	16,9	18,9

Usando as propriedades do ar padrão, calcule e trace um gráfico do coeficiente adimensional de arrasto aerodinâmico,

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

versus o número de Reynolds, $Re = \rho V w/\mu$, onde w é a largura do modelo. Determine a velocidade mínima de teste acima da qual C_D permanece constante. Estime a força de arrasto aerodinâmico e os requisitos de potência para o veículo protótipo a 100 km/h. (A largura e a área frontal do protótipo são 8 pés e 84 pés^2, respectivamente.)

PROBLEMA-EXEMPLO 7.5

DADOS: Dados de teste de um modelo de ônibus num túnel de vento. As dimensões do protótipo são: largura de 8 pés e área frontal de 84 pés^2. A escala do modelo é 1:16. O ar padrão é o fluido de teste.

DETERMINAR:
(a) o coeficiente de arrasto aerodinâmico, $C_D = F_D/1/2\ \rho V^2 A$, *versus* o número de Reynolds, $Re = \rho V w/\mu$; plotar.
(b) A velocidade acima da qual C_D é constante.
(c) A força de arrasto aerodinâmico estimada e a potência requerida para o veículo em escala real a 100 km/h.

SOLUÇÃO:

A largura do modelo é

$$w_m = \frac{1}{16} w_p = \frac{1}{16} \times 8\ \text{pé} \times 0{,}3048\ \frac{\text{m}}{\text{pé}} = 0{,}152\ \text{m}$$

A área do modelo é

$$A_m = \left(\frac{1}{16}\right)^2 A_p = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \times 84\ \text{pé}^2 \times (0{,}305)^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{pé}^2} = 0{,}0305\ \text{m}^2$$

O coeficiente de arrasto aerodinâmico pode ser calculado como

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

$$= 2 \times F_D\,(\mathrm{N}) \times \frac{\mathrm{m}^3}{1{,}23\ \mathrm{kg}} \times \frac{\mathrm{s}^2}{(V)^2\ \mathrm{m}^2} \times \frac{1}{0{,}0305\ \mathrm{m}^2} \times \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2}$$

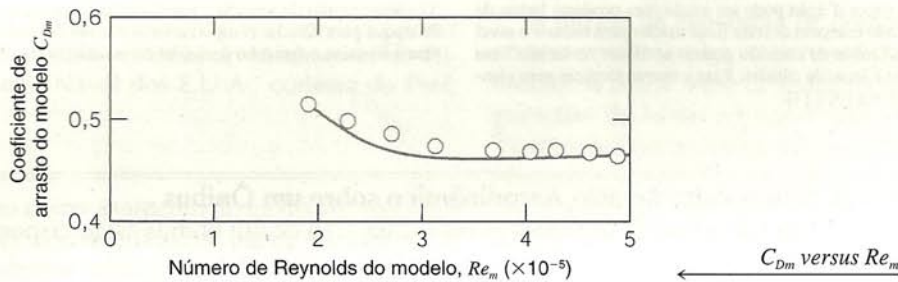
$$C_D = \frac{53{,}3\ F_D\,(\mathrm{N})}{[V(\mathrm{m/s})]^2}$$

O número de Reynolds pode ser calculado como

$$Re = \frac{\rho V w}{\mu} = \frac{V w}{\nu} = V\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times 0{,}152\ \mathrm{m} \times \frac{\mathrm{s}}{1{,}46 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2}$$

$$Re = 1{,}04 \times 10^4\ V(\mathrm{m/s})$$

Os valores calculados são plotados na seguinte figura:

C_{Dm} *versus* Re_m

O gráfico mostra que o coeficiente de arrasto do modelo torna-se constante em $C_{Dm} \approx 0{,}46$ acima de $Re_m = 4 \times 10^5$, o que corresponde à velocidade do ar de aproximadamente 40 m/s. Como o coeficiente de arrasto é independente do número de Reynolds acima de $Re \approx 4 \times 10^5$, então para o veículo protótipo, ($Re \approx 4{,}5 \times 10^6$), $C_D \approx 0{,}46$. A força de arrasto no veículo em escala real é

$$F_{Dp} = C_D \tfrac{1}{2}\rho V_p^2 A_p$$

$$= \frac{0{,}46}{2} \times 1{,}23\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\left(100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times 1000\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}} \times \frac{\mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s}}\right)^2 \times 84\ \text{pé}^2 \times (0{,}305)^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}$$

$$F_{Dp} = 1{,}71\ \mathrm{kN}$$

F_{Dp}

A potência correspondente necessária para vencer o arrasto aerodinâmico é

$$\mathcal{P}_p = F_{Dp} V_p$$

$$= 1{,}71 \times 10^3\ \mathrm{N} \times 100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times 1000\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}} \times \frac{\mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s}} \times \frac{\mathrm{W}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}$$

$$\mathcal{P}_p = 47{,}5\ \mathrm{kW}$$

$\mathcal{P}_p$

Esse exemplo ilustra a aplicação de dados de testes de modelos numa situação em que o arrasto adimensional é constante acima de um certo número de Reynolds mínimo. Nessa situação, não é necessário reproduzir o número de Reynolds do protótipo para se obter dados úteis dos testes. Contudo, *Recommended Practice* da SAE [5] sugere $Re \geq 2 \times 10^6$ para testes com ônibus e caminhões.

7.5.2 Lei das Escalas com Parâmetros Múltiplos Dependentes

Em algumas situações de importância prática pode haver mais de um parâmetro dependente. Em tais casos, os grupos adimensionais devem ser formados separadamente para cada parâmetro dependente.

Como exemplo, considere uma bomba centrífuga típica. A configuração detalhada do escoamento dentro de uma bomba varia com a vazão em volume e a velocidade; essas variações afetam o desempenho da bomba. Os parâmetros de desempenho de interesse incluem o aumento de pressão (ou altura de carga) desenvolvido, a potência de entrada requerida e a eficiência da máquina medida sob condições de operação específica.[4] As cur-

[4]Eficiência é definida como a razão entre a potência liberada para o fluido e a potência de entrada, $\eta = \mathcal{P}/\mathcal{P}_{entrada}$. Para escoamento incompressível, a equação de energia reduz-se a $\mathcal{P} = \rho Q h$ (quando a "carga" h é expressa como sendo energia por unidade de massa), ou a $\mathcal{P} = \rho g Q H$ (quando a altura H é expressa como sendo energia por unidade de peso).

vas de desempenho são geradas variando-se um parâmetro independente tal como a vazão em volume. Então, as variáveis independentes são vazão em volume, velocidade angular, diâmetro do rotor e propriedades do fluido. As variáveis dependentes são as diversas quantidades de desempenho de interesse.

A determinação de parâmetros independentes inicia-se com as equações simbólicas para a dependência da altura de carga, h (energia por unidade de massa, L^2/t^2), e da potência, $\mathcal{P}$, em relação aos parâmetros independentes, dada por

$$h = g_1(Q, \rho, \omega, D, \mu)$$

e

$$\mathcal{P} = g_2(Q, \rho, \omega, D, \mu)$$

O emprego direto do teorema dos Pi fornece o *coeficiente de altura de carga* e o *coeficiente de potência*, adimensionais, como

$$\frac{h}{\omega^2 D^2} = f_1\left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}\right) \tag{7.1}$$

e

$$\frac{\mathcal{P}}{\rho\omega^3 D^5} = f_2\left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}\right) \tag{7.2}$$

O parâmetro adimensional $Q/\omega D^3$ nessas equações é o *coeficiente de escoamento*. O parâmetro adimensional $\rho\omega D^2/\mu$ ($\propto \rho VD/\mu$) é uma forma de número de Reynolds.

A altura de carga e a potência, numa bomba, são desenvolvidas por forças de inércia. Tanto a configuração do interior de uma bomba quanto o seu desempenho variam com a vazão em volume e com a velocidade de rotação. É difícil prever o desempenho analiticamente exceto no ponto de projeto da bomba, por isso ele é medido experimentalmente. Curvas características típicas, obtidas de dados experimentais para uma bomba centrífuga testada a velocidade constante, são mostradas na Fig. 7.4 como funções da vazão em volume. As curvas de carga, potência e eficiência na Fig. 7.4 foram suavizadas e ajustadas para passar pelos pontos calculados a partir dos dados medidos. A máxima eficiência ocorre em geral no ponto de projeto.

A completa semelhança nos testes de desempenho de bombas exigiria coeficientes de escoamento e número de Reynolds idênticos. Na prática, verificou-se que os efeitos viscosos são

Fig. 7.4 Curvas características típicas para uma bomba centrífuga testada à velocidade constante.

relativamente sem importância quando duas máquinas geometricamente semelhantes operam sob condições de escoamento "similares". Assim, das Eqs. 7.1 e 7.2, quando

$$\frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3} \tag{7.3}$$

segue que

$$\frac{h_1}{\omega_1^2 D_1^2} = \frac{h_2}{\omega_2^2 D_2^2} \tag{7.4}$$

e

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\rho_1\omega_1^3 D_1^5} = \frac{\mathcal{P}_2}{\rho_2\omega_2^3 D_2^5} \tag{7.5}$$

A observação empírica de que os efeitos viscosos são sem importância sob condições similares de escoamento permite o emprego das Eqs. 7.3 a 7.5 para transportar, por escala, as características de desempenho de máquinas para diferentes condições de operação, quando se varia o diâmetro ou a velocidade. Esses úteis relacionamentos por escala são conhecidos como "leis" das bombas ou dos ventiladores. Se as condições de operação forem conhecidas para uma máquina, as condições de operação de qualquer máquina geometricamente semelhante podem ser determinadas pela variação de D e ω de acordo com as Eqs. 7.3 a 7.5. (Mais detalhes sobre análise dimensional, projeto e curvas de desempenho para máquinas de fluxo são apresentados no Cap. 10.)

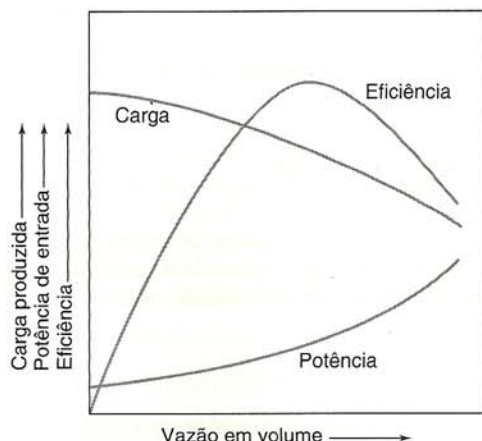
Um outro parâmetro útil de bomba pode ser obtido eliminando-se o diâmetro da máquina nas Eqs. 7.3 e 7.4. Designando $\Pi_1 = Q/\omega D^3$ e $\Pi_2 = h/\omega^2 D^2$, então a razão $\Pi_1^{1/2} / \Pi_2^{3/4}$ é um outro parâmetro adimensional; esse parâmetro é a *velocidade específica*, N_s,

$$N_s = \frac{\omega Q^{1/2}}{h^{3/4}} \tag{7.6a}$$

A velocidade específica, como definida na Eq. 7.6a, é um parâmetro adimensional (desde que a altura de carga total, h, seja expressa em unidades de energia por unidade de massa). Você pode imaginar a velocidade específica como a velocidade requerida para uma máquina produzir uma altura de carga unitária a uma vazão volumétrica unitária. Uma velocidade específica constante descreve todas as condições de operação de máquinas geometricamente semelhantes com condições de escoamento similares.

Embora a velocidade específica seja um parâmetro adimensional, é prática comum usar um conveniente, porém inconsistente, conjunto de unidades na especificação das variáveis ω e Q, e usar a energia por unidade de peso H no lugar da energia por unidade de massa h na Eq. 7.6a. Quando isso é feito, a velocidade específica, dada pela equação 7.6b,

$$N_{s_{cu}} = \frac{\omega Q^{1/2}}{H^{3/4}} \tag{7.6b}$$

deixa de ser um parâmetro sem unidades e sua magnitude depende das unidades usadas para calculá-la. Unidades típicas para bombas utilizadas na prática de engenharia nos Estados Unidos são rpm para ω, gpm para Q e pés (energia por unidade de peso) para H. Nessas unidades, velocidades específicas "baixas" significam $500 < N_{s_{cu}} < 4.000$, e "altas" significam $10.000 < N_{s_{cu}} < 15.000$. O Problema-Exemplo 7.6 ilustra o emprego das leis de escala das bombas e do parâmetro de velocidade específica. Mais detalhes sobre cálculos de velocidade específica e exemplos adicionais de aplicações às máquinas de fluxo são apresentados no Cap. 10.

EXEMPLO 7.6 — "Leis" das Bombas

Uma bomba centrífuga tem uma eficiência de 80 por cento na sua velocidade específica de projeto de 2000 (unidades de rpm, gpm e pés). O diâmetro do rotor é 8 pol. Nas condições de escoamento do ponto de projeto, a vazão em volume é 300 gpm de água a 1170 rpm. Para se obter uma vazão volumétrica maior, a bomba deve ser adaptada com um motor de 1750 rpm. Use as "leis" das bombas para determinar as características de desempenho da bomba no ponto de projeto na velocidade mais alta. Mostre que a velocidade específica permanece constante para a velocidade de operação mais alta. Determine a potência requerida do motor.

PROBLEMA-EXEMPLO 7.6

DADOS: Bomba centrífuga com velocidade específica de projeto de 2000 (em unidades de rpm, gpm e pés). O diâmetro do rotor é $D = 8$ pol. No ponto de projeto da bomba, as condições de escoamento são $\omega = 1170$ rpm e $Q = 300$ gpm, com água.

DETERMINAR: (a) As características de desempenho, (b) a velocidade específica e (c) a potência requerida do motor, para condições de escoamento similar a 1750 rpm.

SOLUÇÃO:

Das "leis" das bombas, $Q/\omega D^3$ = constante, então

$$Q_2 = Q_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 = 300 \text{ gpm} \left(\frac{1750}{1170}\right)(1)^3 = 449 \text{ gpm} \qquad \longleftarrow Q_2$$

A altura de carga da bomba não é especificada em $\omega_1 = 1170$ rpm, mas pode ser calculada a partir da velocidade específica, $N_{s_{cu}} = 2000$. Usando as unidades dadas e a definição de $N_{s_{cu}}$,

$$N_{s_{cu}} = \frac{\omega Q^{1/2}}{H^{3/4}} \quad \text{então} \quad H_1 = \left(\frac{\omega_1 Q_1^{1/2}}{N_{s_{cu}}}\right)^{4/3} = 21{,}9 \text{ pés}$$

Então, $H/\omega^2 D^2$ = constante, logo

$$H_2 = H_1\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = 21{,}9\,\text{pés}\left(\frac{1750}{1170}\right)^2(1)^2 = 49{,}0\,\text{pés} \qquad \longleftarrow H_2$$

A potência fornecida pela bomba é $\mathcal{P}_1 = \rho g Q_1 H_1$, logo em $\omega_1 = 1170$ rpm,

$$\mathcal{P}_1 = 1{,}94\,\frac{\text{slug}}{\text{pé}^3} \times 32{,}2\,\frac{\text{pés}}{\text{s}^2} \times 300\,\frac{\text{gal}}{\text{min}} \times 21{,}9\,\text{pés} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48\,\text{gal}} \times \frac{\text{min}}{60\,\text{s}} \times \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{pé}} \times \frac{\text{hp}\cdot\text{s}}{550\,\text{pés}\cdot\text{lbf}}$$

$$\mathcal{P}_1 = 1{,}66 \text{ hp}$$

Mas $\mathcal{P}/\rho\omega^3 D^5$ = constante, logo

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 = 1{,}66\,\text{hp}\,(1)\left(\frac{1750}{1170}\right)^3(1)^5 = 5{,}55 \text{ hp} \qquad \longleftarrow \mathcal{P}_2$$

A potência de entrada requerida pode ser calculada como

$$\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{\mathcal{P}_2}{\eta} = \frac{5{,}55 \text{ hp}}{0{,}80} = 6{,}94 \text{ hp} \qquad \longleftarrow \mathcal{P}_{\text{in}}$$

Assim, um motor de 7,5 hp (a mais próxima potência superior de padrão comercial) provavelmente seria especificado.

A velocidade específica em $\omega_2 = 1750$ rpm é

$$N_{s_{cu}} = \frac{\omega Q^{1/2}}{H^{3/4}} = \frac{1750\,(449)^{1/2}}{(49{,}0)^{3/4}} = 2000 \qquad \longleftarrow N_{s_{cu}}$$

Esse exemplo ilustra a aplicação das "leis" das bombas e da velocidade específica para o transporte por escala de dados de desempenho. As "leis" das bombas e dos ventiladores são largamente empregadas na indústria para transportar por escala curvas de desempenho de famílias de máquinas a partir de uma única curva de desempenho, e para especificar velocidade de acionamento e potência em aplicações de máquinas.

7.5.3 Comentários sobre Testes de Modelos

Ao descrever os procedimentos adotados nos testes com modelos, tentamos não inferir que isso é uma tarefa simples que fornece automaticamente resultados de fácil interpretação, precisos e completos. Como em todo trabalho experimental, são necessários planejamento e execução criteriosos para se obter resultados válidos. Os modelos devem ser construídos cuidadosa e precisamente,

devendo incluir detalhes suficientes em áreas críticas para o fenômeno sob avaliação. Balanças aerodinâmicas ou outros sistemas de medição de forças devem ser alinhados e calibrados corretamente. Devem ser idealizados métodos de montagem que ofereçam rigidez e liberdade de movimentos adequados ao modelo, sem interferir com o fenômeno que se deseja avaliar. As referências [10-12] são consideradas fontes padrão para detalhes sobre técnicas de testes em túneis de vento. Técnicas mais especializadas para testes de impacto de água são descritas em [13].

As instalações experimentais devem ser projetadas e construídas cuidadosamente. A qualidade de um escoamento num túnel de vento deve ser documentada. O escoamento na seção de teste deve ser tão uniforme quanto possível (a menos que se deseje simular um perfil especial, como uma camada limite atmosférica), livre de ângulos e com o mínimo de redemoinhos. Se interferirem com as medições, as camadas limites nas paredes do túnel devem ser removidas por sucção ou energizadas por sopro. Os gradientes de pressão na seção de teste de um túnel de vento podem causar leituras errôneas da força de arrasto devido às variações de pressão na direção do escoamento.

Instalações especiais são necessárias para condições incomuns ou para requisitos de teste especiais, como para se obter grandes números de Reynolds. Muitas instalações são tão grandes ou especializadas que não podem ser mantidas por laboratórios de universidades ou pela indústria privada. Alguns exemplos incluem [14-16]:

- Complexo Nacional de Aerodinâmica em Escala Real, NASA, Centro de Pesquisa Ames, Moffett Field, Califórnia
  Duas seções de teste de túnel de vento, acionadas por sistema elétrico de 125.000 hp:
  - Seção de teste com 40 pés de altura e 80 pés de largura (12 m × 24 m), máxima velocidade do vento de 300 nós.
  - Seção de teste com 80 pés de altura e 120 pés de largura (24 m × 36 m), máxima velocidade do vento de 137 nós.
- Marinha dos Estados Unidos, Centro de Pesquisas David Taylor, Carderock, Maryland.
  - Bacia de reboque de alta velocidade, com 2968 pés de comprimento, 21 pés de largura e 16 pés de profundidade. O carro de reboque pode trafegar à velocidade de até 100 nós enquanto mede cargas de arrasto de até 8000 lbf e cargas laterais de até 2000 lbf.
  - Túnel de água de pressão variável de 36 pol., com máxima velocidade de teste de 50 nós para pressões entre 2 e 60 psia.
  - Instalações para escoamento antieco, com escoamento calmo, de baixa turbulência, em seção de teste de jato aberto de 8 pés quadrados por 21 pés de comprimento. O ruído do escoamento na velocidade máxima de 200 pés/s é menor do que aquele de uma conversação normal.
- Corpo de Engenheiros do Exército dos Estados Unidos, Sausalito, Califórnia.
  - Modelos da Baía de San Francisco e do Delta, com pouco mais de um acre de área, escala horizontal de 1:1000 e escala vertical de 1:100, capacidade de bombeamento de 13.500 gpm, uso de água doce e salgada, e simulação de maré.
- NASA, Centro de Pesquisas Langley, Hampton, Virginia.
  - Instalação Transônica Nacional (NTF) com tecnologia criogênica (temperaturas tão baixas quanto −300°F) para reduzir a viscosidade do gás, elevando o número de Reynolds de um fator 6, enquanto reduz para a metade a potência de acionamento.

7.6 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS BÁSICAS EM FORMAS ADIMENSIONAIS

O pleno êxito na utilização do teorema dos Pi de Buckingham é determinado pela sabedoria na seleção dos parâmetros. Se um conjunto completo for escolhido, os resultados serão completos. Se uma variável importante for omitida, os resultados serão sem significado. Variáveis adicionais podem ser incluídas se houver alguma incerteza. Com o ganho de experiência sobre os fenômenos de escoamento dos fluidos, o processo de seleção torna-se mais fácil. A experiência também provê maior entendimento sobre o significado físico de cada grupo adimensional.

Um enfoque mais rigoroso e amplo na determinação das condições sob as quais dois escoamentos são semelhantes é utilizar as equações diferenciais que os governam e as respectivas condições de fronteira. A semelhança pode ser obtida quando dois fenômenos físicos são governados por equações diferenciais e condições de fronteira que têm as mesmas formas adimensionais. A semelhança dinâmica é garantida pela duplicação ou reprodução dos coeficientes adimensionais das equações e das condições de fronteira entre protótipo e modelo.

Como exemplo do processo de tornar adimensionais as equações diferenciais básicas, considere o escoamento permanente, incompressível e bidimensional no plano xy. Admita que a gravidade atua no sentido negativo da direção y.

A equação para a conservação da massa é

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (7.7)$$

e as equações de Navier-Stokes (Eqs. 5.27) reduzem-se a

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (7.8)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\rho g -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (7.9)$$

Para tornar essas equações adimensionais, divida todos os comprimentos por um comprimento de referência, L, e todas as velocidades por uma velocidade de referência, V_∞, que usualmente é tomada como a velocidade da corrente livre. Torne a pressão adimensional dividindo-a por ρV_∞^2 (duas vezes a pressão dinâmica da corrente livre). Denotando as quantidades adimensionais com asteriscos, obtemos

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad u^* = \frac{u}{V_\infty} \quad v^* = \frac{v}{V_\infty} \quad \text{e} \quad p^* = \frac{p}{\rho V_\infty^2} \qquad (7.10)$$

A fim de ilustrar o procedimento de tornar adimensionais as equações, considere dois termos típicos nessas equações,

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = V_\infty\left(\frac{u}{V_\infty}\right)\frac{\partial(u/V_\infty)V_\infty}{\partial(x/L)L} = \frac{V_\infty^2}{L}u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial(y/L)L}\left[\frac{\partial(u/V_\infty)V_\infty}{\partial(y/L)L}\right] = \frac{V_\infty}{L^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Seguindo esse procedimento, as Eqs. 7.7, 7.8 e 7.9 podem ser escritas

$$\frac{V_\infty}{L}\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V_\infty}{L}\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \qquad (7.11)$$

$$\frac{\rho V_\infty^2}{L}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) = -\frac{\rho V_\infty^2}{L}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu V_\infty}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \qquad (7.12)$$

$$\frac{\rho V_\infty^2}{L}\left(u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)=-\rho g-\frac{\rho V_\infty^2}{L}\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+$$
$$+\frac{\mu V_\infty}{L^2}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \qquad (7.13)$$

Dividindo a Eq. 7.11 por V_∞/L e as Eqs. 7.12 e 7.13 por $\rho V_\infty^2 / L$ obtemos

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0 \qquad (7.14)$$

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{\mu}{\rho V_\infty L}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \qquad (7.15)$$

$$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=-\frac{gL}{V_\infty^2}-\frac{\partial p^*}{\partial y^*}$$
$$+\frac{\mu}{\rho V_\infty L}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \qquad (7.16)$$

Das equações adimensionais (Eqs. 7.14, 7.15, 7.16), concluímos que as equações diferenciais para dois sistemas de escoamento serão idênticas se, e somente se, as quantidades $\mu/\rho V_\infty L$ e gL/V_∞^2 forem as mesmas para ambos os escoamentos. Dessa forma, estudos com modelos para determinação da força de arrasto sobre um navio exigem a reprodução tanto do número de Froude quanto do número de Reynolds para assegurar escoamentos dinamicamente semelhantes.

Para escoamentos em torno de corpos submersos, bem abaixo da superfície livre, como o caso da esfera do Problema-Exemplo 7.4, as forças de campo não são importantes. As equações que governam a situação não incluem o termo de força de corpo, ρg. Para esse caso, a redução das equações que a governam a formas adimensionais mostra que as equações adimensionais que governam dois escoamentos serão idênticas se o número de Reynolds for o mesmo para ambos os escoamentos.

Até aqui, concentramo-nos nas equações diferenciais que governam o escoamento. É importante enfatizar que além de equações adimensionais idênticas, as condições de contorno adimensionais também devem ser idênticas para que os dois escoamentos sejam cinematicamente semelhantes. Isso conduz ao requisito de semelhança geométrica entre os escoamentos. A redução das condições de contorno a formas adimensionais pode levar a requisitos adicionais que devem ser atendidos entre os dois escoamentos. Por exemplo, considere o caso em que a velocidade num ponto especificado é periódica. A condição de contorno (*bc*) especifica, então,

$$u_{bc}=V_\infty \operatorname{sen}\omega t$$

Se tornarmos o tempo adimensional usando a razão entre a velocidade e o comprimento de referência, vem

$$t^*=\frac{tV_\infty}{L}$$

A condição de contorno adimensional torna-se

$$u_{bc}^*=\frac{u_{bc}}{V_\infty}=\operatorname{sen}\left(\frac{\omega L}{V_\infty}t^*\right)$$

A reprodução da condição de contorno requer que o parâmetro $\omega L/V_\infty$ seja o mesmo para os dois escoamentos. Esse parâmetro é o *número de Strouhal*

$$St=\frac{\omega L}{V_\infty}$$

assim denominado em homenagem ao físico alemão que descobriu a sua importância enquanto investigava o "cantar" autoexcitado de fios ao vento.

O estabelecimento de semelhança a partir das equações diferenciais e condições de contorno que descrevem o escoamento é um procedimento rigoroso. Se começarmos com as equações corretas e executarmos cada etapa corretamente poderemos estar seguros de que todas as variáveis apropriadas estarão incluídas. Deduções e exemplos adicionais do estabelecimento de semelhança, a partir das equações que governam o escoamento, são apresentados em [17] e [18].

As equações diferenciais governantes são freqüentemente escritas na forma adimensional para solução numérica. O transporte por fator de escala é simplificado e os problemas de conversão de unidade são reduzidos quando se empregam formas adimensionais das equações. O emprego de equações adimensionais muitas vezes permite a apresentação das soluções em forma generalizada.

7.7 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o estudo do Cap. 7, você será capaz de:

1. Definir:

Número de Reynolds	Número de Mach
Número de Euler (coeficiente de pressão)	Número de Strouhal
Número de cavitação	semelhança geométrica
Número de Froude	semelhança cinemática
Número de Weber	semelhança dinâmica

2. Enunciar o teorema dos Pi de Buckingham.
3. Dado um problema físico no qual o parâmetro dependente é uma função de parâmetros independentes especificados, determinar um conjunto de razões adimensionais independentes que o caracterizam.
4. Enunciar as condições sob as quais o comportamento do protótipo pode ser previsto a partir de testes de modelos.
5. Prever os resultados para um protótipo a partir de dados obtidos com testes de modelos.
6. Obter coeficientes adimensionais pela redução das equações diferenciais que governam o escoamento a formas adimensionais.
7. Resolver os problemas ao final do capítulo que se relacionem com o material que você estudou.

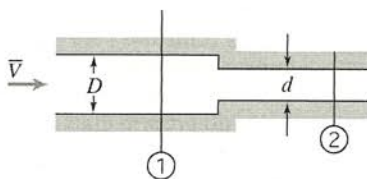
REFERÊNCIAS

1. Buckingham, E., "On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations," *Physical Review, 4*, 4, 1914, pp. 345–376.

2. Todd, L. H., "Resistance and Propulsion," in *Principles of Naval Architecture*, J. P. Comstock, ed. New York: Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1967.
3. "Aerodynamic Flow Visualization Techniques and Procedures," Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, SAE Information Report HS J1566, January 1986.
4. Merzkirch, W., *Flow Visualization*, 2nd ed. New York: Academic Press, 1987.
5. "SAE Wind Tunnel Test Procedure for Trucks and Buses," *Recommended Practice* SAE J1252, Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1981.
6. Sedov, L. I., *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. New York: Academic Press, 1959.
7. Birkhoff, G., *Hydrodynamics—A Study in Logic, Fact, and Similitude*, 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1960.
8. Ipsen, D. C., *Units, Dimensions, and Dimensionless Numbers*. New York: McGraw-Hill, 1960.
9. Yalin, M. S., *Theory of Hydraulic Models*. New York: Macmillan, 1971.
10. Pankhurst, R. C., and D. W. Holder, *Wind-Tunnel Technique*. London: Pitman, 1965.
11. Rae, W. H., and A. Pope, *Low-Speed Wind Tunnel Testing*, 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 1984.
12. Pope, A., and K. L. Goin, *High-Speed Wind Tunnel Testing*. New York: Krieger, 1978.
13. Waugh, J. G., and G. W. Stubstad, *Hydroballistics Modeling*. San Diego, CA: U.S. Naval Undersea Center, *ca.* 1965.
14. Baals, D. W., and W. R. Corliss, *Wind Tunnels of NASA*. Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration, SP-440, 1981.
15. Vincent, M., "The Naval Ship Research and Development Center," Carderock, MD: Naval Ship Research and Development Center, Report 3039 (Revised), November 1971.
16. Smith, B. E., P. T. Zell, and P. M. Shinoda, "Comparison of Model- and Full-Scale Wind-Tunnel Performance," *Journal of Aircraft, 27*, 3, March 1990, pp. 232–238.
17. Kline, S. J., *Similitude and Approximation Theory*. New York: McGraw-Hill, 1965.
18. Hansen, A. G., *Similarity Analysis of Boundary-Value Problems in Engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964.
19. Kowalski, T., "Hydrodynamics of Water-Borne Bodies," in *Introduction to Ocean Engineering*, H. Schenck, ed. New York: McGraw-Hill, 1975.

PROBLEMAS

7.1 A velocidades muito baixas, a força de arrasto sobre um objeto é independente da massa específica do fluido. Assim, a força, F, sobre uma pequena esfera é uma função apenas da velocidade, V, da viscosidade do fluido, μ, e do diâmetro da esfera, D. Utilize análise dimensional para expressar a força de arrasto como uma função dessas variáveis.

7.2 Experimentos mostram que a queda de pressão devida ao escoamento através de uma contração súbita num duto circular pode ser expressa como $\Delta p = p_1 - p_2 = f(\rho, \mu, \overline{V}, d, D)$. Organize alguns dados experimentais. Obtenha os parâmetros adimensionais resultantes.

P7.2

7.3 A espessura da camada limite, δ, numa placa plana lisa em um escoamento incompressível, sem gradiente de pressão, depende da velocidade de corrente livre, U, da massa específica do fluido, ρ, da viscosidade do fluido, μ, e da distância em relação à borda de ataque da placa, x. Expresse essas variáveis em forma adimensional.

7.4 A tensão de cisalhamento na parede, τ_w, numa camada limite, depende da distância em relação à borda de ataque do objeto, x, da massa especifica, ρ, da viscosidade, μ, do fluido e da velocidade de corrente livre do escoamento, U. Obtenha os grupos adimensionais e expresse a relação funcional entre eles.

7.5 A velocidade média, $\bar{u}$, para escoamento turbulento num tubo ou numa camada limite pode ser correlacionada usando-se a tensão de cisalhamento na parede, τ_w, a distância da parede, y, e as propriedades do fluido, ρ e μ. Use análise dimensional para determinar um parâmetro adimensional contendo $\bar{u}$ e outro contendo y que sejam adequados para organizar dados experimentais. Mostre que o resultado pode ser escrito

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = f\left(\frac{yu_*}{\nu}\right)$$

onde $u_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ é a *velocidade de atrito*.

7.6 Medições da altura de líquido feitas à montante de uma obstrução colocada num escoamento em canal aberto podem ser usadas para determinar a vazão em volume. (Tais obstruções, projetadas e calibradas para medirem a vazão em volume de um escoamento em canal aberto, são chamadas *vertedores*.) Admita que a vazão

volumétrica, Q, sobre um vertedor, é uma função da altura à montante, h, da gravidade, g, e da largura do canal, b. Use análise dimensional para determinar a dependência funcional de Q em relação às outras variáveis.

7.7 A velocidade, V, de uma onda de superfície livre causada pela gravidade em local de águas profundas é uma função do comprimento de onda, λ, da profundidade, D, da massa específica, ρ, e da aceleração da gravidade, g. Use análise dimensional para determinar a dependência funcional de V em relação às outras variáveis. Expresse V na forma mais simples possível.

7.8 Ondas capilares são formadas na superfície livre de um líquido como resultado da tensão superficial. Elas têm comprimentos de onda curtos. A velocidade de uma onda capilar depende da tensão superficial, σ, do comprimento de onda, λ, e da massa específica do líquido, ρ. Use análise dimensional para expressar a velocidade da onda como uma função dessas variáveis.

7.9 Sabe-se que a capacidade de carga, W, de um mancal de deslizamento depende do diâmetro, D, do comprimento, l, da folga, c, do mancal, além da velocidade angular, ω, e da viscosidade do lubrificante, μ. Determine os parâmetros adimensionais que caracterizam esse problema.

7.10 Um disco gira perto de uma superfície fixa. O raio do disco é R, e o espaço entre o disco e a superfície está preenchido com um líquido de viscosidade, μ. O espaçamento entre o disco e a superfície é h, e o disco gira à velocidade angular ω. Determine a dependência entre o torque sobre o disco, T, e as outras variáveis.

7.11 A potência por unidade de área de seção reta, E, transmitida por uma onda sonora, é uma função da velocidade da onda, V, da massa específica do meio, ρ, da amplitude da onda, r, e da freqüência da onda, n. Determine, por análise dimensional, a forma geral da expressão de E em termos das outras variáveis.

7.12 Supõe-se que a potência, $\mathcal{P}$, requerida para acionar um ventilador depende da massa específica do fluido, ρ, da vazão em volume, Q, do diâmetro do rotor, D, e da velocidade angular, ω. Use análise dimensional para determinar a dependência de $\mathcal{P}$ em relação às outras variáveis.

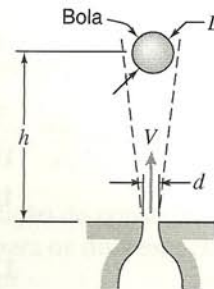
7.13 Determine um conjunto de parâmetros adimensionais para organizar dados de um experimento de laboratório no qual um tanque é drenado por meio de um orifício, partindo de uma altura inicial de líquido, h_0. O tempo, τ, para esvaziar o tanque depende do seu diâmetro, D, do diâmetro do orifício, d, da aceleração da gravidade, g, da massa específica do líquido, ρ, e da viscosidade do líquido, μ. Quantos parâmetros adimensionais resultarão? Quantas variáveis repetentes devem ser selecionadas para determinar os parâmetros adimensionais? Obtenha o parâmetro Π que contém a viscosidade.

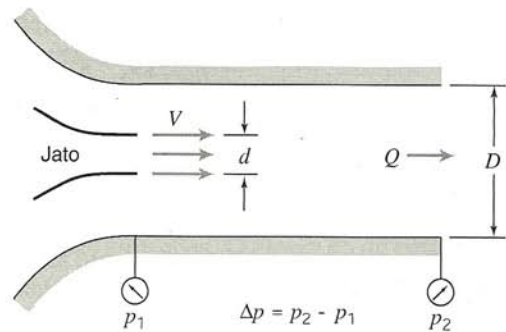
7.14 Numa experiência de laboratório de mecânica dos fluidos, um tanque de água com diâmetro D é drenado a partir do seu nível inicial, h_0. O orifício de drenagem, perfeitamente arredondado e de bordas muito lisas, tem diâmetro d. Admita que a vazão em massa de saída do tanque é uma função de h, D, d, g, ρ, e μ, onde g é a aceleração da gravidade e ρ e μ são propriedades do fluido. Dados medidos devem ser correlacionados em forma adimensional. Determine o número de parâmetros adimensionais resultantes. Especifique o número de parâmetros repetentes que deverão ser selecionados para determinar os parâmetros adimensionais. Obtenha o parâmetro Π que contém a viscosidade.

7.15 Uma correia contínua movendo-se verticalmente através de um banho de líquido viscoso arrasta uma camada de líquido, de espessura h, junto com ela. Admite-se que a vazão em volume de líquido, Q, depende de μ, ρ, g, h e V, onde V é a velocidade da correia. Aplique análise dimensional para prever a forma de dependência de Q em relação às outras variáveis.

7.16 Admita que a força resistente, R, de uma placa plana imersa num fluido depende da viscosidade e da massa específica do fluido, da velocidade, da largura, b, e da altura, h, da placa. Determine um conjunto de coordenadas convenientes para organizar os dados.

7.17 Pequenas gotículas são formadas quando um jato de líquido se parte num borrifo em processos de injeção de combustível. Supõe-se que o diâmetro da gotícula resultante, d, depende da massa específica, da viscosidade e da tensão superficial do líquido, assim como da velocidade, V, e do diâmetro, D, do jato. Quantas razões adimensionais são necessárias para caracterizar esse processo? Determine essas razões.

7.18 O esquema mostra um jato de ar descarregando verticalmente. Experimentos mostram que uma bola colocada no jato fica suspensa numa posição estável. A altura de equilíbrio da bola no jato depende de D, d, V, ρ, μ e W, onde W é o peso da bola. Sugere-se a análise dimensional para correlacionar os dados experimentais. Determine os parâmetros Π que caracterizam esse fenômeno.

P7.18

7.19 Considere a bomba de jato mostrada. Uma análise dimensional é necessária para organizar os dados de desempenho medidos para a bomba de jato. A dependência funcional é $\Delta p = f(\rho, V, d, D, \mu, Q)$. Determine o número de grupos adimensionais necessários para caracterizar a bomba de jato. Obtenha os grupos adimensionais que contenham a vazão em volume, Q, e a viscosidade, μ.

P7.19

7.20 Um grande tanque de líquido sob pressão é drenado por meio de bocal de perfil muito liso e de linhas suaves, de área A. Admite-se que a vazão em massa depende da área no bocal, A, da massa específica do líquido, ρ, da diferença de altura entre a superfície do líquido e o bocal, h, da pressão manométrica no tanque, Δp, e da aceleração da gravidade, g. Determine quantos parâmetros independentes Π podem ser formados para esse problema. Determine os parâmetros adimensionais. Enuncie a relação funcional para a vazão em massa em termos dos parâmetros adimensionais.

7.21 O spin, giro em torno do próprio eixo, tem importante papel na trajetória de bolas de golfe, pingue-pongue e tênis. Portanto, é importante conhecer a taxa com que o spin decresce para uma bola em vôo. Supõe-se que o torque aerodinâmico, T, atuando sobre a bola em vôo, depende da velocidade de vôo, V, da massa específica, ρ, e da viscosidade, μ, do ar, do diâmetro da bola, D, da taxa de spin (velocidade angular), ω, e do diâmetro das cavidades da bola, d. Determine os parâmetros adimensionais que resultam.

7.22 O impulso de uma hélice de embarcação deve ser medido durante testes em "água aberta" a diversas velocidades angulares e velocidades à frente ("velocidades de avanço"). Supõe-se que o impulso, F_T, depende da massa específica da água, ρ, do diâmetro da hélice, D, da velocidade de avanço, V, da aceleração da gravidade, g, da velocidade angular, ω, da pressão no líquido, p, e da viscosidade do líquido, μ. Desenvolva um conjunto de parâmetros adimensionais para caracterizar o desempenho da hélice. (Um dos parâmetros resultantes, gD/V^2, é conhecido como *velocidade de avanço de Froude*.)

7.23 A perda de potência, $\mathscr{P}$, num mancal de deslizamento depende do comprimento, l, do diâmetro, D, e da folga, c, do mancal, além da velocidade angular, ω. A viscosidade do lubrificante e a pressão média também são importantes. Obtenha os parâmetros adimensionais que caracterizam esse problema. Determine a forma funcional da dependência de $\mathscr{P}$ em relação a esses parâmetros.

7.24 A potência, $\mathscr{P}$, necessária para acionar uma hélice depende das seguintes variáveis: velocidade de corrente livre, V, diâmetro da hélice, D, velocidade angular, ω, viscosidade do fluido, μ, massa específica do fluido, ρ, e velocidade do som no fluido, c. Quantos grupos adimensionais são necessários para caracterizar essa situação? Obtenha esses grupos.

7.25 Que propriedades do líquido e do gás envolvente você espera que controle a separação de um jato líquido em gotas? Faça uma análise dimensional desse problema.

7.26 Admite-se que, num forno de convecção assistido por ventilador, a taxa de transferência de calor para um assado, $\dot{Q}$ (energia por unidade de tempo), depende do calor específico do ar, c_p, da diferença de temperatura, Θ, de uma escala de comprimento, L, da massa específica do ar, ρ, da viscosidade do ar, μ, e da velocidade do ar, V. Quantas dimensões básicas estão incluídas nessas variáveis? Determine o número de parâmetros Π necessários para caracterizar o forno. Avalie os parâmetros Π.

7.27 Quando uma válvula é subitamente fechada num tubo em que escoa água, ocorre o estabelecimento de uma onda de pressão de martelo hidráulico (golpe de aríete). As pressões muito elevadas geradas por essas ondas podem avariar o tubo. A pressão máxima, $p_{máx}$, gerada pelo martelo é uma função da massa específica do líquido, ρ, da velocidade inicial do escoamento, U_0, e do módulo de compressibilidade do líquido, E_v. Quantos grupos adimensionais são necessários para caracterizar o martelo hidráulico? Determine a relação funcional entre as variáveis em termos dos grupos Π necessários.

7.28 Uma embarcação deve ser acionada por um cilindro circular rotativo. Testes de modelo são planejados para estimar a potência requerida para girar o cilindro protótipo. Uma análise dimensional é necessária para transportar por escala os requisitos de potência obtidos no teste de modelo para o protótipo. Liste os parâmetros que deveriam ser incluídos na análise dimensional. Faça uma análise dimensional para identificar os grupos adimensionais importantes.

7.29 Para igualar o número de Reynolds em escoamentos de ar e de água utilizando modelos de mesmo tamanho, qual escoamento irá requerer maior velocidade? Quanto maior ele deve ser?

7.30 Uma aeronave deve operar a 20 m/s no ar em condições padrões. Um modelo é construído na escala 1/20 e testado num túnel de vento com o ar à mesma temperatura a fim de determinar o arrasto. Que critério deve ser considerado para se obter semelhança dinâmica? Se o modelo for testado a 75 m/s, que pressão deve ser usada no túnel de vento? Se a força de arrasto sobre o modelo for 250 N, qual será a força de arrasto sobre o protótipo?

7.31 Medições da força de arrasto são feitas num modelo de automóvel num tanque de provas cheio com água doce. A escala do comprimento do modelo é 1/5 em relação ao protótipo. Enuncie as condições necessárias para garantir semelhança dinâmica entre o modelo e o protótipo. Determine a fração da velocidade do protótipo no ar na qual se deve fazer o teste do modelo na água a fim de assegurar condições de semelhança dinâmica. Medições feitas em várias velocidades mostram que a razão adimensional de forças torna-se constante para velocidades de teste do modelo acima de $V_m = 4$ m/s. A força de arrasto medida durante um teste a essa velocidade é $F_{D_m} = 182$ N. Calcule a força de arrasto esperada sobre o protótipo operando a 90 km/h no ar.

7.32 Um modelo de torpedo em escala 1/5 é testado num túnel de vento para determinar a força de arrasto. O protótipo opera na água, tem 533 mm de diâmetro e 6,7 m de comprimento. A velocidade de operação desejada do protótipo é 28 m/s. Para evitar efeitos de compressibilidade no túnel de vento, a velocidade máxima é limitada a 110 m/s. Entretanto, a pressão no túnel de vento pode variar enquanto se mantém a temperatura constante em 20°C. A que pressão mínima deverá o túnel de vento operar para se obter um teste dinamicamente semelhante? Em condições de teste dinamicamente semelhantes, a força de arrasto sobre o modelo é de 618 N. Avalie a força de arrasto esperada sobre o modelo em escala real.

7.33 O arrasto de um aerofólio com ângulo de ataque igual a zero é uma função da massa específica, viscosidade, velocidade e um parâmetro de comprimento. Um modelo em escala 1/10 de um aerofólio foi testado num túnel de vento a um número de Reynolds de $5{,}5 \times 10^6$, baseado no comprimento da corda. As condições de teste na corrente de ar no túnel eram de 15°C e de 10 atm de pressão absoluta. O aerofólio protótipo tem um comprimento de corda igual a 2 m e voará no ar na condição padrão. Determine a velocidade na qual o modelo foi testado no túnel de vento e a correspondente velocidade do protótipo.

7.34 Uma asa de avião com comprimento de corda igual a 5 pés e 30 pés de envergadura é projetada para mover-se no ar padrão a uma velocidade de 230 pés/s. Um modelo em escala 1/10 dessa asa deve ser testado num túnel de água. Que velocidade é necessária no túnel de água para obter-se semelhança dinâmica? Qual será a razão entre as forças medidas no escoamento sobre o modelo em relação àquelas medidas sobre a asa protótipo?

7.35 Considere uma esfera de superfície lisa, de diâmetro D, imersa em um fluido que se desloca com velocidade V. A força de arrasto sobre um balão meteorológico com 3 m de diâmetro, movendo-se no ar a 1,5 m/s, deve ser calculada partindo-se de dados de teste. O teste deve ser realizado na água, usando-se um modelo com 50 mm de diâmetro. Sob condições de semelhança dinâmica, a força de arrasto sobre o modelo é de 3,78 N. Avalie a velocidade de teste do modelo e a força de arrasto esperada sobre o balão real.

7.36 As características fluidodinâmicas de uma bola de golfe devem ser testadas usando-se um modelo num túnel de vento. Os parâmetros dependentes são a força de arrasto, F_D, e a força de sustentação, F_L, sobre a bola. Os parâmetros independentes deverão incluir a velocidade angular, ω, e a profundidade das cavidades da bola, d. Determine parâmetros adimensionais adequados e expresse a dependência funcional entre eles. Um profissional de golfe pode golpear uma bola a $V = 240$ pés/s e $\omega = 9000$ rpm. Para modelar essas condições num túnel de vento com velocidade máxima de 80 pés/s, que diâmetro de modelo deve ser utilizado? Qual a velocidade de rotação do modelo? (O diâmetro de uma bola de golfe oficial americana é 1,68 pol.)

7.37 É feito um teste com modelo a fim de determinar as características de vôo de um *Frisbee*. Os parâmetros dependentes são a força de arrasto, F_D, e a força de sustentação, F_L. Os parâmetros independentes deverão incluir a velocidade angular, ω, e a altura das rugosidades, h. Determine parâmetros adimensionais adequados e expresse a dependência funcional entre eles. O teste (usando o ar) num modelo em escala de 1/4 de um *Frisbee* deve ser geométrica, cinemática e dinamicamente semelhante ao protótipo. Os valores para o protótipo são $V_p = 20$ pés/s e $\omega_p = 100$ rpm. Quais valores de V_m e ω_m deverão ser utilizados?

7.38 Um modelo de aerofólio deve ser testado numa escala de 1:20. A velocidade de teste é escolhida para reproduzir o número de Froude correspondente à velocidade do protótipo de 60 nós. Para modelar a cavitação corretamente, o número de cavitação também deve ser reproduzido. A que pressão ambiente deve ser realizado o teste? A água no tanque de provas do modelo pode ser aquecida a 130°F, comparada com 45°F para o protótipo.

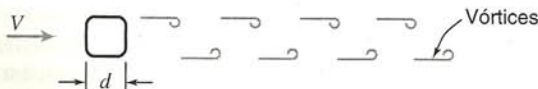
7.39 Óleo SAE 10W a 80°F escoa num tubo horizontal de diâmetro 1 pol. a uma velocidade média de 3 pés/s, produzindo uma queda de pressão de 65,3 psig num comprimento de 500 pés. Água a 60°F escoa através do mesmo tubo sob condições de semelhança dinâmica. Usando os resultados do Problema-Exemplo 7.2, calcule a velocidade média do escoamento de água e a correspondente queda de pressão.

7.40 Considere o escoamento de água em torno de um cilindro circular, de diâmetro D e comprimento l. Além da geometria, sabe-se que a força de arrasto depende da velocidade do líquido, V, da massa específica, ρ, e da viscosidade, μ. Expresse a força de arrasto, F_D, em forma adimensional como uma função de todas as variáveis relevantes. A distribuição de pressão estática sobre um cilindro circular, medida no laboratório, pode ser expressa em termos do coeficiente adimensional de pressão; o mais baixo coeficiente de pressão é $C_p = -2{,}4$ no ponto de mínima pressão estática sobre a superfície do cilindro. Estime a velocidade máxima com a qual um cilindro pode ser rebocado na água à pressão atmosférica, sem causar cavitação, se a ocorrência de cavitação começa a um número de cavitação de 0,5.

7.41 Um modelo em escala 1/8 de um conjunto cavalo-reboque é testado num túnel de vento pressurizado. A largura, altura e comprimento do modelo são $W = 0{,}305$ m, $H = 0{,}476$ m e $L = 2{,}48$ m, respectivamente. À velocidade do vento $V = 75{,}0$ m/s, a força de arrasto sobre o modelo é $F_D = 128$ N. (A massa específica no túnel de vento é $\rho = 3{,}23$ kg/m^3.) Calcule o coeficiente de arrasto aerodinâmico para o modelo. Compare os números de Reynolds para o teste de modelo e para o veículo protótipo a 55 mph. Calcule a força de arrasto aerodinâmico sobre o protótipo a uma velocidade de estrada de 55 mph, com vento contrário de 10 mph.

7.42 Um automóvel deve trafegar no ar padrão a 100 km/h. Para determinar a distribuição de pressão, um modelo em escala 1/5 deve ser testado na água. Que fatores devem ser considerados a fim de assegurar semelhança cinemática nos testes? Determine a velocidade da água que deve ser empregada. Qual a razão correspondente entre forças de arrasto para os escoamentos sobre o protótipo e sobre o modelo? O mais baixo coeficiente de pressão é $C_p = -1{,}4$ no ponto de pressão estática mínima sobre a superfície. Estime a pressão mínima no túnel necessária para evitar cavitação, se esse fenômeno se desencadeia a um número de cavitação de 0,5.

7.43 Em algumas faixas de velocidade, esteiras de vórtices originam-se na traseira de cilindros falsos atravessados num escoamento. Os vórtices, alternadamente, partem da parte de cima e de baixo do cilindro, como mostrado, causando uma força alternada normal à velocidade de corrente livre. Imagina-se que a freqüência de formação de vórtices, f, depende de ρ, d e μ. Use análise dimensional para desenvolver uma relação funcional para f. Esteira de vórtices ocorre no ar padrão sobre dois cilindros com uma razão de diâmetro igual a 2. Determine a razão entre velocidades para haver semelhança dinâmica e a razão entre as freqüências de formação de vórtices.

V
Vórtices
d

P7.43

7.44 Um teste com modelo de um conjunto cavalo-reboque é realizado num túnel de vento. A força de arrasto, F_D, depende da área frontal, A, da velocidade do vento, V, da massa específica do ar, ρ, e da viscosidade do ar, μ. A escala do modelo é 1:4; a área frontal do modelo é $A = 0{,}625$ m^2. Obtenha um conjunto de parâmetros adimensionais adequados para caracterizar os resultados do teste com o modelo. Enuncie as condições necessárias para se obter semelhança dinâmica entre os escoamentos para modelo e protótipo. Quando testado à velocidade do vento $V = 89{,}6$ m/s, no ar padrão, a força de arrasto medida sobre o modelo foi $F_D = 2{,}46$ kN. Estime a força de arrasto aerodinâmico sobre o veículo em tamanho real a $V = 22{,}4$ m/s. Calcule a potência necessária para vencer essa força de arrasto se não houver vento.

7.45 Um modelo em escala 1:50 de um submarino é testado num túnel de água. A força de arrasto, F_D, depende da velocidade da água, V, da massa específica, ρ, da viscosidade, μ, e do volume do modelo, $\forall$. Determine um conjunto de parâmetros adimensionais adequados para organizar os dados de teste resultantes. Estime o arrasto do submarino em tamanho real a 27 nós se um teste de modelo a 10 nós forneceu uma força de arrasto medida de 13 N.

7.46 O seu professor favorito gosta de alpinismo, então há sempre a possibilidade de que ele caia numa fenda de alguma geleira. Se isso acontecesse hoje e o professor ficasse aprisionado numa geleira com movimento lento, você ficaria curioso em saber se ele reapareceria no ponto de deságüe da geleira, à jusante, algum dia durante o ano letivo. Admitindo que o gelo é um fluido Newtoniano com a massa específica da glicerina, porém um milhão de vezes mais viscoso, você decide construir um modelo e utilizar análise dimensional e semelhança para estimar quando o professor reapareceria. Admita que a geleira real tem 15 m de profundidade e encontra-se numa encosta que decai 1,5 m numa distância horizontal de 1850 m. Desenvolva os parâmetros adimensionais e as condições esperadas que governam a semelhança dinâmica nesse problema. Se o modelo de professor reaparecer no laboratório após 9,6 horas, quando você deveria retornar ao fim da geleira real para oferecer auxílio ao seu professor favorito?

7.47 Um modelo em escala 1:30 de um submarino deve ser testado em um tanque de provas sob duas condições: movimento na superfície livre e movimento abaixo da superfície livre. Os testes são realizados em água fresca. Na superfície, o submarino tem velocidade de 20 nós. A que velocidade deve ser rebocado o modelo para garantir similaridade dinâmica? Abaixo da superfície a velocidade do submarino é 0,5 nós. A que velocidade o modelo deve ser rebocado para garantir similaridade dinâmica? Por qual valor deve ser multiplicado o arrasto do modelo para a obtenção do arrasto do submarino em tamanho real?

7.48 Um modelo em escala 1/10 de um conjunto cavalo-reboque é testado num túnel de vento. A área frontal do modelo é $A_m = 1{,}08$ pé^2. Quando testado a $V_m = 250$ pés/s, no ar padrão, a força de arrasto medida é $F_D = 76{,}3$ lbf. Avalie o coeficiente de arrasto para o modelo nas condições dadas. Admitindo que o coeficiente de arrasto é o mesmo para modelo e protótipo, calcule a força de arrasto sobre um conjunto em tamanho real a uma velocidade de estrada de 55 mph. Determine a velocidade do ar na qual o modelo deve ser testado para assegurar resultados dinamicamente semelhantes se a velocidade do protótipo é de 55 mph. Essa velocidade no ar é prática? Por que, ou por que não?

7.49 É recomendado em [5] que a área frontal de um modelo seja inferior a 5 por cento da área da seção de teste de um túnel de vento e que $Re = Vw/\nu > 2 \times 10^6$, onde w é a largura do modelo. Além disso, a altura do modelo deve ser inferior a 30 por cento da altura da seção de teste e a largura máxima projetada do modelo para o ângulo de ataque máximo (20°) deve ser menor que 30 por cento da largura da seção de teste. A velocidade máxima do ar deve ser inferior a 300 pés/s a fim de evitar efeitos de compressibilidade. Um modelo de um conjunto cavalo-reboque deve ser testado num túnel de vento que tem uma seção de teste com 1,5 pés de altura e 2 pés de largura. A altura, largura e comprimento do conjunto em tamanho real são de 13 pés e 6 pol., 8 pés e 65 pés, respectivamente. Avalie qual seria a escala do maior modelo que atende aos critérios recomendados. Avalie se o número de Reynolds adequado pode ser alcançado nessa instalação de teste.

7.50 Um vaso circular, parcialmente cheio com água, é girado em torno do seu eixo vertical à velocidade angular constante, ω. Num instante qualquer, τ, após o início da rotação, a velocidade, V_θ, à distância r em relação ao eixo de rotação, foi determinada como sendo uma função de τ, ω e das propriedades do líquido. Escreva os parâmetros adimensionais que caracterizam esse problema. Se,

em outro experimento, mel for girado no mesmo cilindro à mesma velocidade angular, determine, partindo dos seus parâmetros adimensionais, se o mel atingirá um movimento permanente tão depressa quanto a água. Explique por que o número de Reynolds não seria um parâmetro adimensional importante para transferir por escala o movimento estabilizado do líquido no vaso.

7.51 Admite-se que a potência, $\mathscr{P}$, necessária para acionar um ventilador, depende da massa específica do fluido, ρ, da vazão em volume, Q, do diâmetro do rotor, D, e da velocidade angular, ω. Se um ventilador com $D_1 = 8$ pol., fornece $Q_1 = 800$ pés cúbicos por minuto de ar a $\omega_1 = 2400$ rpm, que vazão em volume poderia ser esperada para um ventilador geometricamente semelhante com $D_2 = 16$ pol. a $\omega_2 = 1850$ rpm?

7.52 O aumento de pressão, Δp, de um líquido escoando em regime permanente através de uma bomba centrífuga depende do diâmetro da bomba, D, da velocidade angular do rotor, ω, da vazão em volume, Q, e da massa específica, ρ. A tabela fornece dados para um protótipo e para um modelo de bomba geometricamente semelhantes. Para condições correspondentes à semelhança dinâmica entre modelo e protótipo, calcule os valores que faltam na tabela.

Variável	Protótipo	Modelo
Δp		29,3 kPa
Q	1,25 m³/min	
ρ	800 kg/m³	999 kg/m³
ω	183 rad/s	367 rad/s
D	150 mm	50 mm

7.53 Uma bomba de fluxo axial é necessária para fornecer 25 pés³/s de água a uma altura de carga de 150 pés · lbf/slug. O diâmetro do rotor é de 1 pé e será acionado a 500 rpm. O protótipo deve ser modelado num pequeno dispositivo de teste que fornece potência de 3 hp e rotação de 1000 rpm. Para desempenhos semelhantes entre o protótipo e o modelo, calcule a altura de carga, a vazão volumétrica e o diâmetro do modelo.

7.54 Considere novamente o Problema 7.22. A experiência mostra que, para hélices de navios, os efeitos viscosos transportados por escala são pequenos. Também, quando a cavitação não está presente, o parâmetro adimensional contendo a pressão pode ser ignorado. Admita que o torque, T, e a potência, $\mathscr{P}$, dependem dos mesmos parâmetros que o impulso. Para condições em que os efeitos de μ e p podem ser desprezados, deduza "leis" de escala para hélices, similares às "leis" das bombas da Seção 7.5.2, que relacionem impulso, torque e potência com a velocidade angular e o diâmetro da hélice.

7.55 Um modelo de hélice com 2 pés de diâmetro é testado num túnel de vento. O ar aproxima-se da hélice a 150 pés/s quando ela gira a 2000 rpm. O impulso e o torque medidos sob estas condições são de 25 lbf e de 7,5 pés · lbf, respectivamente. Um protótipo 10 vezes maior que o modelo deve ser construído. Num ponto de operação dinamicamente semelhante, a velocidade de aproximação do ar deve ser de 400 pés/s. Calcule a velocidade, impulso e torque da hélice protótipo sob essas condições desprezando o efeito da viscosidade, mas incluindo a massa específica.

7.56 Os seguintes dados para um teste com modelo de uma hélice de navio são dados no Problema 4-6 de [19]:

Parâmetros	Modelo	Protótipo
Diâmetro	18 pol.	24 pés
Velocidade angular	960 *rpm*	240 *rpm*
Velocidade de avanço	20 pés/s	
Impulso	35,1 lbf	
Torque	120 pol. · lbf	
Fluido	Água doce	Água do mar
Temperatura	65°F	59°F

Para condições de teste dinamicamente semelhantes, calcule a velocidade de avanço, impulso e torque da hélice protótipo. (Use os resultados do Problema 7.54.) Avalie a potência de impulso produzida, a potência de entrada requerida e a eficiência da hélice protótipo. Despreze a cavitação e considerações de número de Reynolds.

7.57 Túneis de vento em circuito fechado podem produzir velocidades mais altas do que aqueles em circuito aberto com a mesma potência de entrada, porque há recuperação de energia no difusor à jusante da seção de teste. A *razão de energia cinética* é uma figura de mérito definida como a razão entre o fluxo de energia cinética na seção de teste e a potência de acionamento. Estime a razão de energia cinética para o túnel de vento de 40 × 80 da NASA-Ames.

7.58 Em testes de modelos em túneis de vento, forças e momentos são medidos em relação a um sistema de eixos alinhados com a linha de centro do túnel. As forças atuantes sobre um veículo rodoviário são expressas com maior utilidade num sistema de eixos referenciado ao veículo (coordenadas de carroceria). Para sua utilização, dados de testes medidos com ângulos de obliqüidade devem ser convertidos para coordenadas de carroceria. Desenvolva equações para calcular o arrasto e a força lateral em relação às coordenadas de carroceria, partindo de dados medidos em coordenadas do túnel de vento. Admita que o ângulo de obliqüidade do modelo é ψ.

7.59 Um modelo em escala 1:16 de um ônibus é testado num túnel de vento no ar padrão. O modelo tem 152 mm de largura, 200 mm de altura e 762 mm de comprimento. A força de arrasto medida a uma velocidade do vento de 26,5 m/s é de 6,09 N. O gradiente de pressão longitudinal na seção de teste do túnel de vento é $-11{,}8$ N/m²/m. Estime a correção que deverá ser feita na força de arrasto medida para compensar o empuxo horizontal causado pelo gradiente de pressão na seção de teste. Calcule o coeficiente de arrasto para o modelo. Avalie a força de arrasto aerodinâmico sobre o protótipo a 100 km/h num dia calmo.

7.60 Um modelo em escala 1:16 de um caminhão longo com 20 m de comprimento é testado num túnel de vento onde o gradiente axial de pressão estática é de $-1{,}2$ mm de água por metro a uma velocidade de teste de 80 m/s. A área frontal do protótipo é de 10 m². Estime a correção para a flutuação horizontal nessa situação. Expresse a correção como uma fração do C_D medido, se $C_D = 0{,}85$.

7.61 A velocidade de propagação de ondas de superfície de pequena amplitude numa região de profundidade uniforme é dada por

$$c^2 = \left(\frac{\sigma}{\rho}\frac{2\pi}{\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi}\right)\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}$$

onde h é a profundidade de líquido não perturbado e λ é o comprimento de onda. Usando L como um comprimento característico e V_0 como uma velocidade característica, obtenha os grupos adimensionais que caracterizam a equação e determine as condições para semelhança.

7.62 A inclinação da superfície livre de uma onda estável num escoamento unidimensional numa camada rasa de líquido é descrita pela equação

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Use um comprimento de escala, L, e uma velocidade de escala, V_0, para tornar essa equação adimensional. Obtenha os grupos adimensionais que caracterizam o escoamento. Determine as condições para semelhança dinâmica.

7.63 O escoamento unidimensional não permanente numa fina camada de líquido é descrito pela equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}$$

Use um comprimento de escala, L, e uma velocidade de escala V_0 para tornar essa equação adimensional. Obtenha os grupos adimen-

sionais que caracterizam esse escoamento. Determine as condições para semelhança dinâmica.

7.64 Utilizando análise de ordem de grandeza, as equações da continuidade e de Navier-Stokes podem ser simplificadas para as equações de camada limite de Prandtl. Para escoamento permanente, incompressível e bidimensional, desprezando a gravidade, o resultado é

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Utilize L e V_0 como comprimento e velocidade característicos, respectivamente. Torne essas equações adimensionais e identifique os parâmetros de semelhança que resultam.

7.65 Em um hotel, observou-se a oscilação de uma lâmpada suspensa na corrente de ar de um aparelho de ar condicionado. Explique por que isso pode ocorrer.

7.66 Freqüentemente observa-se uma bandeira em um mastro tremulando ao vento. Explique por que isso pode ocorrer.

7.67 Explore a variação na velocidade de propagação de ondas dada pela equação do Problema 7.61 para escoamento na superfície livre da água. Determine a profundidade de operação para minimizar a velocidade das ondas de capilaridade (ondas com pequenos comprimentos de onda, também chamadas de ondulações). Primeiramente suponha que o comprimento de onda é muito menor que a profundidade da água. Em seguida explore o efeito da profundidade. Que profundidade você recomenda para uma mesa d'água utilizada para visualizar o fenômeno de ondas em escoamento compressível? Qual é o efeito da redução da tensão superficial pela adição de um detergente?

Capítulo 8

ESCOAMENTO INTERNO VISCOSO, INCOMPRESSÍVEL

Os escoamentos completaménte limitados por superfícies sólidas são denominados internos. Assim, os escoamentos internos incluem escoamentos em tubos, dutos, bocais, difusores, contrações súbitas e expansões, válvulas e acessórios.

Os escoamentos internos podem ser laminares ou turbulentos. Alguns casos de escoamentos laminares podem ser resolvidos analiticamente. No caso de escoamento turbulento, as soluções analíticas não são possíveis e devemos respaldar-nos essencialmente em teorias semi-empíricas e em dados experimentais. A natureza dos escoamentos laminar e turbulento foi discutida na Seção 2.5.2. Para escoamentos internos, o regime de escoamento (laminar ou turbulento) é primariamente uma função do número de Reynolds.

A restrição de escoamento incompressível limita a consideração de escoamentos de gases para aqueles com transferência de calor desprezível e número de Mach $M < 0{,}3$; o valor de $M = 0{,}3$ no ar corresponde a uma velocidade de aproximadamente 100 m/s.

Após uma breve seção introdutória, consideramos dois casos de escoamento laminar completamente desenvolvido de um fluido Newtoniano (Parte A). Na Parte B apresentamos dados experimentais para proporcionar o entendimento da natureza básica dos escoamentos incompressíveis em tubos e dutos, e para permitir avaliações das mudanças de pressão resultantes dos escoamentos incompressíveis em tubos, dutos e sistemas de escoamento. O capítulo é concluído (Parte C) com uma discussão sobre medições de escoamentos.

8.1 INTRODUÇÃO

Como discutido anteriormente na Seção 2.5.4, o regime de escoamento num tubo (laminar ou turbulento) é determinado pelo número de Reynolds, $Re = \dfrac{\rho \bar{V} D}{\mu}$. Pode-se demonstrar, pela clássica experiência de Reynolds,[1] a diferença qualitativa entre escoamentos laminar e turbulento. Nessa experiência, a água escoa de um grande reservatório através de um tubo transparente. Um fino filamento de corante injetado na entrada do tubo permite a observação visual do escoamento. A baixas vazões (baixos números de Reynolds), o corante permanece num único filamento; há pouca dispersão de corante porque o escoamento é laminar. Um escoamento laminar é aquele no qual o fluido escoa em lâminas ou camadas; não há mistura macroscópica de camadas adjacentes de fluido.

À medida que a vazão através do tubo é aumentada, o filamento de corante torna-se instável e parte-se num movimento aleatório; a linha de corante é esticada e torcida numa infinidade de fios enovelados, e rapidamente se dispersa por todo o campo de escoamento. Esse comportamento do escoamento turbulento é devido a pequenas flutuações de velocidade, de alta freqüência, superpostas ao movimento principal, como previamente ilustrado na Fig. 2.14; a mistura de partículas de camadas adjacentes de fluido resulta na rápida dispersão do corante.

Com o cuidado necessário para manter o escoamento isento de perturbações e com superfícies lisas, experiências realizadas até hoje têm sido capazes de manter o escoamento laminar dentro de um tubo até números de Reynolds de cerca de 100.000! Contudo, a maioria das situações de escoamento na engenharia não é controlada com tanto cuidado. Sob condições normais, a transição ocorre em $Re \approx 2300$ para escoamentos em tubos. Para o escoamento d'água em um tubo com diâmetro interno de 25 mm, isso corresponde a uma velocidade média de aproximadamente 0,1 m/s. (Os números de Reynolds de transição para outras situações de escoamento são dadas nos Problemas-Exemplo.)

A Fig. 8.1 ilustra um escoamento laminar na região de entrada de um tubo circular. O escoamento tem a velocidade uniforme U_0 na entrada do tubo. Por causa da condição de não deslizamento, sabemos que a velocidade na parede do tubo deve ser zero em todo o comprimento do tubo. Uma camada limite (Seção 2.5.1) desenvolve-se ao longo das paredes do tubo. A superfície sólida exerce uma força de cisalhamento retardante sobre o escoamento; assim, a velocidade do fluido nas vizinhanças da superfície sólida é reduzida. Nas seções sucessivas ao longo do tubo, nessa região de entrada, o efeito da superfície sólida é sentido cada vez mais para dentro do escoamento.

Para escoamento incompressível, a conservação de massa exige que a velocidade na linha de centro do tubo aumente com a distância da entrada. Para satisfazer à conservação da massa para escoamento incompressível, a velocidade média em qualquer seção transversal

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_{\text{Área}} u \, dA$$

deve se igualar a U_0, logo

[1] Essa experiência é demonstrada no filme da NCFMF, *Turbulence*.

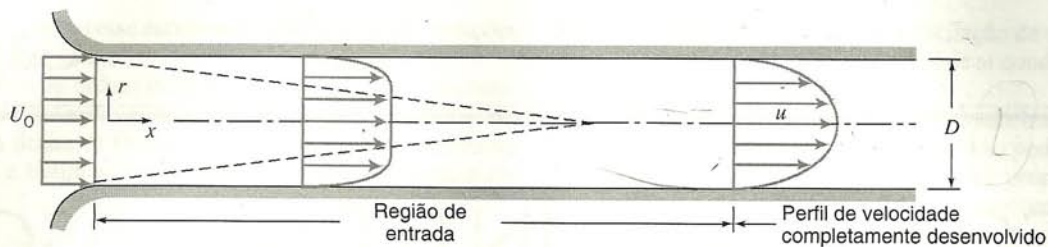



Fig. 8.1 Escoamento na região de entrada de um tubo.

$$\bar{V} = U_0 = \text{constante}$$

Suficientemente longe da entrada do tubo, a camada limite em desenvolvimento na parede do tubo atinge a sua linha de centro e o escoamento torna-se inteiramente viscoso. A forma do perfil de velocidade muda ligeiramente depois que o núcleo não viscoso desaparece. Quando a forma do perfil de velocidade não mais varia com o aumento da distância, x, o escoamento está *completamente desenvolvido*. A distância à jusante, em relação à entrada, até o ponto em que se inicia o escoamento completamente desenvolvido, é chamada *comprimento de entrada*. A forma real do perfil de velocidade completamente desenvolvido depende de o escoamento ser laminar ou turbulento. Na Fig. 8.1, o perfil é mostrado qualitativamente para um escoamento laminar. Embora o perfil de velocidades para alguns escoamentos laminares completamente desenvolvidos possa ser obtido pela simplificação das equações completas do movimento apresentadas no Cap. 5, escoamentos turbulentos não podem ser assim tratados.

Para escoamento laminar, o comprimento de entrada, L, é uma função do número de Reynolds,

$$\frac{L}{D} \simeq 0{,}06\,\frac{\rho \bar{V} D}{\mu} \tag{8.1}$$

Escoamento laminar num tubo pode ser esperado apenas para números de Reynolds inferiores a 2300. Assim, o comprimento de entrada para escoamento laminar em tubos pode ser tão grande quanto

$$L \simeq 0{,}06\,Re\,D \leq (0{,}06)(2300)\,D = 138D$$

ou aproximadamente 140 diâmetros do tubo. Se o escoamento for turbulento, a mistura intensa entre as camadas adjacentes de fluido[2] causa o crescimento mais rápido da camada limite. Experiências mostram que o perfil de velocidade média torna-se plenamente desenvolvido dentro de 25 a 40 diâmetros do tubo em relação à entrada. Contudo, os detalhes do movimento turbulento podem não estar completamente desenvolvidos para 80 ou mais diâmetros do tubo. Os escoamentos internos laminares completamente desenvolvidos serão abordados na Parte A deste capítulo. Escoamento turbulento em tubos e dutos é tratado na Parte B.

[2] Essa mistura é extremamente bem ilustrada na parte introdutória do filme da NCFMF, *Turbulence*.

PARTE A
ESCOAMENTO LAMINAR COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO

Nesta seção, consideramos alguns poucos exemplos clássicos de escoamentos laminares completamente desenvolvidos. Nosso objetivo é obter informações detalhadas a respeito do campo de velocidade e por isso usamos um volume de controle diferencial adequadamente escolhido.[3] O conhecimento do campo de velocidade permite os cálculos da tensão de cisalhamento, da queda de pressão e da vazão.

Em cada caso, começamos aplicando a familiar formulação da segunda lei de Newton.

8.2 ESCOAMENTO LAMINAR COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO ENTRE PLACAS PARALELAS INFINITAS

8.2.1 Ambas as Placas Estacionárias

Fluido em sistemas hidráulicos de alta pressão muitas vezes vaza através da folga anular entre um pistão e um cilindro. Para folgas muito pequenas (tipicamente 0,005 mm ou menos) esse campo de escoamento pode ser modelado como o que ocorre entre placas paralelas infinitas. Para calcular a taxa de vazamento, devemos primeiro determinar o campo de velocidade.

Consideremos o escoamento laminar completamente desenvolvido entre placas planas horizontais paralelas infinitas. As placas estão separadas pela distância a, conforme mostrado na Fig. 8.2. Elas são consideradas infinitas na direção z, sem variação de qualquer propriedade do fluido nessa direção. O escoamento também é considerado permanente e incompressível. Antes de começar nossa análise, o que sabemos a respeito do campo de escoamento? Já sabemos que a componente x da velocidade deve ser zero tanto na placa superior quanto na inferior, como resultado da condição de não deslizamento na parede. As condições de contorno são

$$\text{para } y = 0 \qquad u = 0$$
$$\text{para } y = a \qquad u = 0$$

Uma vez que o escoamento é completamente desenvolvido, a velocidade não pode variar com x; então, depende apenas de y, de modo que $u = u(y)$. Além disso, não há componente de velocidade nas direções y e z ($v = w = 0$).

Para nossa análise selecionamos um volume de controle diferencial de tamanho $d\forall = dxdydz$ e aplicamos a componente x da equação da quantidade de movimento.

[3] Isso fornece prática adicional na aplicação das equações básicas em um volume de controle diferencial. As equações diferenciais resultantes podem também ser obtidas (mais diretamente) pela simplificação das equações de Navier-Stokes deduzidas na Seção 5.4.3.

(a) Geometria de VC

(b) Forças atuando sobre o VC

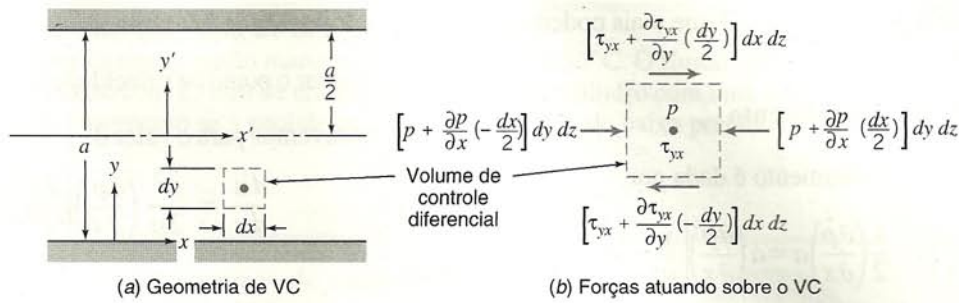



Fig. 8.2 Volume de controle para análise de escoamento laminar entre placas paralelas infinitas estacionárias.

Equação básica:

$$= 0(3) \quad = 0(1)$$

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{\mathrm{VC}} u\rho \, d\forall + \int_{\mathrm{SC}} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Considerações: (1) Escoamento permanente (dado)
(2) Escoamento completamente desenvolvido
(3) $F_{B_x} = 0$ (dado)

Para escoamento completamente desenvolvido, o fluxo líquido de quantidade de movimento através da superfície de controle é zero. (O fluxo de quantidade de movimento através da face direita da superfície de controle é igual em magnitude, porém de sentido contrário ao fluxo de quantidade de movimento através da face esquerda; não há qualquer fluxo de quantidade de movimento através de nenhuma das outras faces do volume de controle.) Uma vez que não há forças de massa atuando na direção x, a equação da quantidade de movimento reduz-se a

$$F_{S_x} = 0 \qquad (8.2)$$

O próximo passo é somar as forças atuando sobre o volume de controle na direção x. Reconhecemos que as forças normais (forças de pressão) atuam nas faces esquerda e direita e que as tangenciais (forças de cisalhamento) atuam nas faces superior e inferior.

Se a pressão no centro do elemento for p, então a força de pressão na face esquerda será

$$dF_L = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz$$

e a força de pressão na face direita será

$$dF_R = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz$$

Se a tensão de cisalhamento no centro do elemento for τ_{yx}, então a força de cisalhamento na face inferior será

$$dF_B = -\left(\tau_{yx} - \frac{d\tau_{yx}}{dy}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz$$

e a força cisalhante na face superior será

$$dF_T = \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz$$

Note que ao expandirmos a tensão de cisalhamento, τ_{yx}, numa série de Taylor em relação ao centro do elemento, utilizamos a derivada total no lugar de uma derivada parcial. Assim fizemos porque reconhecemos que τ_{yx} é uma função somente de y, visto que $u = u(y)$.

Tendo formulado as forças que atuam em cada face do volume de controle, substituímo-las na Eq. 8.2; essa equação simplifica-se em

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} = 0 \qquad (8.3)$$

A Eq. 8.3 deve ser válida para todo x e y. Desde que τ_{yx} é uma função somente de y (essa é a razão para usar a derivada total no lugar da derivada parcial de τ_{yx} na componente de força acima) e como p e $\frac{\partial p}{\partial x}$ são independentes de y, reconhecemos que a Eq. 8.3 vale para todos os valores de x e de y somente se cada termo na equação for constante. Então temos

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{constante}$$

Integrando essa equação, obtemos

$$\tau_{yx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + c_1$$

a qual indica que a tensão de cisalhamento varia linearmente com y. Uma vez que, para um fluido Newtoniano,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \qquad (2.10)$$

temos

$$\mu \frac{du}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + c_1$$

Integrando novamente

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 + \frac{c_1}{\mu} y + c_2 \qquad (8.4)$$

Para avaliar as constantes, c_1 e c_2, devemos aplicar as condições de contorno. Para $y = 0$, $u = 0$. Conseqüentemente, $c_2 = 0$. Para $y = a$, $u = 0$. Portanto,

$$0 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a^2 + \frac{c_1}{\mu} a$$

Isso dá

$$c_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a$$

portanto

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a y = \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)\right] \qquad (8.5)$$

Nesse ponto temos o perfil de velocidade. O que mais podemos conhecer do escoamento?

Distribuição da Tensão de Cisalhamento

A distribuição da tensão de cisalhamento é dada por

$$\tau_{yx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + c_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a = a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right] \quad (8.6a)$$

Vazão em Volume

A vazão em volume é dada por

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Para uma profundidade l na direção z,

$$Q = \int_0^a ul\, dy \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{l} = \int_0^a \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - ay)\, dy$$

Assim, a vazão em volume pela profundidade l é dada por

$$\frac{Q}{l} = -\frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a^3 \quad (8.6b)$$

Vazão em Volume como Função da Queda de Pressão

Como $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ é constante, a pressão varia linearmente com x e

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = \frac{-\Delta p}{L}$$

Substituindo na expressão para a vazão em volume, temos

$$\frac{Q}{l} = -\frac{1}{12\mu}\left[\frac{-\Delta p}{L}\right] a^3 = \frac{a^3 \Delta p}{12\mu L} \quad (8.6c)$$

Velocidade Média

A magnitude da velocidade média, $\bar{V}$, é dada por

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = -\frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{a^3 l}{la} = -\frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a^2 \quad (8.6d)$$

Ponto de Velocidade Máxima

Para determinar o ponto de velocidade máxima fazemos $\dfrac{du}{dy}$ igual a zero e resolvemos para o valor de y correspondente. Da Eq. 8.5

$$\frac{du}{dy} = \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a}\right]$$

Então

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{em} \quad y = \frac{a}{2}$$

Em

$$y = \frac{a}{2}, \qquad u = u_{máx} = -\frac{1}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a^2 = \frac{3}{2}\bar{V} \quad (8.6e)$$

Transformação de Coordenadas

Ao deduzirmos as relações acima, a origem de coordenadas, $y = 0$, foi tomada na placa inferior. Poderíamos do mesmo modo ter tomado a origem na linha de centro do espaço. Se denotarmos as coordenadas com origem na linha de centro do espaço como x, y', as condições de contorno são $u = 0$ em $y' = \pm \dfrac{a}{2}$.

Para obter o perfil de velocidade em termos de x, y', substituímos $y = y' + a/2$ na Eq. 8.5. O resultado é

$$u = \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{y'}{a}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] \quad (8.7)$$

Essa equação mostra que o perfil de velocidade que determinamos é parabólico, conforme mostrado na Fig. 8.3.

Como todas as tensões foram relacionadas com gradientes de velocidade através da lei da viscosidade de Newton, e as tensões adicionais que surgem como resultado de flutuações turbulentas não foram consideradas, todas as conclusões nessa seção são válidas apenas para escoamento laminar. Experiências mostram que o escoamento laminar torna-se turbulento para números de Reynolds (definidos como $Re = \dfrac{\rho \bar{V} a}{\mu}$) maiores que aproximadamente 1400. Por isso, o número de Reynolds deve ser verificado depois do emprego das Eqs. 8.6 a fim de assegurar uma solução válida.

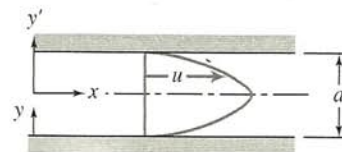
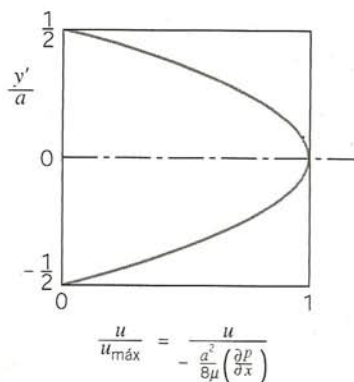



Fig. 8.3 Perfil de velocidade adimensional para escoamento laminar completamente desenvolvido entre placas paralelas infinitas.

EXEMPLO 8.1 — Vazamento em Volta de um Pistão

Um sistema hidráulico opera a uma pressão manométrica de 20 MPa e 55°C. O fluido hidráulico é óleo SAE 10W. Uma válvula de controle consiste em um pistão com 25 mm de diâmetro montado num cilindro com uma folga radial média de 0,005 mm. Determine a vazão em volume do vazamento se a pressão manométrica do lado de baixa pressão do pistão for 1,0 MPa. (O pistão tem 15 mm de comprimento.)

PROBLEMA-EXEMPLO 8.1

DADOS: Escoamento de óleo hidráulico entre pistão e cilindro, conforme mostrado. O fluido é óleo SAE 10W a 55°C.

DETERMINAR: A vazão em volume do vazamento, Q.

SOLUÇÃO:

A largura da folga é muito pequena, de modo que o escoamento pode ser modelado como escoamento entre placas paralelas. A Eq. 8.6c pode ser aplicada.

Equação para cálculo: $$\frac{Q}{l} = \frac{a^3 \Delta p}{12\mu L} \qquad \textbf{(8.6c)}$$

Considerações: (1) Escoamento laminar
(2) Escoamento permanente
(3) Escoamento incompressível
(4) Escoamento completamente desenvolvido
(Note que $L/a = 15/0{,}005 = 3000$!)

A largura da placa, l, é aproximadamente $l = \pi D$. Então

$$Q = \frac{\pi D a^3 \Delta p}{12\mu L}$$

Para óleo SAE 10W a 55°C, $\mu = 0{,}018$ kg/(m·s), da Fig. A.2, Apêndice A. Portanto

$$Q = \frac{\pi}{12} \times 25\ \text{mm} \times (0{,}005)^3\ \text{mm}^3 \times (20-1)10^6\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}\cdot\text{s}}{0{,}018\ \text{kg}} \times \frac{1}{15\ \text{mm}} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}$$

$$Q = 57{,}6\ \text{mm}^3/\text{s}$$ Q

Para assegurar que o escoamento é laminar devemos também verificar o número de Reynolds.

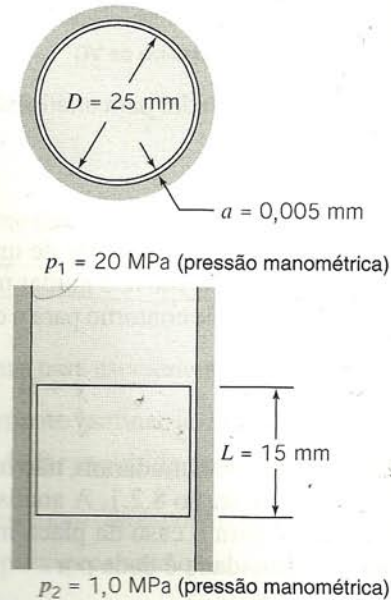
$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D a} = 57{,}6\ \frac{\text{mm}^3}{\text{s}} \times \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{25\ \text{mm}} \times \frac{1}{0{,}005\ \text{mm}} \times \frac{\text{m}}{10^3\ \text{mm}} = 0{,}147\ \text{m/s}$$

e

$$Re = \frac{\rho \bar{V} a}{\mu} = \frac{SG \rho_{H_2O} \bar{V} a}{\mu}$$

Para óleo SAE 10W, SG = 0,92, da Tabela A.2, Apêndice A. Então

$$Re = 0{,}92 \times 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0{,}147\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}005\ \text{mm} \times \frac{\text{m}\cdot\text{s}}{0{,}018\ \text{kg}} \times \frac{\text{m}}{10^3\ \text{mm}} = 0{,}0375$$

Assim, o escoamento é com certeza laminar, uma vez que $Re \ll 1400$.

8.2.2 Placa Superior Movendo-se com Velocidade Constante, U

Um segundo caso de escoamento laminar de importância prática é o escoamento num mancal de deslizamento. Em um mancal, um cilindro interior, o deslizante, gira dentro de um membro estacionário, o mancal propriamente dito. Para cargas leves, os centros dos dois membros essencialmente coincidem e a pequena folga é simétrica. Como a folga é pequena, é razoável "desenrolar" o mancal e modelar o campo de escoamento como se fosse entre placas paralelas infinitas.

Consideremos agora um caso em que a placa superior move-se para a direita com a velocidade constante, U, conforme mostra-

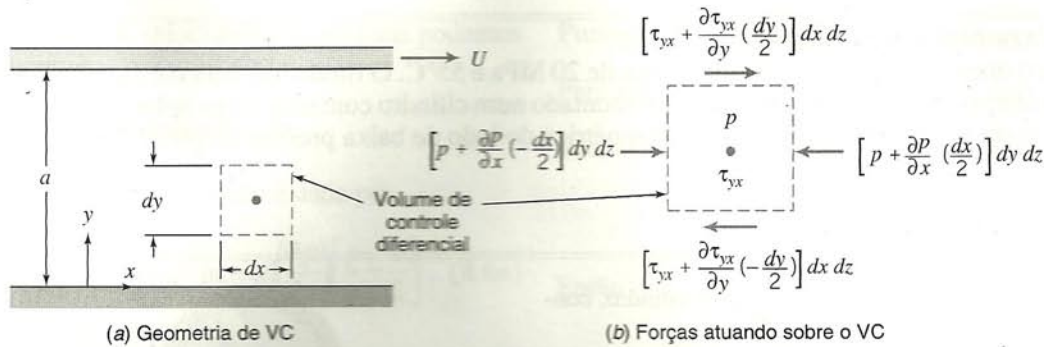



Fig. 8.4 Volume de controle diferencial para análise de escoamento laminar entre placas paralelas infinitas: placa superior movendo-se com velocidade constante, *U*.

do na Fig. 8.4. Tudo o que fazemos ao passar de uma placa superior estacionária para uma que se move é mudar uma das condições de contorno. As condições de contorno para o caso da placa móvel são

$$u = 0 \quad \text{para} \quad y = 0$$
$$u = U \quad \text{para} \quad y = a$$

Como só as condições de contorno mudaram, não há necessidade de repetir toda a análise da Seção 8.2.1. A análise que leva à Eq. 8.4 é igualmente válida para o caso da placa móvel. Dessa forma, a distribuição de velocidade é dada por

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2 + \frac{c_1}{\mu}y + c_2 \tag{8.4}$$

e a nossa única tarefa é avaliar as constantes c_1 e c_2 usando as condições de contorno apropriadas.

Para $y = 0$, $u = 0$. Conseqüentemente, $c_2 = 0$.

Para $y = a$, $u = U$. Daí,

$$U = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^2 + \frac{c_1}{\mu}a \quad \text{e então} \quad c_1 = \frac{U\mu}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a$$

Logo

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2 + \frac{Uy}{a} - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)ay =$$
$$= \frac{Uy}{a} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - ay)$$

$$u = \frac{Uy}{a} + \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)\right] \tag{8.8}$$

Nos dá segurança verificar que a Eq. 8.8 reduz-se à Eq. 8.5 para uma placa superior estacionária. Da Eq. 8.8, para gradiente de pressão nulo (para $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$) a velocidade varia linearmente com *y*. Esse foi o caso tratado anteriormente no Cap. 2.

Da distribuição de velocidade da Eq. 8.8, podemos obter informações adicionais a respeito do escoamento.

Distribuição da Tensão de Cisalhamento

A distribuição da tensão de cisalhamento é dada por $\tau_{yx} = \mu(du/dy)$,

$$\tau_{yx} = \mu\frac{U}{a} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a}\right] =$$

$$= \mu\frac{U}{a} + a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right] \tag{8.9a}$$

Vazão em Volume

A vazão em volume é dada por $Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$. Para a profundidade l na direção z

$$Q = \int_0^a ul\,dy \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{l} = \int_0^a \left[\frac{Uy}{a} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - ay)\right]dy$$

Então a vazão em volume por unidade de profundidade é dada por

$$\frac{Q}{l} = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^3 \tag{8.9b}$$

Velocidade Média

A magnitude da velocidade média, $\bar{V}$, é dada por

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = l\left[\frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^3\right] \Big/ la =$$
$$= \frac{U}{2} - \frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^2 \tag{8.9c}$$

Ponto de Velocidade Máxima

Para determinar o ponto de velocidade máxima fazemos $\frac{du}{dy}$ igual a zero e resolvemos para o valor de *y* correspondente. Da Eq. 8.8,

$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{a} + \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a}\right] = \frac{U}{a} + \frac{a}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[2\left(\frac{y}{a}\right) - 1\right]$$

Então

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{em} \quad y = \frac{a}{2} - \frac{U/a}{(1/\mu)(\partial p/\partial x)}$$

Não há relação simples entre a velocidade máxima, $u_{máx}$, e a velocidade média, $\bar{V}$, para esse caso de escoamento.

A Eq. 8.8 sugere que o perfil de velocidade pode ser tratado como uma combinação de perfis linear e parabólico; o último termo na Eq. 8.8 é idêntico àquele na Eq. 8.5. O resultado é uma

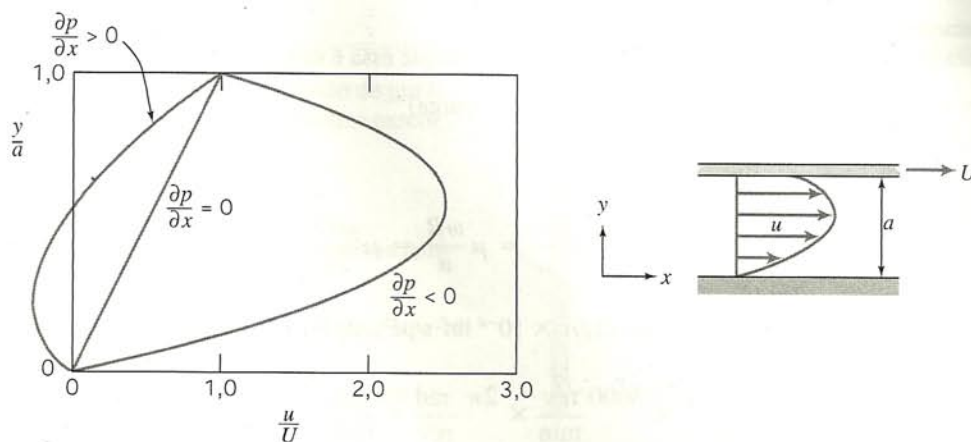



Fig. 8.5 Perfil de velocidade adimensional para escoamento laminar completamente desenvolvido entre placas paralelas infinitas: placa superior movendo-se com velocidade constante, U.

família de perfis de velocidade dependentes de U e de $\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$; três perfis foram esboçados na Fig. 8.5. (Conforme mostrado na Fig. 8.5, algum escoamento reverso — escoamento no sentido de x negativo — pode ocorrer quando $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$.)

Repetindo, todos os resultados desenvolvidos nessa seção são válidos apenas para escoamento laminar. Experiências mostram que o escoamento laminar torna-se turbulento (para $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$) a um número de Reynolds de aproximadamente 1500, onde $Re = \frac{\rho U a}{\mu}$, para esse caso de escoamento. Não há muitas informações disponíveis para o caso em que o gradiente de pressão é diferente de zero.

EXEMPLO 8.2 — Torque e Potência num Mancal de Deslizamento

Um mancal de deslizamento de um virabrequim num motor de automóvel é lubrificado por óleo SAE 30 a 210°F. O diâmetro do cilindro deslizante é 3 pol., a folga diametral é 0,0025 pol. e o eixo gira a 3600 rpm; o seu comprimento é 1,25 pol. O mancal não está carregado, de modo que a folga é simétrica. Determine o torque necessário para girar o mancal e a potência dissipada.

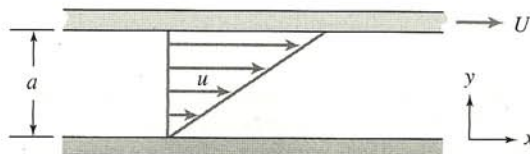
PROBLEMA-EXEMPLO 8.2

DADOS: Mancal de deslizamento, conforme mostrado. Note que a largura da folga, a, é *metade* da folga diametral. O lubrificante é óleo SAE 30 a 210°F. A velocidade é de 3600 rpm.

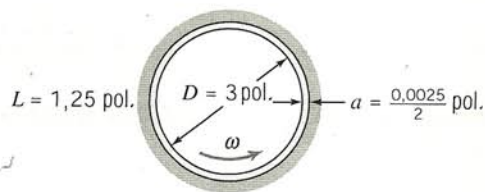
$L = 1{,}25$ pol. $D = 3$ pol. ω $a = \frac{0{,}0025}{2}$ pol.

DETERMINAR: (a) O torque, T.
(b) A potência dissipada.

SOLUÇÃO:

O torque sobre o cilindro deslizante decorre do cisalhamento viscoso na película de óleo. A largura da folga é pequena, de modo que o escoamento pode ser modelado como escoamento entre placas paralelas infinitas:

Equação para cálculo:

$$\tau_{yx} = \mu\frac{U}{a} + a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right] \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0(6)\right)$$

Considerações: (1) Escoamento laminar
(2) Escoamento permanente
(3) Escoamento incompressível

(4) Escoamento completamente desenvolvido
(5) Largura infinita (L/a = 1,25/0,00125 = 1000, de modo que essa é uma suposição razoável)
(6) $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ (escoamento simétrico no mancal real sem carga)

Logo

$$\tau_{yx} = \mu \frac{U}{a} = \mu \frac{\omega R}{a} = \mu \frac{\omega D}{2a}$$

Para óleo SAE 30 a 210°F (99°C), $\mu = 9{,}6 \times 10^{-3}$ N·s/m² ($2{,}01 \times 10^{-4}$ lbf·s/pé²), da Fig. A.2, Apêndice A. Então

$$\tau_{yx} = 2{,}01 \times 10^{-4} \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}}{\text{pé}^2} \times 3600 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times 3\,\text{pol.} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{0{,}00125\ \text{pol.}}$$

$$\tau_{yx} = 90{,}9\ \text{lbf/pé}^2$$

Como $\tau_{yx} > 0$, ela atua para a *esquerda* sobre a placa superior, que é uma superfície de y negativo. A força total de cisalhamento é dada pela tensão de cisalhamento multiplicada pela área. É aplicada sobre a superfície do cilindro deslizante. Por conseguinte,

$$T = FR = \tau_{yx}\pi DLR = \frac{\pi}{2}\tau_{yx}D^2L$$

$$= \frac{\pi}{2} \times 90{,}9 \frac{\text{lbf}}{\text{pé}^2} \times (3)^2\ \text{pol.}^2 \times \frac{\text{pé}^2}{144\ \text{pol.}^2} \times 1{,}25\ \text{pol.}$$

$$T = 11{,}2\ \text{pol.} \cdot \text{lbf} \qquad T$$

A potência dissipada no mancal é

$$\dot{W} = FU = FR\omega = T\omega$$

$$= 11{,}2\ \text{pol.} \cdot \text{lbf} \times 3600 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{pé}}{12\ \text{pol.}} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550\ \text{pé} \cdot \text{lbf}}$$

$$\dot{W} = 0{,}640\ \text{hp} \qquad \dot{W}$$

Para assegurar escoamento laminar, verifiquemos o número de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho U a}{\mu} = \frac{SG\rho_{H_2O}Ua}{\mu} = \frac{SG\rho_{H_2O}\omega Ra}{\mu}$$

Admita que a densidade relativa do óleo SAE 30 é igual à do óleo SAE 10W. Da Tabela A.2, Apêndice A, SG = 0,92. Então

$$Re = 0{,}92 \times 1{,}94 \frac{\text{slug}}{\text{pé}^3} \times \frac{(3600)2\pi}{60} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 1{,}5\ \text{pol.} \times 0{,}00125\ \text{pol.} \times \frac{\text{pé}^2}{2{,}01 \times 10^{-4}\ \text{lbf} \cdot \text{s}} \times \frac{\text{pé}^2}{144\ \text{pol.}^2} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}}$$

$$Re = 43{,}6$$

Portanto, o escoamento é laminar, pois $Re \ll 1500$.

A largura a da folga nesse problema é menor que 0,1% do raio do mancal R. Para a/R pequeno, o erro na tensão de cisalhamento é cerca da metade dessa razão (veja o Problema-Exemplo 5.10). Esse erro é desprezível comparado com a incerteza na viscosidade do óleo lubrificante. Portanto "desenrolar" o mancal em um escoamento entre placas paralelas infinitas é permitido porque a largura da folga é apenas uma pequena fração do raio do mancal.

EXEMPLO 8.3 — Película Laminar numa Parede Vertical

Um fluido Newtoniano viscoso incompressível escorre para baixo, numa parede vertical, em escoamento laminar em regime permanente. A espessura, δ, da película líquida é constante. Como a superfície livre do líquido é exposta à pressão atmosférica, não há gradiente de pressão. Para esse escoamento conduzido pela gravidade, aplique a equação da quantidade de movimento ao volume de controle diferencial, $dxdydz$, para deduzir a distribuição de velocidade na película líquida.

PROBLEMA-EXEMPLO 8.3

DADOS: Escoamento laminar completamente desenvolvido de um líquido Newtoniano incompressível escorrendo para baixo numa parede; a espessura, δ, da película líquida é constante e $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$.

DETERMINAR: A expressão para a distribuição de velocidade na película.

SOLUÇÃO:

A componente x da equação da quantidade de movimento para um volume de controle é

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} u\rho \, dV\!\!\!\!/ + \int_{\text{SC}} u\rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Sob as condições dadas foi suposto um escoamento laminar, permanente, incompressível e completamente desenvolvido.

Para escoamento permanente, $\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{\text{VC}} u\rho \, dV\!\!\!\!/ = 0$

Para escoamento completamente desenvolvido, $\displaystyle\int_{\text{SC}} u\rho\vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$

Então, a equação da quantidade de movimento para o caso presente reduz-se a

$$F_{S_x} + F_{B_x} = 0$$

A força de campo, F_{B_x}, é dada por $F_{B_x} = \rho g dV\!\!\!\!/ = \rho g dx dy dz$. As únicas forças de superfície atuando sobre o volume de controle diferencial são as forças cisalhantes sobre as superfícies verticais. (Uma vez que $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$, não há força líquida de pressão atuando sobre o volume de controle.)

Se a tensão de cisalhamento no centro do volume de controle diferencial for τ_{yx}, então

a tensão de cisalhamento na face esquerda é $\tau_{yx_E} = \left(\tau_{yx} - \dfrac{d\tau_{yx}}{dy}\dfrac{dy}{2}\right)$

e

a tensão de cisalhamento na face direita é $\tau_{yx_D} = \left(\tau_{yx} + \dfrac{d\tau_{yx}}{dy}\dfrac{dy}{2}\right)$

Os sentidos dos vetores tensão de cisalhamento foram tomados em consistência com a convenção de sinais da Seção 2.3. Assim, na face esquerda, uma superfície de y negativo, τ_{yx_E} atua para cima, e na face direita, uma superfície de y positivo, τ_{yx_D} atua para baixo.

As forças de superfície são obtidas multiplicando-se cada tensão de cisalhamento pela área sobre a qual ela atua. Substituindo em $F_{S_x} + F_{B_x} = 0$, obtemos

$$-\tau_{yx_E}\, dx\, dz + \tau_{yx_D}\, dx\, dz + \rho g\, dx\, dy\, dz = 0$$

ou

$$-\left(\tau_{yx} - \frac{d\tau_{yx}}{dy}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz + \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz + \rho g\, dx\, dy\, dz = 0$$

Simplificando, obtemos

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho g = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\tau_{yx}}{dy} = -\rho g$$

Como $\quad \tau_{yx} = \mu\dfrac{du}{dy}, \qquad$ então $\mu\dfrac{d^2u}{dy^2} = -\rho g \qquad$ e $\qquad \dfrac{d^2u}{dy^2} = -\dfrac{\rho g}{\mu}$

Integrando com relação a y, temos

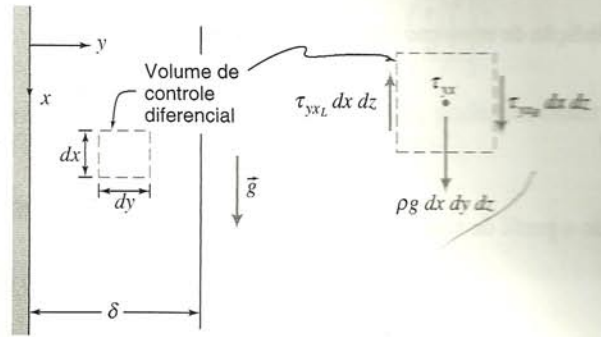
$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho g}{\mu} y + c_1$$

Integrando novamente, obtemos

$$u = -\frac{\rho g}{\mu}\frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2$$

Para avaliar as constantes c_1 e c_2 devemos aplicar as condições de contorno apropriadas:

(i) $y = 0, \quad u = 0$ (não deslizamento)

(ii) $y = \delta, \quad \dfrac{du}{dy} = 0$ (despreze a resistência do ar, i.e., admita tensão cisalhante nula na superfície livre)

Da condição de contorno (i), $c_2 = 0$

Da condição de contorno (ii), $0 = -\frac{\rho g}{\mu}\delta + c_1$ ou $c_1 = \frac{\rho g}{\mu}\delta$

Então $u = -\frac{\rho g}{\mu}\frac{y^2}{2} + \frac{\rho g}{\mu}\delta y$ ou $u = \frac{\rho g}{\mu}\delta^2\left[\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]$ $u(y)$

Usando o perfil de velocidade, pode ser mostrado que

a vazão em volume é $Q/l = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^3$

a velocidade máxima é $U_{máx} = \frac{\rho g}{2\mu}\delta^2$

a velocidade média é $\bar{V} = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^2$

O escoamento na película líquida é laminar para $Re = \bar{V}\,\delta/\nu \lesssim 1000$ [1].

O propósito desse problema é ilustrar a aplicação da quantidade de movimento a um volume de controle diferencial para um escoamento laminar completamente desenvolvido. Um problema semelhante foi resolvido no Problema-Exemplo 5.9, iniciando pelas equações de Navier-Stokes. Esse Problema-Exemplo mostra que a análise de volume de controle produz resultado equivalente.

8.3 ESCOAMENTO LAMINAR COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO EM UM TUBO

Como exemplo final de casos de escoamentos laminares completamente desenvolvidos, consideremos o escoamento laminar completamente desenvolvido no interior de um tubo. Aqui, o escoamento é axissimétrico. Conseqüentemente, é mais conveniente trabalhar com coordenadas cilíndricas. Usaremos de novo um volume de controle diferencial, porém, desta vez, considerando que o escoamento é simétrico em relação ao eixo, o volume de controle será um anel circular diferencial, conforme mostrado na Fig. 8.6. O comprimento do volume de controle é dx, e sua espessura é dr.

Para um regime permanente completamente desenvolvido, a componente x da equação da quantidade de movimento (Eq. 4.19a), quando aplicada ao volume de controle diferencial, reduz-se a

$$F_{S_x} = 0$$

O próximo passo é somar as forças que atuam sobre o volume de controle na direção x. Sabemos que as forças normais (forças de pressão) atuam nas extremidades esquerda e direita do volume de controle, e que forças tangenciais (forças cisalhantes) atuam nas superfícies cilíndricas interna e externa.

Se a pressão na face esquerda do volume de controle for p, então a força de pressão na extremidade esquerda será

$$dF_L = p2\pi r\,dr$$

A força de pressão na extremidade direita será

$$dF_R = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)2\pi r\,dr$$

Se a tensão de cisalhamento no centro do volume de controle anular for τ_{rx}, então a força cisalhante na superfície cilíndrica interna será

$$dF_I = -\tau_{rx}2\pi r\,dx$$

A força cisalhante na superfície cilíndrica externa será

$$dF_O = \left(\tau_{rx} + \frac{d\tau_{rx}}{dr}dr\right)2\pi\left(r + dr\right)dx$$

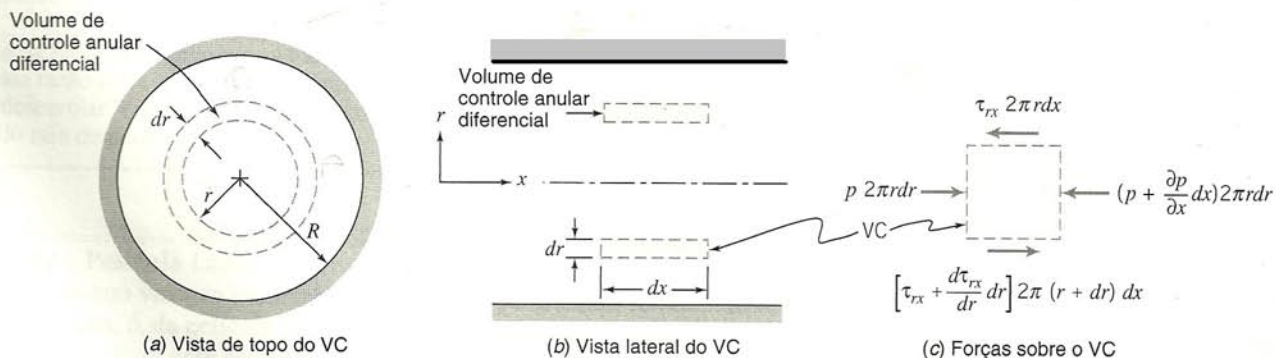



Fig. 8.6 Volume de controle diferencial para análise de escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo.

A soma das componentes x das forças que atuam sobre o volume de controle deve ser igual a zero. Isto leva à condição de que

$$-\frac{\partial p}{\partial x} 2\pi r\, dr\, dx + \tau_{rx}\, 2\pi dr\, dx + \frac{d\tau_{rx}}{dr} 2\pi r\, dr dx = 0$$

Dividindo essa equação por $2\pi r dr dx$ e resolvendo para $\frac{\partial p}{\partial x}$ resulta

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tau_{rx}}{r} + \frac{d\tau_{rx}}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d(r\tau_{rx})}{dr} \qquad (8.10)$$

Como τ_{rx} é uma função apenas de r (essa é a razão para utilizar a derivada total em lugar da derivada parcial de τ_{rx} nas componentes da força acima), reconhecemos que a Eq. 8.10 vale para todos os valores de r e de x apenas se cada um dos seus membros for constante. A Eq. 8.10 pode então ser escrita como

$$\frac{1}{r}\frac{d(r\tau_{rx})}{dr} = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{constante} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d(r\tau_{rx})}{dr} = r\frac{\partial p}{\partial x}$$

Integrando essa equação, obtemos

$$r\tau_{rx} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + c_1 \qquad \text{ou} \qquad \tau_{rx} = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{c_1}{r}$$

Como $\tau_{rx} = \mu \dfrac{du}{dr}$, temos

$$\mu\frac{du}{dr} = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{c_1}{r}$$

e

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{c_1}{\mu}\ln r + c_2 \qquad (8.11)$$

Precisamos avaliar as constantes c_1 e c_2. Entretanto, temos somente a condição de contorno que $u = 0$ para $r = R$. O que fazer? Em vez de desistir, olhemos a solução para o perfil de velocidade dado pela Eq. 8.11. Embora não conheçamos a velocidade na linha de centro do tubo, sabemos de considerações físicas que ela deve ser finita em $r = 0$. O único modo pelo qual isso pode ser verdadeiro é para c_1 igual a zero. Assim, de considerações físicas, concluímos que $c_1 = 0$, e assim

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + c_2$$

A constante, c_2, é avaliada usando-se a condição de contorno disponível na parede do tubo: em $r = R$, $u = 0$. Conseqüentemente,

$$0 = \frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + c_2$$

Isso dá

$$c_2 = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

e assim

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(r^2 - R^2)$$

ou

$$u = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (8.12)$$

Uma vez que temos o perfil de velocidade, podemos obter várias características adicionais do escoamento.

Distribuição de Tensão de Cisalhamento

A tensão de cisalhamento é dada por

$$\tau_{rx} = \mu\frac{du}{dr} = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \qquad (8.13a)$$

Vazão em Volume

A vazão volumétrica é

$$Q = \int_A \vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_0^R u 2\pi r\, dr = \int_0^R \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(r^2 - R^2) 2\pi r\, dr$$

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \qquad (8.13b)$$

Vazão em Volume como uma Função da Queda de Pressão

No escoamento completamente desenvolvido, o gradiente de pressão $\partial p/\partial x$ é constante. Portanto, $\partial p/\partial x = (p_2 - p_1)/L = -\Delta p/L$. Substituindo na Eq. 8.13b para a vazão em volume, obtemos

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left[\frac{-\Delta p}{L}\right] = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu L} = \frac{\pi \Delta p D^4}{128\mu L} \qquad (8.13c)$$

para escoamento laminar num tubo horizontal.

Velocidade Média

A magnitude da velocidade média, $\bar{V}$, é dada por

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \qquad (8.13d)$$

Ponto de Velocidade Máxima

Para determinar o ponto de velocidade máxima, fazemos du/dr igual a zero e resolvemos para o valor correspondente de r. Da Eq. 8.12

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) r$$

Então

$$\frac{du}{dr} = 0 \qquad \text{em} \qquad r = 0$$

Para $r = 0$,

$$u = u_{\text{máx}} = U = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 2\bar{V} \qquad (8.13e)$$

O perfil de velocidade (Eq. 8.12) pode ser escrito em termos da velocidade máxima (linha de centro) como

$$\frac{u}{U} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad (8.14)$$

O perfil de velocidade parabólico dado pela Eq. 8.14 para escoamento laminar completamente desenvolvido num tubo foi esboçado na Fig. 8.1.

EXEMPLO 8.4 — Viscosímetro Capilar

Um viscosímetro simples e preciso pode ser feito com um tubo capilar. Se a vazão em volume e a queda de pressão forem medidas, e a geometria do tubo for conhecida, a viscosidade de um fluido Newtoniano poderá ser calculada pela Eq. 8.13c. Um teste de certo líquido num viscosímetro capilar forneceu os seguintes dados:

Vazão em volume:	880 mm³/s	Comprimento do tubo:	1 m
Diâmetro do tubo:	0,50 mm	Queda de pressão:	1,0 MPa

Determine a viscosidade do líquido.

PROBLEMA-EXEMPLO 8.4

DADOS: Escoamento num viscosímetro capilar. A vazão em volume é $Q = 880\ \text{mm}^3/\text{s}$.

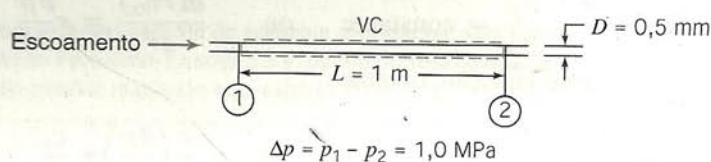
Escoamento → VC; $D = 0{,}5$ mm; $L = 1$ m; ① ②; $\Delta p = p_1 - p_2 = 1{,}0$ MPa

DETERMINAR: A viscosidade do fluido.

SOLUÇÃO:

A Eq. 8.13c pode ser aplicada.

Equação para cálculo:

$$Q = \frac{\pi \Delta p D^4}{128 \mu L} \qquad (8.13c)$$

Considerações:
(1) Escoamento laminar
(2) Escoamento permanente
(3) Escoamento incompressível
(4) Escoamento completamente desenvolvido
(5) Tubo horizontal

Então

$$\mu = \frac{\pi \Delta p D^4}{128 L Q} = \frac{\pi}{128} \times 1{,}0 \times 10^6\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times (0{,}50)^4\ \text{mm}^4 \times \frac{\text{s}}{880\ \text{mm}^3} \times \frac{1}{1\ \text{m}} \times \frac{\text{m}}{10^3\ \text{mm}}$$

$$\mu = 1{,}74 \times 10^{-3}\ \text{N} \cdot \text{s/m}^2 \qquad \mu$$

Verifiquemos o número de Reynolds. Admitamos que a massa específica do fluido é similar à da água, 999 kg/m³.

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4}{\pi} \times 880\ \frac{\text{mm}^3}{\text{s}} \times \frac{1}{(0{,}50)^2\ \text{mm}^2} \times \frac{\text{m}}{10^3\ \text{mm}} = 4{,}48\ \text{m/s}$$

Então

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 4{,}48\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}50\ \text{mm} \times \frac{\text{m}^2}{1{,}74 \times 10^{-3}\ \text{N} \cdot \text{s}} \times \frac{\text{m}}{10^3\ \text{mm}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$Re = 1290$$

Conseqüentemente, como $Re < 2300$, o escoamento é laminar.

Esse problema-exemplo está bastante simplificado. Para o projeto de um viscosímetro capilar para serviços de precisão e para reduzir dados corretamente, o comprimento de entrada, a temperatura do líquido e a energia cinética do líquido escoando deveriam ser considerados.

PARTE B
ESCOAMENTO EM TUBOS E DUTOS

Nosso principal propósito nesta seção é avaliar as variações de pressão que resultam do escoamento incompressível em tubos, dutos e sistemas de escoamento. As variações de pressão em um sistema de escoamento resultam de variações na elevação ou na velocidade do escoamento (devidas a variações de área) e do atrito. Num escoamento sem atrito, a equação de Bernoulli poderia ser utilizada para avaliar os efeitos das variações na elevação e na velocidade do escoamento, mas a equação de Bernoulli não pode ser usada para escoamentos com atrito. Dessa forma, no caso de escoamentos reais, a principal preocupação é levar em conta o atrito. O efeito do atrito é reduzir a pressão causando uma "perda" em comparação com o caso ideal, sem atrito. Para simplificar a análise, a "perda" de pressão será dividida em *perdas maiores ou distribuídas* (devidas ao atrito em trechos do sistema de área constante) e *perdas menores ou localizadas* (devidas ao atrito através de válvulas, tês, cotovelos e outros trechos do sistema de área transversal não constante).

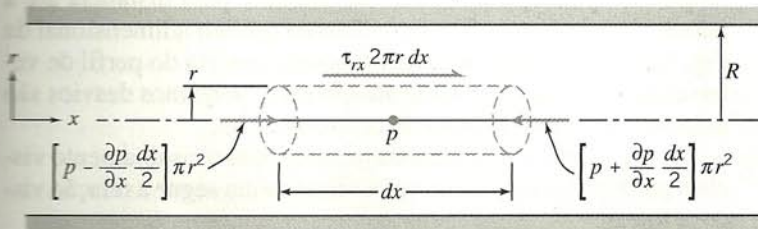
A fim de desenvolver relações para as perdas distribuídas devidas ao atrito em dutos de seção constante, lidaremos com escoamentos completamente desenvolvidos nos quais o perfil de velocidade não varia no sentido do escoamento. A nossa atenção concentrar-se-á nos escoamentos turbulentos, uma vez que a queda de pressão para o escoamento laminar completamente desenvolvido num tubo pode ser calculada a partir dos resultados da Seção 8.3. A queda de pressão que ocorre na entrada de um tubo será tratada como localizada.

Como os dutos de seção circular são os mais comuns nas aplicações de engenharia, a análise básica será feita para geometria circular. Os resultados podem ser estendidos a outras formas pela introdução do diâmetro hidráulico, que é abordado na Seção 8.7.3. (Escoamento compressível em dutos será abordado no Cap. 12.)

8.4 DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO DE CISALHAMENTO NO ESCOAMENTO COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO EM TUBOS

No escoamento permanente completamente desenvolvido em tubos horizontais, seja laminar ou turbulento, a queda de pressão é equilibrada apenas pelas forças cisalhantes nas paredes do tubo. Isso pode ser verificado pela aplicação da equação da quantidade de movimento a um volume de controle cilíndrico no escoamento, Fig. 8.7. A componente x da equação da quantidade de movimento é

Equação básica:

$$F_{S_x} + \underbrace{F_{B_x}}_{=0(1)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{VC}} u\rho\, d\forall}_{=0(2)} + \underbrace{\int_{\mathrm{SC}} u\rho \vec{V}\cdot d\vec{A}}_{=0(3,4)} \qquad (4.19a)$$

Considerações: (1) Tubo horizontal, $F_{B_x} = 0$ (dado)
(2) Escoamento permanente (dado)
(3) Escoamento incompressível
(4) Escoamento completamente desenvolvido

Então

$$F_{S_x} = 0$$

As forças de superfície que atuam sobre o volume de controle são mostradas na Fig. 8.7. A pressão no centro do elemento é p; a pressão em cada extremidade do elemento é obtida da expansão em série de Taylor de p em torno do centro do elemento. A força de cisalhamento age na superfície circunferencial do elemento. O sentido foi admitido de tal modo que a força de cisalhamento seja positiva. Então

$$F_{S_x} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\pi r^2 - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\pi r^2 + \tau_{rx} 2\pi r\, dx = 0$$

ou

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, \pi r^2 + \tau_{rx} 2\pi r\, dx = 0$$

Portanto,

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (8.15)$$

Verificamos assim que a tensão de cisalhamento no fluido varia linearmente na seção transversal do tubo, de zero na linha de centro, até um máximo na parede do tubo. Se denotarmos a tensão de cisalhamento na parede como τ_w, a Eq. 8.15 mostra que, na superfície do tubo,

$$\tau_w = -[\tau_{rx}]_{r=R} = -\frac{R}{2}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (8.16)$$

A Eq. 8.16 relaciona a tensão de cisalhamento na parede com o gradiente de pressão axial. Como $\partial p/\partial x < 0$, então τ_w é positivo. A equação da quantidade de movimento foi usada para deduzir a Eq. 8.16, mas nenhuma suposição foi feita a respeito de uma relação entre a tensão de cisalhamento e o campo de velocidade. Conseqüentemente, a Eq. 8.16 é aplicável ao escoamento completamente desenvolvido em tubos, tanto laminar quanto turbulento.

Se pudéssemos relacionar o campo de tensão de cisalhamento com o campo de velocidade média, poderíamos determinar analiticamente a queda de pressão num trecho do tubo para escoamento completamente desenvolvido. Tal relação entre o campo de tensões e o de velocidade média existe para o escoamento

Fig. 8.7 Volume de controle para análise da distribuição de tensão de cisalhamento em escoamento completamente desenvolvido em um tubo circular.

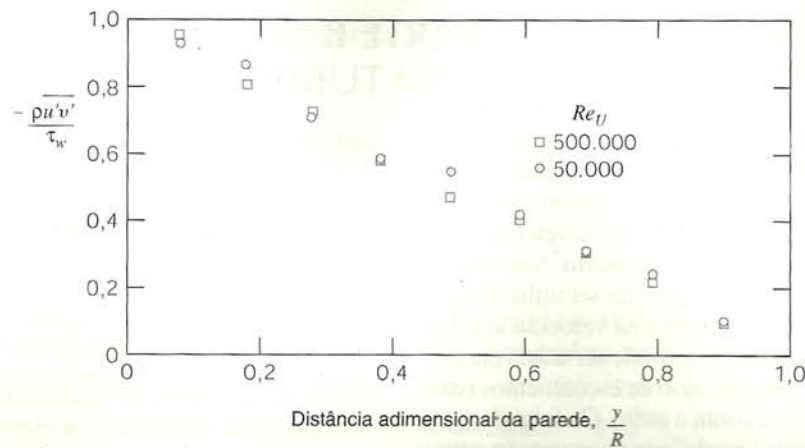



Fig. 8.8 Tensão de cisalhamento turbulenta (tensão de Reynolds) para escoamento turbulento completamente desenvolvido num tubo. (Dados de [5].)

laminar e foi usada na Seção 8.3. A equação resultante, Eq. 8.13c, foi descoberta primeiramente por Jean Louis Poiseuille, um médico francês, e de maneira independente por Gotthilf H. L. Hagen, um engenheiro alemão, na década de 1850 [2].

No escoamento turbulento não há relação simples entre o campo de tensões de cisalhamento e o campo de velocidade média. Flutuações de velocidade no escoamento turbulento (discutidas na Seção 2.5.2) resultam no transporte de quantidade de movimento entre camadas adjacentes de fluido [3]. Essa transferência de quantidade de movimento pode ser vista como uma força por unidade de área, uma tensão aparente, que deve ser adicionada à tensão causada pelos gradientes da velocidade média. Para escoamento turbulento completamente desenvolvido em canais abertos, a tensão de cisalhamento total é dada por

$$\tau = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'} \tag{8.17}$$

Na Eq. 8.17, y é a distância da parede do tubo e $\bar{u}$ é a velocidade média. Como definido no Cap. 2, u' e v' são componentes flutuantes da velocidade nas direções x e y, respectivamente, e $\overline{u'v'}$ é a média temporal do produto entre u' e v'. A noção de uma tensão aparente foi introduzida pela primeira vez por Osborne Reynolds; o termo $-\rho\overline{u'v'}$ é referido como a *tensão de Reynolds*.[4]

Na Fig. 8.8, medições experimentais da tensão de Reynolds para escoamentos completamente desenvolvidos em tubos são apresentadas para dois números de Reynolds; $Re_U = \frac{UD}{\upsilon}$, onde U é a velocidade na linha de centro. A tensão de cisalhamento turbulenta foi reduzida à forma adimensional pela tensão de cisalhamento na parede. Uma vez que a tensão de cisalhamento total varia linearmente na direção radial, os dados mostram que o cisalhamento turbulento é dominante sobre a região central do tubo. Embora não existam medições bem próximas da parede do tubo, o cisalhamento turbulento deve ser nulo na parede porque a condição de não deslizamento exige que a velocidade, ali, seja zero. Sendo a tensão de Reynolds nula na parede, então, da Eq. 8.17, a tensão de cisalhamento na parede é dada por $\tau_w = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}$. Na região muito próxima da parede do tubo, a *camada da parede*, o cisalhamento viscoso é dominante. Na região entre a camada da parede e a porção central do tubo tanto o cisalhamento viscoso quanto o turbulento são importantes.

[4] Os termos de tensão de Reynolds surgem da consideração das equações completas de movimento para escoamento turbulento [4].

8.5 PERFIS DE VELOCIDADE EM ESCOAMENTOS TURBULENTOS COMPLETAMENTE DESENVOLVIDOS EM TUBOS

Exceto para escoamentos de fluidos muito viscosos em tubos de diâmetro pequenos, escoamentos internos são em geral turbulentos. Como mencionado na discussão da distribuição de tensão de cisalhamento em escoamento completamente desenvolvido em tubo (Seção 8.4), no escoamento turbulento não existe relação universal entre o campo de tensões e o campo de velocidade média. Portanto, para escoamentos turbulentos, somos forçados a recorrer a dados experimentais.

Dividindo a Eq. 8.17 por ρ resulta

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{u'v'} \tag{8.18}$$

O termo τ/ρ surge freqüentemente quando se considera escoamentos turbulentos; ele tem dimensões de velocidade ao quadrado. A quantidade $(\tau_w/\rho)^{1/2}$ é chamada de *velocidade de atrito* e é denotada pelo símbolo u_*.

O perfil de velocidade para escoamento turbulento completamente desenvolvido no interior de um tubo liso é mostrado na Fig. 8.9. O gráfico é semilogarítmico; $\bar{u}/u*$ está plotado contra log (yu_*/υ). Os parâmetros adimensionais $\bar{u}/u*$ e yu_*/υ surgem da análise dimensional quando se considera razoável que a velocidade na vizinhança da parede é determinada pelas condições na parede, pelas propriedades do fluido e pela distância até a parede. É meramente fortuito o fato do gráfico adimensional da Fig. 8.9 dar uma representação bastante precisa do perfil de velocidades afastado da parede em um tubo; pequenos desvios são notados na região da linha de centro do tubo.

Na região muito próxima da parede, onde o cisalhamento viscoso predomina, o perfil de velocidade média segue a relação viscosa linear

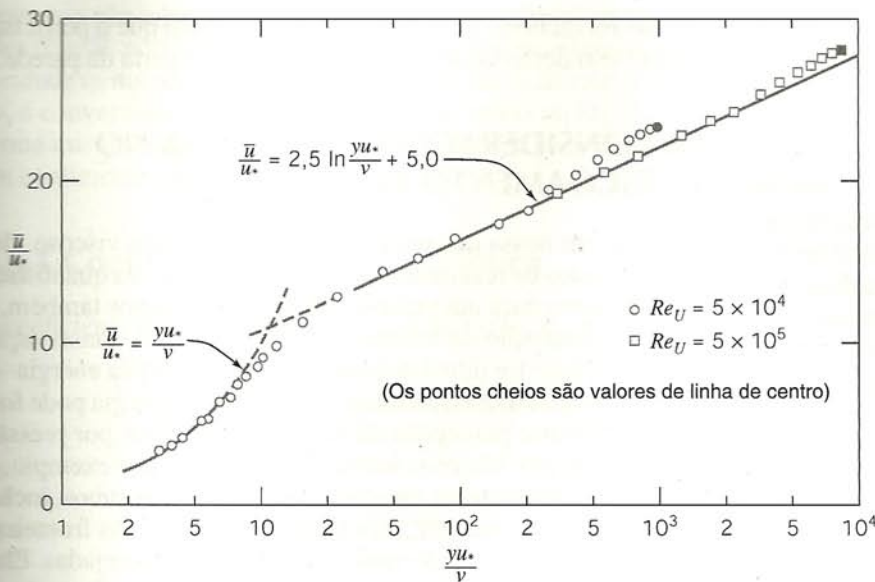



Fig. 8.9 Perfil de velocidade turbulenta para escoamento completamente desenvolvido em um tubo liso. (Dados de [5].)

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu} = y^+ \qquad (8.19)$$

onde y é a distância medida da parede ($y = R - r$; R é o raio do tubo) e $\bar{u}$ é a velocidade média. A Eq. 8.19 é válida para $0 \leq y^+ \leq 5\text{-}7$; esta região é chamada de *subcamada viscosa*.

Para valores de $\dfrac{yu*}{\upsilon} > 30$, os dados são bem representados pela equação semilogarítmica

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2{,}5 \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5{,}0 \qquad (8.20)$$

Nessa região, os cisalhamentos viscoso e turbulento são ambos importantes (embora seja esperado que o cisalhamento turbulento seja significativamente maior). Existe uma dispersão considerável nas constantes numéricas da Eq. 8.20; os valores dados representam médias sobre muitos experimentos [6]. A região entre $y^+ = 5\text{-}7$ e $y^+ = 30$ é chamada de *região de transição* ou *camada tampão*.

Se a Eq. 8.20 for avaliada na linha de centro ($y = R$ e $u = U$) e a expressão geral da Eq. 8.20 for subtraída da equação avaliada na linha de centro, obtém-se

$$\frac{U - \bar{u}}{u_*} = 2{,}5 \ln \frac{R}{y} \qquad (8.21)$$

onde U é a velocidade na linha de centro. A Eq. 8.21, chamada de lei da deficiência, mostra que a deficiência de velocidade (e portanto a forma geral do perfil de velocidades na vizinhança da linha de centro) é uma função da razão de distância somente e não depende da viscosidade do fluido.

O perfil de velocidade para escoamento turbulento através de um tubo liso pode ser representado pela *lei de potência* empírica

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \qquad (8.22)$$

onde o expoente, n, varia com o número de Reynolds. Na Fig. 8.10 os dados de Laufer [5] são mostrados num gráfico de ln y/R *versus*

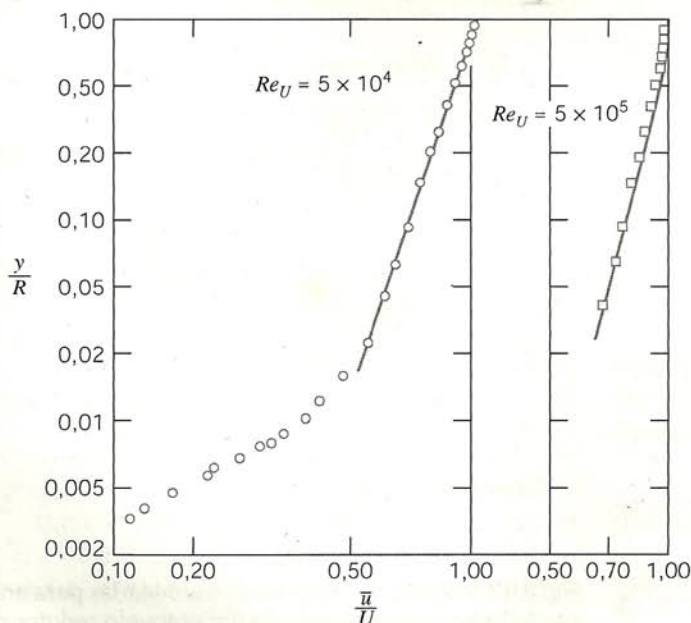



Fig. 8.10 Perfis de velocidade de lei de potência para escoamento turbulento completamente desenvolvido em um tubo liso. (Dados de [5].)

ln $\bar{u}/U$. Se o perfil da lei de potência fosse uma representação precisa dos dados, todos os pontos cairiam sobre a linha reta de inclinação n. Claramente, os dados para $Re_U = 5 \times 10^4$ desviam-se do melhor ajuste da linha reta na vizinhança da parede.

O perfil da lei de potência não é aplicável próximo da parede ($y/R < 0{,}04$). Como a velocidade é baixa nessa região, o erro no cálculo de quantidades integrais como massa, quantidade de movimento e fluxo de energia em uma seção é relativamente pequeno. O perfil da lei de potência dá um gradiente de velocidade infinito na parede e, portanto, não pode ser usado nos cálculos da tensão de cisalhamento na parede. Embora o perfil se ajuste aos dados próximos da linha de centro, ele falha por não dar inclinação nula naquele local. Apesar desses inconvenientes, o perfil da lei de potência fornece resultados adequados em muitos cálculos.

Dados de [7] sugerem que a variação do expoente n do perfil da lei de potência com o número de Reynolds (baseado no diâmetro do tubo, D, e na velocidade da linha de centro, U) para escoamentos completamente desenvolvidos em tubos lisos é dada por

$$n = -1{,}7 + 1{,}8 \log Re_U \tag{8.23}$$

para $Re_U > 2 \times 10^4$.

Como a velocidade média é $\bar{V} = Q/A$, e

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

a razão entre a velocidade média e a velocidade na linha de centro pode ser calculada para os perfis de lei de potência da Eq. 8.22 considerando que os perfis são válidos da parede até a linha de centro. O resultado é

$$\frac{\bar{V}}{U} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \tag{8.24}$$

Da Eq. 8.24, verificamos que enquanto n aumenta (devido ao número de Reynolds crescente) a razão entre a velocidade média e a velocidade da linha de centro aumenta; com o aumento do número de Reynolds, o perfil de velocidade torna-se mais rombudo, ou mais "cheio" (para $n = 6$, $\bar{V}/U = 0{,}79$; para $n = 10$, $\bar{V}/U = 0{,}87$). Como um valor representativo, 7 é freqüentemente usado para o expoente; isso dá origem ao termo "perfil de potência um sétimo" para escoamento turbulento completamente desenvolvido.

A Fig. 8.11 mostra perfis de velocidade para $n = 6$ e $n = 10$. O perfil parabólico para escoamento laminar completamente desenvolvido foi incluído para comparação. Está claro que o perfil turbulento tem declividade muito mais acentuada perto da parede.

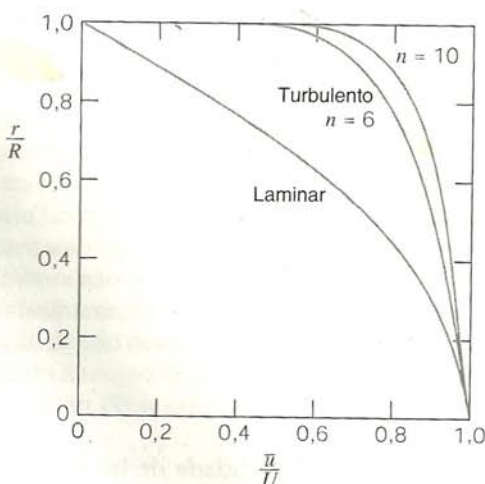



Fig. 8.11 Perfis de velocidade para escoamento completamente desenvolvido em um tubo.

8.6 CONSIDERAÇÕES DE ENERGIA NO ESCOAMENTO EM TUBOS

Até aqui, em nossa discussão sobre o escoamento viscoso, deduzimos todos os resultados aplicando a equação da quantidade de movimento para um volume de controle. Usamos também, é claro, a formulação de volume de controle para a conservação de massa. Nada foi dito a respeito da conservação da energia — a primeira lei da termodinâmica. A equação da energia pode fornecer uma maior percepção da natureza das perdas por pressão nos escoamentos viscosos internos. Considere, por exemplo, o escoamento permanente através de um sistema de tubos, incluindo um cotovelo redutor, mostrado na Fig. 8.12. As fronteiras do volume de controle são mostradas em linhas tracejadas. Elas são perpendiculares ao escoamento nas seções ① e ② e coincidem com a superfície interna do tubo nos outros locais.

Equação básica:

$$\dot{Q} - \underbrace{\dot{W}_s}_{=0(1)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}}_{=0(2)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{outro}}}_{=0(1)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho\, d\forall}_{=0(3)} + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.57}$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Considerações:
(1) $\dot{W}_s = 0$, $\dot{W}_{\text{outro}} = 0$
(2) $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = 0$ (embora tensões de cisalhamento estejam presentes nas paredes do cotovelo, as velocidades são iguais a zero lá)
(3) Escoamento permanente
(4) Escoamento incompressível
(5) Energia interna e pressão uniformes através das seções ① e ②

Sob essas considerações, a equação da energia reduz-se a

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m}\left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right) + \dot{m}g(z_2 - z_1) + \int_{A_2} \frac{V_2^2}{2}\rho V_2\, dA_2 - \int_{A_1} \frac{V_1^2}{2}\rho V_1\, dA_1 \tag{8.25}$$

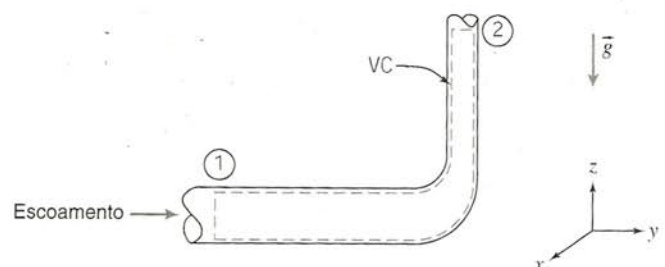



Fig. 8.12 Volume de controle e coordenadas para análise de energia de escoamento através de um cotovelo redutor de 90°.

Note que não admitimos a uniformidade da velocidade nas seções ① e ②, pois sabemos que para escoamentos viscosos a velocidade numa seção transversal não pode ser uniforme. Contudo, é conveniente introduzir a velocidade média na Eq. 8.25 de forma que possamos eliminar as integrais. Para isso, definimos um coeficiente de energia cinética.

8.6.1 Coeficiente de Energia Cinética

O *coeficiente de energia cinética*, α, é definido de forma que

$$\int_A \frac{V^2}{2}\rho V\,dA = \alpha \int_A \frac{\bar{V}^2}{2}\rho V\,dA = \alpha \dot{m}\frac{\bar{V}^2}{2} \qquad (8.26a)$$

ou

$$\alpha = \frac{\int_A \rho V^3 dA}{\dot{m}\bar{V}^2} \qquad (8.26b)$$

Para escoamento laminar num tubo (perfil de velocidade dado pela Eq. 8.12), $\alpha = 2{,}0$.

No escoamento turbulento em tubos, o perfil de velocidade é bastante achatado, como mostrado na Fig. 8.11. Podemos usar a Eq. 8.26b juntamente com as Eqs. 8.22 e 8.24 para determinar α. Substituindo o perfil de velocidade da lei de potência da Eq. 8.22 na Eq. 8.26b, obtemos

$$\alpha = \left(\frac{U}{\bar{V}}\right)^3 \frac{2n^2}{(3+n)(3+2n)} \qquad (8.27)$$

O valor de $\bar{V}/U$ é dado pela Eq. 8.24. Para $n = 6$, $\alpha = 1{,}08$; para $n = 10$, $\alpha = 1{,}03$. Como o expoente, n, no perfil de velocidade da lei de potência é uma função do número de Reynolds, α também varia com o número de Reynolds. Tendo em vista que α é razoavelmente próximo de um para números de Reynolds grandes, e a mudança na energia cinética é normalmente pequena comparada com os termos dominantes na equação de energia, podemos quase sempre usar a aproximação $\alpha = 1$ em nossos cálculos de escoamento em tubo.

8.6.2 Perda de Carga

Usando a definição de α, a equação da energia (Eq. 8.25) pode ser escrita

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m}\left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right) + \dot{m}g(z_2 - z_1) + \dot{m}\left(\frac{\alpha_2\bar{V}_2^2}{2} - \frac{\alpha_1\bar{V}_1^2}{2}\right)$$

Dividindo pela vazão em massa dá

$$\frac{\delta Q}{dm} = u_2 - u_1 + \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} + gz_2 - gz_1 + \frac{\alpha_2\bar{V}_2^2}{2} - \frac{\alpha_1\bar{V}_1^2}{2}$$

Rearranjando essa equação, escrevemos

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = (u_2 - u_1) - \frac{\delta Q}{dm} \qquad (8.28)$$

Na Eq. 8.28, o termo

$$\left(\frac{p}{\rho} + \alpha\frac{\bar{V}^2}{2} + gz\right)$$

representa a energia mecânica por unidade de massa numa seção transversal. O termo $u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm}$, é igual à diferença em energia mecânica por unidade de massa entre as seções ① e ②. Ele representa a conversão (irreversível) de energia mecânica na seção ① em energia térmica não desejada $(u_2 - u_1)$, e a perda de energia por transferência de calor $\left(-\frac{\delta Q}{dm}\right)$. Identificamos esse grupo de termos como a perda de carga total por unidade de massa e identificamos o mesmo pelo símbolo, h_{l_T}. Então,

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = h_{l_T} \qquad (8.29)$$

As dimensões de energia por unidade de massa FL/M são equivalentes às dimensões de L^2/t^2.

Se o escoamento fosse admitido como sem atrito e a velocidade numa seção fosse uniforme ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$), a equação de Bernoulli prediria perda de carga nula.

Para escoamento incompressível sem atrito, uma variação em energia interna pode ocorrer somente através de transferência de calor; não há conversão de energia mecânica $(p/\rho + V^2/2 + gz)$ em energia interna. Para o escoamento viscoso num tubo, um efeito do atrito pode ser o aumento da energia interna do escoamento, conforme mostrado pela Eq. 8.28.

Na ciência empírica da hidráulica desenvolvida durante o século dezenove, era prática comum expressar o balanço de energia em termos de energia por unidade de *peso* do líquido escoando no lugar de energia por unidade de *massa*, como na Eq. 8.29. Se a Eq. 8.29 for dividida pela aceleração da gravidade, g, obtém-se

$$\left(\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2\right) = \frac{h_{l_T}}{g} = H_{l_T} \qquad (8.30)$$

Cada termo na Eq. 8.30 tem dimensões de energia por unidade de peso do líquido em escoamento. Por isso, as dimensões resultantes de $H_{l_T} = h_{l_T}/g$ são $(L^2/t^2)(t^2/L) = L$, ou pés de líquido em escoamento. Como o termo perda de carga é de uso comum, nós o usaremos referindo-nos tanto a H_{l_T} (com as dimensões de energia por unidade de peso ou comprimento) quanto a $h_{l_T} = gH_{l_T}$ (com dimensões de energia por unidade de massa).

A Eq. 8.29 (ou Eq. 8.30) pode ser usada para calcular a diferença de pressão entre dois pontos quaisquer numa tubulação, desde que a perda de carga, h_{l_T} (ou H_{l_T}), possa ser determinada. Consideraremos o cálculo de perda de carga na próxima seção.

8.7 CÁLCULO DE PERDA DE CARGA

A perda de carga total, h_{l_T}, é considerada como a soma das perdas distribuídas, h_l, devidas aos efeitos de atrito no escoamento

completamente desenvolvido em tubos de seção constante, com as perdas localizadas, h_{l_m}, devidas a entradas, acessórios, mudanças de área e outras. Conseqüentemente, consideraremos as perdas distribuídas e localizadas em separado.

8.7.1 Perdas Distribuídas: Fator de Atrito

O balanço de energia, expresso pela Eq. 8.29, pode ser usado para avaliar a perda de carga distribuída. Para escoamento completamente desenvolvido num tubo de área constante, $h_{l_m} = 0$ e $\alpha_1(\bar{V}_1^2/2) = \alpha_2(\bar{V}_2^2/2)$; a Eq. 8.29 reduz-se a

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = g(z_2 - z_1) + h_l \qquad (8.31)$$

Se o tubo for horizontal, então $z_2 = z_1$ e

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho} = h_l \qquad (8.32)$$

Dessa forma, a perda de carga distribuída pode ser expressa como a perda de pressão para escoamento completamente desenvolvido através de um tubo horizontal de área constante.

A perda de carga representa a energia mecânica convertida em energia térmica por efeitos de atrito. Logo, a perda de carga para escoamento completamente desenvolvido em tubos de área constante depende tão-somente dos detalhes do escoamento através do conduto. A perda de carga é independente da orientação do tubo.

a. Escoamento Laminar

No escoamento laminar, a queda de pressão pode ser calculada analiticamente para o escoamento completamente desenvolvido num tubo horizontal. Desse modo, da Eq. 8.13c,

$$\Delta p = \frac{128\mu LQ}{\pi D^4} = \frac{128\mu L\bar{V}(\pi D^2/4)}{\pi D^4} = 32\frac{L}{D}\frac{\mu\bar{V}}{D}$$

Substituindo na Eq. 8.32 resulta em

$$h_l = 32\frac{L}{D}\frac{\mu\bar{V}}{\rho D} = \frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2}\left(64\frac{\mu}{\rho\bar{V}D}\right) = \left(\frac{64}{Re}\right)\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} \qquad (8.33)$$

(Veremos em breve a razão para escrever h_l nessa forma.)

b. Escoamento Turbulento

No escoamento turbulento não podemos avaliar a queda de pressão analiticamente; devemos recorrer a dados experimentais e utilizar a análise dimensional para correlacioná-los. No escoamento turbulento completamente desenvolvido, a queda de pressão, Δp, devida ao atrito num tubo horizontal de área constante, depende do diâmetro do tubo, D, do seu comprimento, L, da sua rugosidade, e, da velocidade média do escoamento, $\bar{V}$, da massa específica, ρ, e da viscosidade, μ, do fluido. Em forma funcional,

$$\Delta p = \Delta p(D, L, e, \bar{V}, \rho, \mu)$$

Aplicamos a análise dimensional a esse problema no Problema-Exemplo 7.2, resultando numa correlação da forma

$$\frac{\Delta p}{\rho\bar{V}^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho\bar{V}D}, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

Reconhecemos que $\frac{\mu}{\rho\bar{V}D} = \frac{1}{Re}$, e então poderíamos também escrever

$$\frac{\Delta p}{\rho\bar{V}^2} = \phi\left(Re, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

Combinando com a Eq. 8.32, vemos que

$$\frac{h_l}{\bar{V}^2} = \phi\left(Re, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

Embora a análise dimensional preveja a relação funcional, devemos obter os valores reais experimentalmente.

Experiências mostram que a perda de carga adimensional é diretamente proporcional a L/D. Por conseguinte, podemos escrever

$$\frac{h_l}{\bar{V}^2} = \frac{L}{D}\phi_1\left(Re, \frac{e}{D}\right)$$

Visto que a função, ϕ_1, é ainda indeterminada, é admissível introduzir uma constante no primeiro membro da equação anterior. O número $\frac{1}{2}$ é introduzido no denominador para tornar o termo da equação do lado esquerdo igual à razão entre a perda de carga e a energia cinética por unidade de massa. Assim,

$$\frac{h_l}{\frac{1}{2}\bar{V}^2} = \frac{L}{D}\phi_2\left(Re, \frac{e}{D}\right)$$

A função desconhecida, $\phi_2(Re, e/D)$, é definida como o *fator de atrito*, f,

$$f \equiv \phi_2\left(Re, \frac{e}{D}\right)$$

e

$$h_l = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} \qquad (8.34)$$

ou

$$H_l = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad (8.35)$$

O fator de atrito[5] é determinado experimentalmente. Os resultados, publicados por L. F. Moody [8], são mostrados na Fig. 8.13.

Para determinar a perda de carga num escoamento completamente desenvolvido sob condições conhecidas, o número de Reynolds é o primeiro parâmetro a ser avaliado. A rugosidade, e, é obtida da Tabela 8.1. Em seguida, o fator de atrito, f, é lido da curva apropriada na Fig. 8.13, para os valores conhecidos de Re e de e/D. Finalmente, a perda de carga é determinada usando-se a Eq. 8.34 ou a Eq. 8.35.

Várias características da Fig. 8.13 requerem alguma discussão. O fator de atrito para o escoamento laminar pode ser obtido comparando-se as Eqs. 8.33 e 8.34:

$$h_l = \left(\frac{64}{Re}\right)\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2}$$

[5] O fator de atrito definido pela Eq. 8.34 é o *fator de atrito de Darcy*. O *fator de atrito Fanning*, usado com menor freqüência, é definido no Problema 8.84.

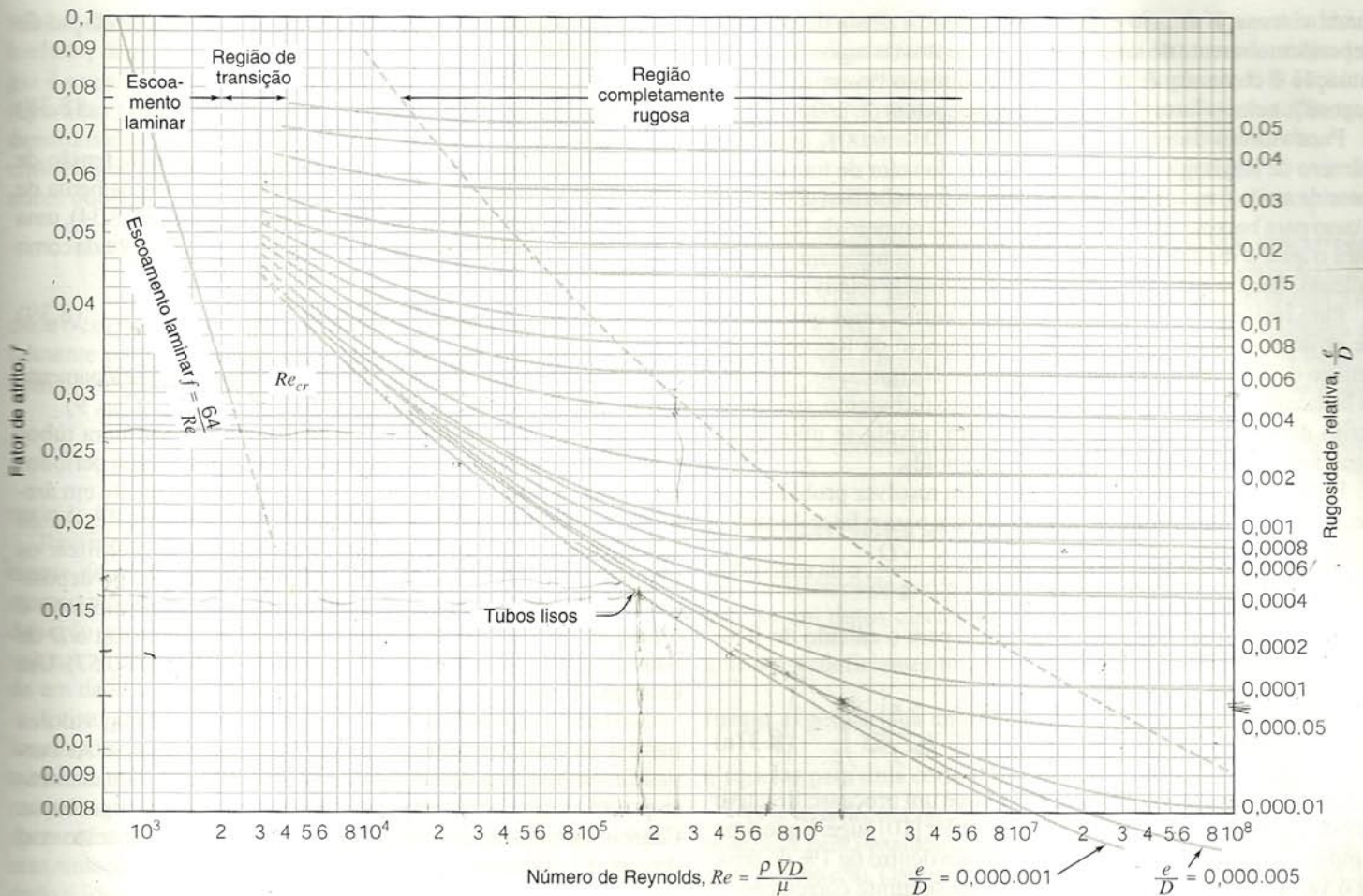



Fig. 8.13 Fator de atrito para escoamento completamente desenvolvido em tubos circulares. (Dados de [8], usados com permissão.)

Conseqüentemente, para escoamento laminar

$$f_{\text{laminar}} = \frac{64}{Re} \tag{8.36}$$

Dessa forma, no escoamento laminar, o fator de atrito é uma função do número de Reynolds apenas; é independente da rugosidade. Embora não tenhamos tomado conhecimento da rugosidade na dedução da Eq. 8.33, resultados experimentais confirmam que o fator de atrito é uma função apenas do número de Reynolds no escoamento laminar.

Tabela 8.1 Rugosidade para Tubos de Materiais Comuns de Engenharia (Dados de [8].)

Tubo	Rugosidade, *e* Pés	Rugosidade, *e* Milímetros
Aço rebitado	0,003–0,03	0,9–9
Concreto	0,001–0,01	0,3–3
Madeira	0,0006–0,003	0,2–0,9
Ferro fundido	0,00085	0,26
Ferro galvanizado	0,0005	0,15
Ferro fundido asfaltado	0,0004	0,12
Aço comercial ou ferro forjado	0,00015	0,046
Trefilado	0,000005	0,0015

O número de Reynolds num tubo pode ser mudado com mais facilidade pela variação da velocidade média do escoamento. Se o escoamento num tubo for originalmente laminar, o aumento da velocidade até que o número de Reynolds crítico seja atingido provoca a ocorrência da transição; o escoamento laminar cede lugar ao escoamento turbulento. O efeito da transição sobre o perfil de velocidade foi discutido na Seção 8.5. A Fig. 8.11 mostra que o gradiente de velocidade na parede do tubo é muito maior para o escoamento turbulento do que para o escoamento laminar. Essa mudança no perfil de velocidade causa o aumento acentuado da tensão de cisalhamento na parede, com o mesmo efeito sobre o fator de atrito.

À medida que o número de Reynolds é aumentado acima do valor de transição, o perfil de velocidade continua a tornar-se mais achatado, como observado na Seção 8.5. Para valores da rugosidade relativa $e/D \leq 0{,}001$, o fator de atrito logo após a transição tende a seguir a curva para um tubo liso, ao longo da qual o fator de atrito é uma função do número de Reynolds apenas. Entretanto, quando o número de Reynolds aumenta, o perfil de velocidade torna-se mais achatado ainda. O tamanho da delgada subcamada viscosa perto da parede do tubo decresce. Quando os elementos de rugosidade começam a surgir através dessa camada, o efeito da rugosidade torna-se importante e o fator de atrito torna-se uma função do número de Reynolds *e também* da rugosidade relativa.

A número de Reynolds muito grandes, a maioria dos elementos de rugosidade na parede do tubo emergem através da subca-

mada viscosa; o arrasto e, por conseguinte, a perda de pressão, dependem somente do tamanho dos elementos de rugosidade. Tal situação é chamada de regime de escoamento "completamente rugoso"; nele, o fator de atrito depende apenas de e/D.

Para valores da rugosidade relativa $e/D \geq 0{,}001$, quando o número de Reynolds é aumentado acima do valor de transição, o fator de atrito é maior do que aquele para um tubo liso. Como foi o caso para baixos valores de e/D, o valor do número de Reynolds para o qual o regime de escoamento torna-se completamente turbulento, decresce com o aumento da rugosidade relativa.

Para resumir a discussão precedente, verificamos que o fator de atrito decresce com o aumento do número de Reynolds enquanto o escoamento permanecer laminar. Na transição, f aumenta bruscamente. No regime de escoamento turbulento, o fator de atrito decresce gradualmente e, por fim, nivela-se num valor constante para grandes números de Reynolds.

De forma a utilizar o computador para resolver problemas, é necessário ter uma formulação matemática para o fator de atrito, f, em termos do número de Reynolds, $Re = \dfrac{\bar{V}D}{\nu}$, e da rugosidade relativa, e/D.

A fórmula mais largamente utilizada para o cálculo do fator de atrito é a de Colebrook [9],

$$\frac{1}{f^{0,5}} = -2{,}0 \log\left(\frac{e/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\, f^{0,5}}\right) \qquad (8.37a)$$

A Eq. 8.37a é transcendente, de modo que um processo iterativo é necessário para a determinação de f. Miller [10] sugere que uma simples iteração irá produzir um resultado dentro de 1% de erro, se o valor inicial for estimado a partir da seguinte correlação

$$f_0 = 0{,}25\left[\log\left(\frac{e/D}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{Re^{0,9}}\right)\right]^{-2} \qquad (8.37b)$$

A Eq. 8.37b é obtida a partir de [11].

Para escoamento turbulento em tubos lisos, a correlação de Blasius, válida para $Re \leq 10^5$, é

$$f = \frac{0{,}316}{Re^{0,25}} \qquad (8.38)$$

Quando essa relação é combinada com a expressão da tensão de cisalhamento na parede (Eq. 8.16), com a expressão da perda de carga (Eq. 8.32) e com a definição do fator de atrito (Eq. 8.34), uma expressão útil para a tensão de cisalhamento na parede é obtida como

$$\tau_w = 0{,}0332\rho\bar{V}^2\left(\frac{\nu}{R\bar{V}}\right)^{0,25} \qquad (8.39)$$

Essa equação será usada mais tarde em nosso estudo do escoamento turbulento de camada limite sobre uma placa plana (Cap. 9).

Todos os valores de e dados na Tabela 8.1 são para tubos novos, em condições relativamente boas. Após longos períodos de serviço, a corrosão desenvolve-se e, particularmente em áreas de águas muito duras, formam-se nas paredes depósitos calcários e crostas de ferrugem. A corrosão pode fragilizar os tubos, eventualmente levando a falhas. A formação de depósitos aumenta a rugosidade apreciavelmente, além de diminuir o diâmetro efetivo. Esses fatores combinados aumentam e/D de duas a cinco vezes, para tubos velhos (veja Problema 10.57). Um exemplo é mostrado na Fig. 8.14.

As curvas apresentadas na Fig. 8.13 representam valores médios de dados obtidos em numerosos experimentos. As curvas devem ser consideradas precisas dentro de aproximadamente $\pm 10\%$, o que é suficiente para muitas análises de engenharia. Caso uma maior precisão seja necessária, dados de teste real devem ser utilizados.

8.7.2 Perdas Localizadas

O escoamento em uma tubulação pode exigir a passagem do fluido através de uma variedade de acessórios, curvas ou mudanças

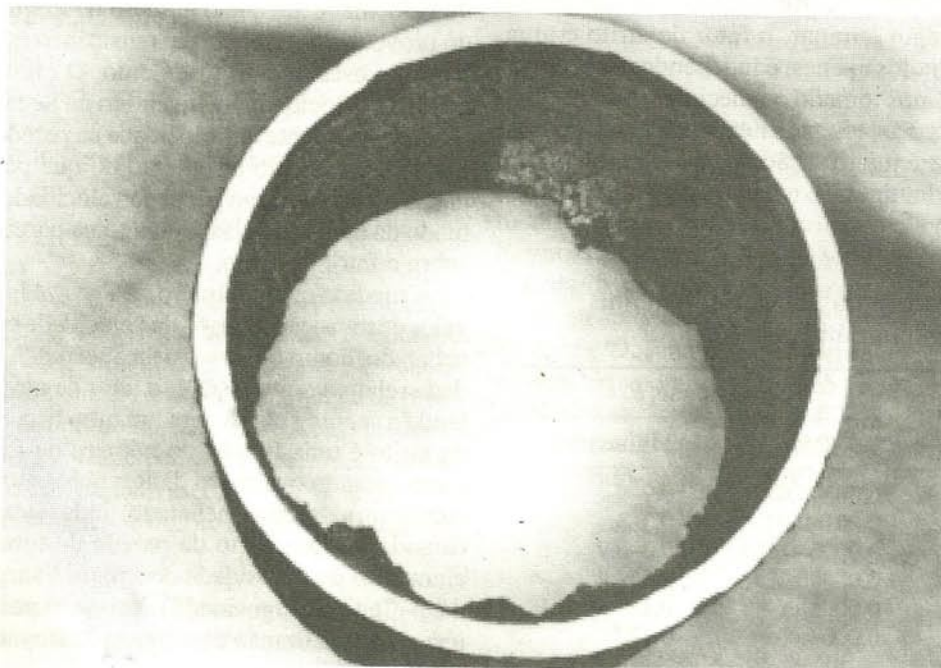



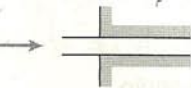
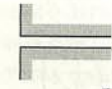
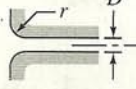
Fig. 8.14 Seção de tubo removida após 40 anos de serviço como linha de suprimento de água mostrando formação de incrustações. (Foto cortesia de Alan T. McDonald.)

súbitas de área. Perdas de carga adicionais são encontradas, sobretudo, como resultado da separação do escoamento. (A energia é eventualmente dissipada pela mistura violenta nas zonas separadas.) Essas perdas serão relativamente *menores* (e por isso denominadas *perdas menores* ou *localizadas*) se o sistema incluir longos trechos de seção constante. As perdas de carga menores ou localizadas podem ser expressas como

$$h_{l_m} = K\frac{\bar{V}^2}{2} \tag{8.40a}$$

onde o *coeficiente de perda*, K, deve ser determinado experimentalmente para cada situação. A perda de carga localizada também pode ser expressa como

$$h_{l_m} = f\frac{L_e}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} \tag{8.40b}$$

onde L_e é o *comprimento equivalente* de tubo reto.

Para o escoamento em curvas de tubos e acessórios, o coeficiente de perda, K, varia com a bitola (diâmetro) do tubo do mesmo modo que o fator de atrito, f, para o escoamento num tubo de seção reta constante. Conseqüentemente, o comprimento equivalente, L_e/D, tende para uma constante para diferentes bitolas de um dado tubo ou acessório.

Existe uma profusão de dados experimentais para as perdas localizadas, mas eles encontram-se espalhados em diversas fontes bibliográficas. Diferentes fontes podem dar diferentes valores para a mesma configuração de escoamento. Os dados aqui apresentados devem ser considerados representativos para algumas situações comumente encontradas; em cada caso, a fonte do dado é identificada.

a. Entradas e Saídas

A entrada mal projetada de um tubo pode causar uma apreciável perda de carga. Se ela tiver cantos vivos, a separação do escoamento ocorre nas quinas, provocando a formação da assim chamada *vena contracta* (seção ou veia contraída). O fluido deve acelerar-se localmente para passar através da área reduzida de escoamento na vena contracta. Perdas de energia mecânica resultam da mistura não confinada quando a corrente fluida desacelera-se novamente para preencher o tubo. Três geometrias básicas de entradas são mostradas na Tabela 8.2. Da tabela, está claro que o coeficiente de perda é reduzido significativamente quando a entrada é arredondada, mesmo que ligeiramente. Para uma entrada bem arredondada, ($r/D \geq 0,15$), o coeficiente de perda é quase desprezível. O Problema-Exemplo 8.9 ilustra um procedimento para determinação experimental do coeficiente de perda para uma entrada de tubo.

A energia cinética por unidade de massa, $\frac{\alpha\bar{V}^2}{2}$, é completamente dissipada pela mistura quando o escoamento descarrega de um duto num grande reservatório ou câmara. A situação corresponde ao escoamento através de uma expansão súbita com $AR = 0$ (Fig. 8.15). Nesse caso, o coeficiente de perda localizada é igual a α. Não é possível melhorar o coeficiente de perda localizada para uma saída; entretanto, a adição de um difusor pode reduzir $\frac{\bar{V}^2}{2}$ consideravelmente (veja o Problema-Exemplo 8.10).

Tabela 8.2 Coeficientes de Perdas Localizadas para Entradas de Tubos (Dados de [12].)

Tipo de Entrada	Coeficiente de Perda Localizada, K^a
Reentrante	0,78
Borda viva	0,5
Arredondado	r/D: 0,02 / 0,06 / $\geq 0,15$; K: 0,28 / 0,15 / 0,04

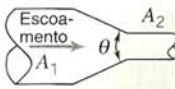
[a] Baseado em $h_{l_m} = K(\bar{V}^2/2)$, onde $\bar{V}$ é a velocidade média no tubo.

b. Expansões e Contrações

Os coeficientes de perda localizada para expansões e contrações súbitas em dutos circulares são dados na Fig. 8.15. Note que ambos os coeficientes baseiam-se no maior valor de $\frac{\bar{V}^2}{2}$. Dessa forma, as perdas para uma expansão súbita são baseadas em $\frac{\bar{V}_1^2}{2}$ e aquelas para uma contração são baseadas em $\frac{\bar{V}_2^2}{2}$.

As perdas decorrentes da variação de área podem ser um pouco reduzidas pela instalação de um bocal ou difusor entre as duas seções de tubo reto. Dados para bocais são apresentados na Tabela 8.3.

As perdas em difusores dependem de diversas variáveis geométricas e do escoamento. Os dados para difusores são mais comumente apresentados em termos de um coeficiente de recuperação de pressão, C_p, definido como a razão entre o aumento da pressão estática e a pressão dinâmica de entrada,

$$C_p \equiv \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}_1^2} \tag{8.41}$$

Dados de difusores cônicos para escoamento turbulento completamente desenvolvido em tubos, na entrada, são apresentados na Fig. 8.16 como uma função da geometria. Do mapa de desempenho da Fig. 8.16, vemos que as geometrias ótimas para difusores podem ser definidas. Para cada razão de área, $AR < 1,40$,

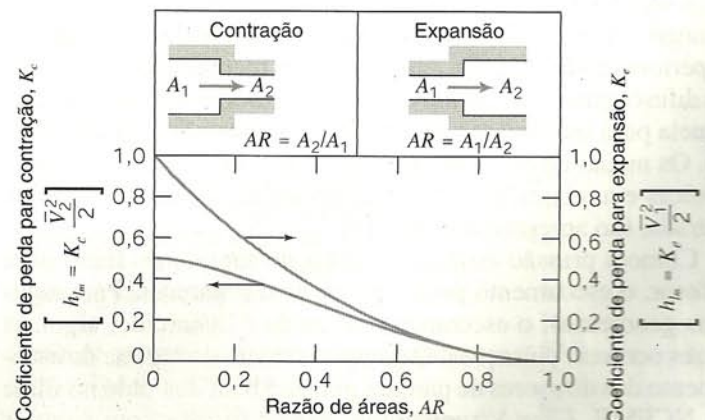



Fig. 8.15 Coeficientes de perda para escoamento através de mudanças súbitas de área. (Dados de [1].)

Tabela 8.3 Coeficientes de Perdas (*K*) para Contrações Graduais: Dutos Circulares e Retangulares (Dados de [13].)

	Ângulo Incluso, θ, Graus						
A_2/A_1	10	15–40	50–60	90	120	150	180
0,50	0,05	0,05	0,06	0,12	0,18	0,24	0,26
0,25	0,05	0,04	0,07	0,17	0,27	0,35	0,41
0,10	0,05	0,05	0,08	0,19	0,29	0,37	0,43

Nota: Os coeficientes são baseados em $h_{l_m} = K(\bar{V}_2^2/2)$.

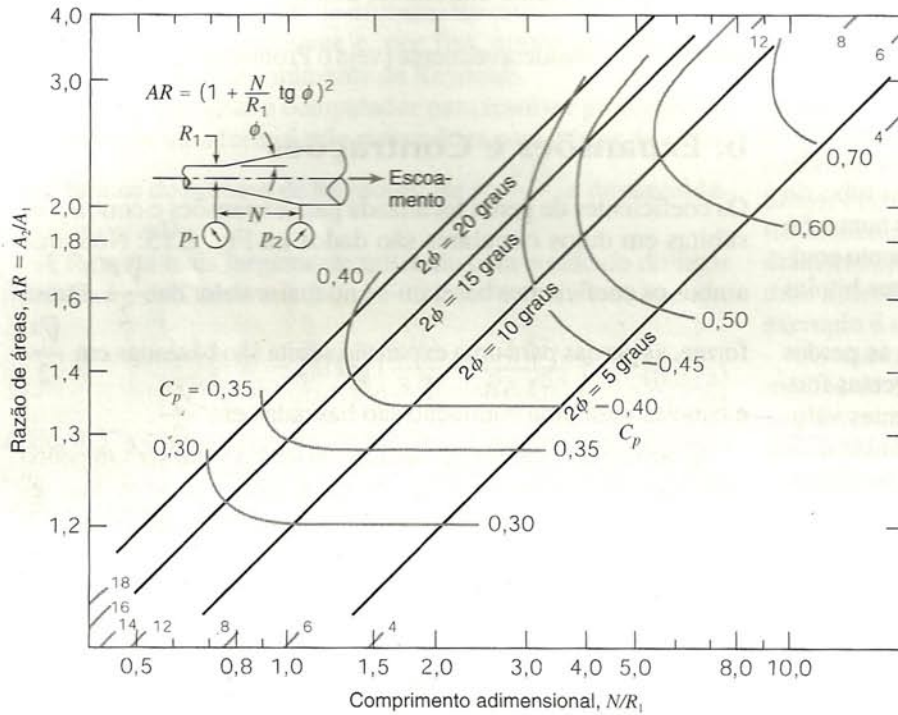



Fig. 8.16 Recuperação de pressão para difusores cônicos com escoamento turbulento completamente desenvolvido na entrada. (Dados de [14].)

há um valor de N/R_1 acima do qual nenhum aumento de recuperação de pressão seria esperado. Analogamente, para um comprimento adimensional dado, N/R_1, há uma razão de área ótima para a máxima recuperação de pressão.

Os mapas de desempenho para difusores de paredes planas e anulares [15], e para radiais [16], encontram-se disponíveis na literatura.

A recuperação de pressão do difusor é essencialmente independente do número de Reynolds para valores desse parâmetro superiores a $7,5 \times 10^4$ na entrada [17]. A recuperação de pressão do difusor para escoamento de entrada uniforme é melhor do que aquela para escoamento de entrada completamente desenvolvido. Os mapas de desempenho para difusores de paredes planas, cônicas e anulares, para diversas condições do escoamento de entrada, são apresentados em [18].

Como a pressão estática aumenta no sentido do fluxo num difusor, o escoamento pode separar-se das paredes. Para algumas geometrias, o escoamento de saída é distorcido; algumas vezes ocorrem pulsações. O comportamento do regime de escoamento dos difusores de paredes planas é bem ilustrado no filme da NCFMF, *Flow Visualization*. Para difusores com ângulos grandes, aletas ou repartidores podem ser empregados para suprimir a estolagem e melhorar a recuperação de pressão [19].

A definição de C_p pode ser relacionada com a perda de carga. Se a gravidade for desprezada, e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$, a Eq. 8.29 reduz-se a

$$\left[\frac{p_1}{\rho} + \frac{\bar{V}_1^2}{2}\right] - \left[\frac{p_2}{\rho} + \frac{\bar{V}_2^2}{2}\right] = h_{l_T} = h_{l_m}$$

Assim

$$h_{l_m} = \frac{\bar{V}_1^2}{2} - \frac{\bar{V}_2^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

$$h_{l_m} = \frac{\bar{V}_1^2}{2}\left[\left(1 - \frac{\bar{V}_2^2}{\bar{V}_1^2}\right) - \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}_1^2}\right] = \frac{\bar{V}_1^2}{2}\left[\left(1 - \frac{\bar{V}_2^2}{\bar{V}_1^2}\right) - C_p\right]$$

Da continuidade, $A_1\bar{V}_1 = A_2\bar{V}_2$, e então

$$h_{l_m} = \frac{\bar{V}_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - C_p\right]$$

ou

$$h_{l_m} = \frac{\bar{V}_1^2}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{(AR)^2}\right) - C_p\right] \tag{8.42}$$

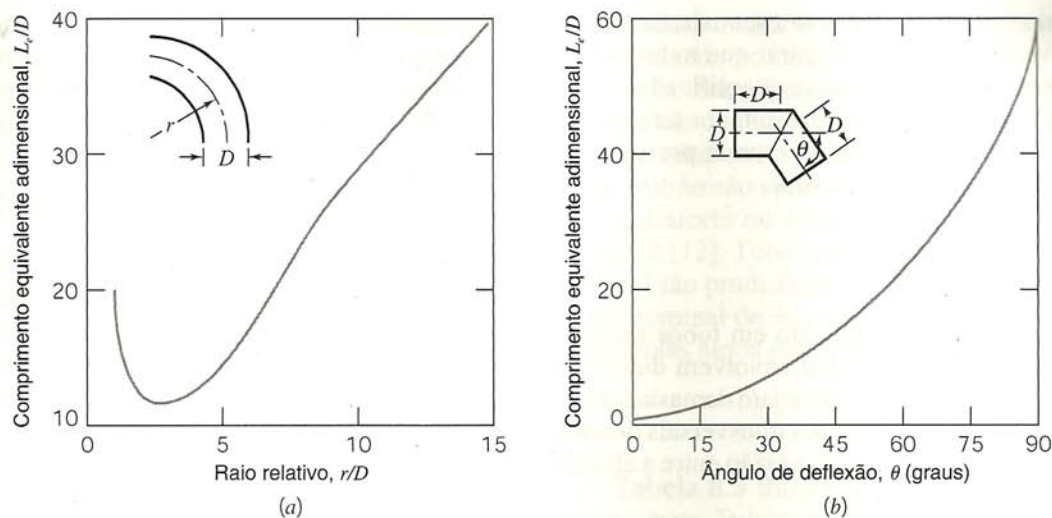



Fig. 8.17 Resistência total representativa (L_e/D) para (a) curvas de 90° e cotovelos flangeados e (b) curvas de gomos ou em meia esquadria. (Dados de [12].)

Para um escoamento sem atrito, $h_{l_m} = 0$; para esse caso, a Eq. 8.42 fornece o coeficiente ideal de recuperação de pressão, denotado C_{p_i}, como

$$C_{p_i} = 1 - \frac{1}{(AR)^2} \tag{8.43}$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido pela aplicação da equação de Bernoulli juntamente com a equação da continuidade ao escoamento sem atrito através do difusor. Dessa forma, a perda de carga para o escoamento através de um difusor real pode ser escrita

$$h_{l_m} = (C_{p_i} - C_p)\frac{\bar{V}_1^2}{2} \tag{8.44}$$

c. Curvas em Tubos

A perda de carga numa curva é maior do que aquela para escoamento completamente desenvolvido num trecho retilíneo de igual comprimento. A perda adicional é essencialmente o resultado do escoamento secundário,[6] sendo representada de maneira mais conveniente por um comprimento equivalente de tubo reto. O comprimento equivalente depende do raio relativo de curvatura, conforme mostrado na Fig. 8.17a para curvas de 90°. Um procedimento aproximado para cálculo do comprimento equivalente adimensional para curvas com outros ângulos é apresentado em [12].

As curvas de meia esquadria ou de "gomos" são empregadas com freqüência, especialmente em sistemas de grandes diâmetros, pois são simples e baratas de serem preparadas no campo. Dados de projeto para curvas de gomos são apresentados na Fig. 8.17b.

d. Válvulas e Acessórios

As perdas em escoamento através de válvulas e acessórios também podem ser expressas em termos de um comprimento equivalente de tubo reto. Alguns dados representativos são apresentados na Tabela 8.4.

Todas as resistências são dadas para válvulas totalmente abertas; as perdas aumentam muito quando elas estão parcialmente fechadas. O projeto de válvulas varia significativamente entre fabricantes. Sempre que possível, as resistências fornecidas pelo fabricante da válvula deveriam ser utilizadas para a obtenção de resultados precisos.

Os acessórios numa tubulação podem ter conexões rosqueadas, flangeadas ou soldadas. Para pequenos diâmetros, as junções rosqueadas são mais comuns; as tubulações de diâmetros maiores têm em geral junções flangeadas ou soldadas.

Na prática, as perdas introduzidas por acessórios e válvulas variam consideravelmente, dependendo dos cuidados dispensados à fabricação da tubulação. Se for permitida a permanência de rebarbas do corte de trechos de tubos, elas poderão causar obstruções locais, com aumento apreciável das perdas.

Embora as perdas discutidas nessa seção tenham sido denominadas de "menores", elas podem ser uma grande parcela da

Tabela 8.4 Comprimentos Equivalentes Adimensionais Representativos (L_e/D) para Válvulas e Acessórios (Dados de [12].)

Tipo de Acessório	Comprimento Equivalente,[a] L_e/D
Válvulas (completamente abertas)	
Válvula gaveta	8
Válvula globo	340
Válvula angular	150
Válvula de esfera	3
Válvula de retenção: tipo globo	600
: tipo angular	55
Válvula de pé com crivo : disco guiado	420
: disco articulado	75
Cotovelo padrão: 90°	30
: 45°	16
Curva de retorno (180°), configuração curta	50
Tê padrão : escoamento principal	20
: escoamento lateral	60

[a] Baseado em $h_{l_m} = f\frac{L_e}{D}\frac{\bar{V}^2}{2}$.

[6] Escoamentos secundários são mostrados no filme da NCFMF, *Secondary Flow*.

perda total do sistema. Assim, um sistema a ser calculado deve ser cuidadosamente verificado para assegurar que todas as perdas localizadas tenham sido identificadas e quantificadas. Se os cálculos forem feitos cuidadosamente, os resultados terão precisão satisfatória para a engenharia. Pode-se esperar previsão das perdas com precisão de mais ou menos 10%.

8.7.3 Dutos Não Circulares

As correlações empíricas para escoamento em tubos também podem ser empregadas para cálculos que envolvem dutos não circulares, desde que suas seções retas não sejam demasiadamente grandes. Dessa forma, dutos com seções transversais quadradas ou retangulares podem ser tratados se a razão entre a altura e a largura for inferior a cerca de 3 ou 4.

As correlações para escoamento turbulento em tubos são estendidas para uso com geometrias não circulares pela introdução do *diâmetro hidráulico*, definido como

$$D_h \equiv \frac{4A}{P} \tag{8.45}$$

no lugar do diâmetro do tubo, D. Na Eq. 8.45, A é a área da seção, e P, o *perímetro molhado*, o comprimento de parede em contato com o fluido escoando em qualquer seção transversal. O fator 4 é introduzido para que o diâmetro hidráulico seja igual ao diâmetro do duto para uma forma circular. Para um duto circular, $A = \pi D^2/4$ e $P = \pi D$, portanto

$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4\left(\frac{\pi}{4}\right)D^2}{\pi D} = D$$

Para um duto retangular de largura b e altura h, $A = bh$ e $P = 2(b + h)$, de modo que

$$D_h = \frac{4bh}{2(b + h)}$$

Se a *razão de aspecto*, ar, for definida como $ar = h/b$, então

$$D_h = \frac{2h}{1 + ar}$$

para dutos retangulares. Para um duto quadrado, $ar = 1$ e $D_h = h$.

Como observado, o conceito do diâmetro hidráulico pode ser aplicado na faixa aproximada de $1/4 < ar < 4$. Sob essas condições, as correlações para o escoamento em tubos dão resultados com precisão aceitável para dutos retangulares; como a fabricação desses dutos em chapa metálica fina é fácil e barata, eles são usualmente aplicados em sistemas de ar condicionado, ventilação e aquecimento. Há muitos dados disponíveis para perdas no escoamento de ar (p. ex., veja [13, 20]).

As perdas decorrentes dos escoamentos secundários aumentam rapidamente para geometrias extremas, de forma que as correlações não se aplicam a dutos largos e achatados, ou a dutos de seção triangular ou irregular. Dados experimentais devem ser utilizados quando se necessitar de informações precisas de projeto para situações específicas.

8.8 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESCOAMENTO EM TUBOS

Uma vez calculada a perda de carga total com os métodos da Seção 8.7, os problemas de escoamento em tubos podem ser solucionados com o uso da equação da energia, Eq. 8.29. As mesmas técnicas básicas são empregadas, mesmo para sistemas complexos, mas consideramos, em primeiro lugar, problemas de escoamento em sistemas de tubo único.

8.8.1 Sistemas de Trajetória Única

A Eq. 8.29 é a equação de cálculo para sistemas de tubos. A queda de pressão numa tubulação é uma função da vazão, variação de elevação e perda de carga total. A perda de carga total consiste nas perdas distribuídas devidas ao atrito em trechos de área de constante (Eq. 8.34) e nas perdas localizadas devidas a acessórios, mudanças de área e outras (Eqs. 8.40). A queda de pressão pode ser escrita na forma funcional

$$\Delta p = \phi_3(L, Q, D, e, \Delta z, \text{configuração do sistema}, \rho, \mu)$$

As propriedades do fluido são constantes para o escoamento em tubos de fluidos incompressíveis. A rugosidade, variação de elevação e configuração do sistema dependem do arranjo dos tubos. Uma vez que esses parâmetros tenham sido fixados (para um sistema e um fluido dados), a dependência reduz-se a

$$\Delta p = \phi_4(L, Q, D)$$

A Eq. 8.46 relaciona quatro variáveis. Qualquer uma delas pode ser a quantidade desconhecida numa situação prática. Dessa forma, quatro casos gerais são possíveis:

(a) L, Q e D conhecidos, Δp desconhecido.
(b) Δp, Q e D conhecidos, L desconhecido.
(c) Δp, L e D conhecidos, Q desconhecido.
(d) Δp, L e Q conhecidos, D desconhecido.

Os casos (a) e (b) podem ser resolvidos diretamente pela aplicação das equações da continuidade e da quantidade de movimento e utilização dos dados de perdas da Seção 8.7. As soluções para os casos (c) e (d) utilizam as mesmas equações e dados, porém exigem iteração. Cada caso é discutido a seguir e ilustrado com um exemplo.

a. *L*, *Q* e *D* conhecidos, Δ*p* desconhecido

Um fator de atrito é obtido do diagrama de Moody (Fig. 8.13) ou de equações empíricas usando Re e e/D calculados a partir dos dados fornecidos. A perda de carga total é calculada com as Eqs. 8.34 e 8.40. A Eq. 8.29 é então empregada para avaliar a queda de pressão, Δp. O procedimento é ilustrado no Problema-Exemplo 8.5.

b. Δ*p*, *Q* e *D* conhecidos, *L* desconhecido

A perda de carga total é calculada com a Eq. 8.29. Um fator de atrito é obtido do diagrama de Moody ou de equações empíricas usando Re e e/D calculados a partir dos dados fornecidos. O comprimento desconhecido é determinado resolvendo-se a Eq. 8.34. O procedimento é ilustrado no Problema-Exemplo 8.6.

c. Δ*p*, *L* e *D* conhecidos, *Q* desconhecido

A Eq. 8.29 é combinada com as equações de definição para a perda de carga; o resultado é uma expressão para $\overline{V}$ (ou Q) em

termos do fator de atrito, f. A maioria dos escoamentos em tubos de interesse da engenharia têm números de Reynolds relativamente grandes. Assim, mesmo que o número de Reynolds (e por conseguinte f) não possa ser calculado porque Q não é conhecido, uma boa estimativa inicial para o fator de atrito é tirada da região de escoamento completamente rugoso da Fig. 8.13. Usando o f estimado, uma primeira aproximação para $\bar{V}$ é obtida. O número de Reynolds é calculado para esse valor de $\bar{V}$; um novo f e uma nova aproximação para $\bar{V}$ são obtidos. Como f tem dependência fraca com o número de Reynolds, mais de duas iterações raramente são requeridas para a convergência. Um escoamento desse tipo é avaliado no Problema-Exemplo 8.7.

d. Δp, L e Q conhecidos, D desconhecido

Quando se dispõe de um dispositivo hidráulico e a geometria do sistema de tubos é conhecida, o problema consiste em determinar o menor (e portanto de mais baixo custo) diâmetro capaz de suprir a vazão desejada. Como o diâmetro é desconhecido, nem o número de Reynolds nem a rugosidade relativa podem ser calculados diretamente, e uma solução iterativa é necessária. Um escoamento desse tipo é ilustrado no Problema-Exemplo 8.8.

Os cálculos começam admitindo-se um diâmetro estimado. Um fator de atrito e uma rugosidade relativa são então calculados com o valor estimado de D. Um fator de atrito é obtido da Fig. 8.13. Em seguida, a perda de carga é calculada das Eqs. 8.34 e 8.40, e a Eq. 8.29 é resolvida para a queda de pressão. O valor de Δp resultante da tentativa é comparado com o requisito do sistema.

Se o valor de Δp resultante for grande demais, os cálculos são repetidos para um maior valor estimado de D. Se o valor de Δp resultante for menor do que o critério, um valor menor de D deve ser empregado na iteração seguinte.

Ao escolher a bitola do tubo, é lógico trabalhar com diâmetros que são comercialmente disponíveis. Os tubos são fabricados num número limitado de bitolas padrão. Alguns dados para tubos padrão são apresentados na Tabela 8.5. Para dados sobre tubo extraforte ou duplo extraforte, consulte um manual, por exemplo, [12]. Tubos maiores do que 12 polegadas de diâmetro nominal são produzidos em múltiplos de 2 polegadas até o diâmetro nominal de 36 polegadas, e em múltiplos de 6 polegadas para bitolas ainda maiores.

Tabela 8.5 Bitolas ou Diâmetros Padronizados para Tubos de Aço Carbono, Aço Ligado e Aço Inoxidável (Dados de [12].)

Diâmetro Nominal do Tubo (pol.)	Diâmetro Interno (pol.)	Diâmetro Nominal do Tubo (pol.)	Diâmetro Interno (pol.)
$\frac{1}{8}$	0,269	$2\frac{1}{2}$	2,469
$\frac{1}{4}$	0,364	3	3,068
$\frac{3}{8}$	0,493	4	4,026
$\frac{1}{2}$	0,622	5	5,047
$\frac{3}{4}$	0,824	6	6,065
1	1,049	8	7,981
$1\frac{1}{2}$	1,610	10	10,020
2	2,067	12	12,000

EXEMPLO 8.5 — Escoamento no Tubo de um Reservatório: Queda de Pressão Desconhecida

Um tubo liso horizontal com 100 m de comprimento está ligado a um grande reservatório. Que profundidade, d, deve ser mantida no reservatório para produzir uma vazão de 0,0084 m³/s de água? O diâmetro interno do tubo liso é 75 mm. A entrada é de bordas vivas e a água descarrega para a atmosfera.

PROBLEMA-EXEMPLO 8.5

DADOS: Escoamento de água a 0,0084 m³/s através de um tubo com 75 mm de diâmetro, com $L = 100$ m, ligado a um reservatório de nível constante. Entrada de bordas vivas.

DETERMINAR: A profundidade do reservatório, d, para manter o escoamento.

SOLUÇÃO:

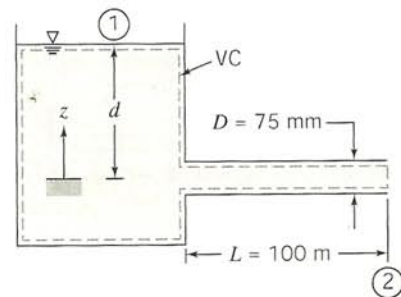
Equação de cálculo:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = h_{l_T} = h_l + h_{l_m} \tag{8.29}$$

onde

$$h_l = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} \qquad \text{e} \qquad h_{l_m} = K\frac{\bar{V}^2}{2}$$

Para o problema dado, $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $\bar{V}_1 \simeq 0$, $\bar{V}_2 = \bar{V}$, e $\alpha_2 \simeq 1{,}0$. Se $z_2 = 0$, então $z_1 = d$. Simplificando a Eq. 8.29 dá

$$gd - \frac{\bar{V}^2}{2} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} + K\frac{\bar{V}^2}{2}$$

Logo

$$d = \frac{1}{g}\left[f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} + K\frac{\bar{V}^2}{2} + \frac{\bar{V}^2}{2}\right] = \frac{\bar{V}^2}{2g}\left[f\frac{L}{D} + K + 1\right]$$

Como $\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2}$, então

$$d = \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g}\left[f\frac{L}{D} + K + 1\right]$$

Admitindo a água a 20°C, $\rho = 999$ kg/m³ e $\mu = 1,0 \times 10^{-3}$ kg/(m·s). Assim

$$Re = \frac{\rho\bar{V}D}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi\mu D}$$

$$Re = \frac{4}{\pi} \times \frac{999\text{ kg}}{\text{m}^3} \times \frac{0{,}0084\text{ m}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{m}\cdot\text{s}}{1{,}0\times 10^{-3}\text{ kg}} \times \frac{1}{0{,}075\text{ m}} = 1{,}42 \times 10^5$$

Para o tubo liso, da Fig. 8.13, $f = 0{,}0170$. Da Tabela 8.2, $K = 0{,}5$. Então

$$d = \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g}\left[f\frac{L}{D} + K + 1\right]$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \times \frac{(0{,}0084)^2\text{m}^6}{\text{s}^2} \times \frac{1}{(0{,}075)^4\text{m}^4} \times \frac{\text{s}^2}{9{,}81\text{m}}\left[(0{,}0170)\frac{100\text{m}}{0{,}075\text{m}} + 0{,}5 + 1\right]$$

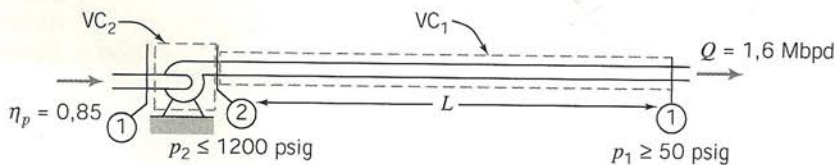
$$d = 4{,}45\text{ m}$$

{ Esse problema ilustra o método de cálculo da perda de carga total. }

EXEMPLO 8.6 — Escoamento numa Tubulação: Comprimento Desconhecido

Petróleo bruto escoa através de um trecho horizontal do oleoduto do Alasca numa vazão de 1,6 milhão de barris por dia (1 barril = 42 galões). O diâmetro interno do tubo é 48 pol.; a sua rugosidade é equivalente à do ferro galvanizado. A pressão máxima permissível é de 1200 psi; a pressão mínima requerida para manter os gases dissolvidos em solução no petróleo cru é de 50 psi. O petróleo cru tem SG = 0,93; a sua viscosidade à temperatura de bombeamento de 140°F é $\mu = 3{,}5 \times 10^{-4}$ lbf·s/pé². Para essas condições, determine o espaçamento máximo possível entre estações de bombeamento. Se a eficiência da bomba é de 85 por cento, determine a potência que deve ser fornecida a cada estação de bombeamento.

PROBLEMA-EXEMPLO 8.6

DADOS: Escoamento de petróleo bruto num trecho horizontal do oleoduto do Alasca.

$D = 48$ pol. (rugosidade de ferro galvanizado), SG = 0,93, $\mu = 3{,}5 \times 10^{-4}$ lbf·s/pé².

DETERMINAR: **(a)** Espaçamento máximo, L.
(b) Potência necessária em cada estação de bombeamento.

SOLUÇÃO:
Apliquemos a equação da energia para escoamento permanente incompressível.

Equações de cálculo:

$$\left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) = h_{l_T} \qquad (8.29)$$

$$= 0(3)$$

$$h_{l_T} = h_l + h_{l_m} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} + K\frac{\bar{V}^2}{2}$$

Considerações: (1) $\alpha_1 \bar{V}_1^2 = \alpha_2 \bar{V}_2^2$
(2) Tubo horizontal, $z_1 = z_2$
(3) Desprezar perdas localizadas
(4) Viscosidade constante

Então, usando o VC_1

$$\Delta p = p_2 - p_1 = f \frac{L}{D} \rho \frac{\bar{V}^2}{2}$$

ou

$$L = \frac{2D}{f} \frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} \quad \text{onde } f = f(Re, e/D)$$

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{1{,}6 \times 10^6 \text{ bbl}}{\text{dia}} \times \frac{4}{\pi(4)^2 \text{ pé}^2} \times \frac{42 \text{ gal}}{\text{bbl}} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48 \text{ gal}} \times \frac{\text{dia}}{24 \text{ h}} \times \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} = 8{,}27 \text{pé/s}$$

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{(0{,}93)\, 1{,}94 \text{ slug}}{\text{pé}^3} \times \frac{8{,}27 \text{ pé}}{\text{s}} \times 4 \text{ pé} \times \frac{\text{pé}^2}{3{,}5 \times 10^{-4} \text{ lbf} \cdot \text{s}} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}}$$

$$Re = 1{,}71 \times 10^5$$

Da Tabela 8.1, $e = 0{,}0005$ pé e portanto $e/D = 0{,}00012$. Então, da Fig. 8.13, $f \simeq 0{,}017$ e assim

$$L = \frac{2}{0{,}017} \times 4 \text{ pé} \times \frac{(1200 - 50) \text{ lbf}}{\text{pol.}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{(0{,}93)\, 1{,}94 \text{ slug}} \times \frac{\text{s}^2}{(8{,}27)^2 \text{ pé}^2}$$

$$\times \frac{144 \text{ pol.}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{slug} \cdot \text{pé}}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2} = 6{,}32 \times 10^5 \text{ pés}$$

$$L = 632.000 \text{ pés} (120 \text{ mi})$$ L

Para determinar a potência de bombeamento, apliquemos a primeira lei da termodinâmica ao VC_2, através da bomba entre as seções ① e ②.

Equação básica:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho \, d\forall} + \int_{SC} \left(u + \overset{=0(2)}{\frac{V^2}{2}} + \overset{=0(3)}{gz} + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) Regime permanente
(2) $\bar{V}_2 = \bar{V}_1$
(3) $z_2 = z_1$
(4) Escoamento uniforme em cada seção

Então

$$\dot{W}_{pol.} = -\dot{W}_s = \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \{\dot{m}\} + \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \{-\dot{m}\} - \dot{Q}$$

$$\dot{W}_{pol.} = \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right) \dot{m} + (u_2 - u_1)\dot{m} - \dot{Q} = \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right) \dot{m} + \text{Perdas}$$

As perdas são determinadas em termos da eficiência da bomba, η.

$$\text{Perdas} = (1 - \eta)\ \dot{W}_{pol.}$$

Assim,

$$\dot{W}_{pol.} = \frac{1}{\eta} \frac{(p_2 - p_1)}{\rho} \dot{m} = \frac{1}{\eta} (p_2 - p_1) \bar{V} A = \frac{\bar{V} A \Delta p}{\eta}$$

$$= \frac{1}{0{,}85} \times 8{,}27 \frac{\text{pé}}{\text{s}} \times \frac{\pi}{4} (4)^2 \text{pé}^2 \times 1150 \frac{\text{lbf}}{\text{pol.}^2} \times 144 \frac{\text{pol.}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550 \text{ pé} \cdot \text{lbf}}$$

$$\dot{W}_{pol.} = 36.800 \text{ hp (potência fornecida)}$$ $\dot{W}_{necessária}$

Esse problema ilustra o método de resolução para um comprimento desconhecido da tubulação. Note que a potência teórica de bombeamento, obtida da aplicação da primeira lei através da bomba reduz-se a $W = Q\Delta p$. A potência real necessária pode ser determinada da definição de eficiência, $\eta = \dfrac{\dot{W}_{teórica}}{\dot{W}_{real}}$.

EXEMPLO 8.7 — Escoamento Proveniente de uma Torre de Água: Vazão em Volume Desconhecida

Um sistema de proteção contra incêndio é suprido a partir de uma torre d'água por meio de um tubo vertical com 80 pés de altura. O tubo mais longo no sistema tem 600 pés e é feito de ferro fundido com cerca de 20 anos de idade. O tubo contém uma válvula de gaveta; outras perdas localizadas podem ser desprezadas. O diâmetro do tubo é 4 pol. Determine a vazão máxima em volume (em gpm) através desse tubo.

PROBLEMA-EXEMPLO 8.7

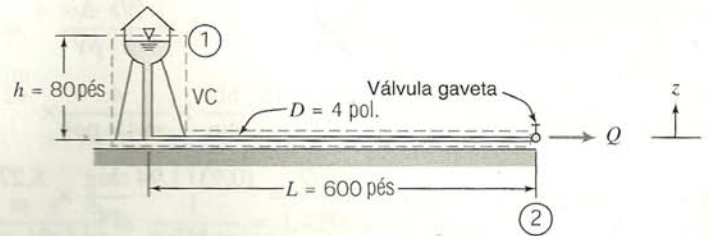
DADOS: Sistema de proteção contra incêndio, conforme mostrado.

DETERMINAR: Q, em gpm.

SOLUÇÃO:

Equações de cálculo:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = h_{l_T} \quad (8.29)$$

($\bar{V}_1^2 \approx 0(2)$; termos de pressão cancelados (1))

$$h_{l_T} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}_2^2}{2} + h_{l_m} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}_2^2}{2} + f\frac{L_e}{D}\frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

Considerações: (1) $p_1 = p_2 = p_{atm}$
(2) $\bar{V}_1 \simeq 0$ e $\alpha_2 \simeq 1{,}0$

Então a Eq. 8.29 pode ser escrita como

$$g(z_1 - z_2) - \frac{\bar{V}_2^2}{2} = h_{l_T} = f\left(\frac{L}{D} + \frac{L_e}{D}\right)\frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

Para uma válvula de gaveta completamente aberta, da Tabela 8.4, $L_e/D = 8$. Assim

$$g(z_1 - z_2) = \frac{\bar{V}_2^2}{2}\left[f\left(\frac{L}{D} + 8\right) + 1\right]$$

Resolvendo para $\bar{V}_2$, obtemos

$$\bar{V}_2 = \left[\frac{2g(z_1 - z_2)}{f(L/D + 8) + 1}\right]^{1/2}$$

Para simplificar, admitamos que o tubo vertical tem o mesmo diâmetro do horizontal. Então

$$\frac{L}{D} = \frac{600 \text{ pés} + 80 \text{ pés}}{4 \text{ pol.}} \times 12\frac{\text{pol.}}{\text{pé}} = 2040$$

Também

$$z_1 - z_2 = h = 80 \text{ pés}$$

Como $\bar{V}_2$ não é conhecido, não podemos calcular Re. Contudo, podemos admitir um fator de atrito completamente rugoso. Da Tabela 8.1, e = 0,00085 pé e por conseguinte $e/D \simeq 0{,}0025$ para tubo de ferro fundido. Como o tubo é muito velho, escolhamos $e/D = 0{,}005$. Desse modo, da Fig. 8.13, supomos $f \simeq 0{,}03$. Então, uma primeira aproximação para $\bar{V}_2$ é

$$\bar{V}_2 = \left[2 \times 32{,}2\frac{\text{pé}}{\text{s}^2} \times 80 \text{ pé} \times \frac{1}{0{,}03(2040 + 8) + 1}\right]^{1/2} = 9{,}08 \text{ pé/s}$$

Verifiquemos agora o valor de f estimado.

$$Re = \frac{\rho\bar{V}D}{\mu} = \frac{\bar{V}D}{\nu} = 9{,}08\frac{\text{pé}}{\text{s}} \times \frac{\text{pé}}{3} \times \frac{\text{s}}{1{,}21 \times 10^{-5} \text{ pé}^2} = 2{,}50 \times 10^5$$

Para $e/D = 0{,}005$, $f = 0{,}031$, da Fig. 8.13. Obtemos então

$$\bar{V}_2 = \left[2 \times 32{,}2\frac{\text{pé}}{\text{s}^2} \times 80 \text{ pé} \times \frac{1}{0{,}031(2040 + 8) + 1}\right]^{1/2} = 8{,}94 \text{ pé/s}$$

A convergência é portanto satisfatória. A vazão em volume é

$$Q = \bar{V}_2 A = \bar{V}_2 \frac{\pi D^2}{4} = \frac{8{,}94 \text{ pé}}{\text{s}} \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{pé}^2 \times \frac{7{,}48 \text{ gal}}{\text{pé}^3} \times \frac{60 \text{ s}}{\text{min}}$$

$$Q = 350 \text{ gpm} \qquad \longleftarrow \qquad Q$$

Esse problema ilustra o procedimento para resolver problemas de escoamento em tubos onde a vazão é desconhecida. Note que a velocidade, e por conseguinte a vazão, é essencialmente proporcional a $1/\sqrt{f}$. Dobrar *e/D* para levar em conta a idade do tubo reduziu a vazão em cerca de 10%.

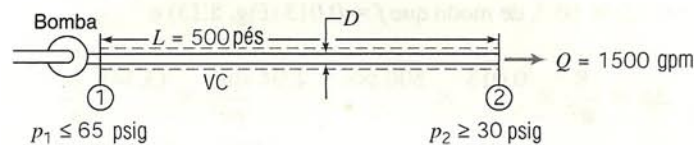
EXEMPLO 8.8 — Escoamento num Sistema de Irrigação: Diâmetro Desconhecido

As cabeças borrifadoras num sistema de irrigação agrícola devem ser supridas com água através de 500 pés de tubos de alumínio trefilado, proveniente de uma bomba acionada por motor de combustão interna. Na sua faixa de operação de maior eficiência, a descarga da bomba é de 1500 gpm a uma pressão não superior a 65 psig. Para operação satisfatória, os borrifadores devem operar a 30 psig ou mais. As perdas localizadas e as variações de elevação podem ser desprezadas. Determine o menor diâmetro de tubo padrão que pode ser empregado.

PROBLEMA-EXEMPLO 8.8

DADOS: Sistema de suprimento d'água, conforme mostrado.

Bomba — L = 500 pés — D — VC — Q = 1500 gpm

① $p_1 \leq 65$ psig ② $p_2 \geq 30$ psig

DETERMINAR: O menor diâmetro padrão, *D*.

SOLUÇÃO:

Δp, L e Q são conhecidos. D é desconhecido, de modo que a iteração é necessária para determinar o menor diâmetro padrão que satisfaça o requisito de queda de pressão para a vazão dada. A máxima queda de pressão admissível no comprimento, L, é

$$\Delta p_{\text{máx}} = p_{1\text{máx}} - p_{2\text{mín}} = (65 - 30) \text{ psi} = 35 \text{ psi}$$

Equações de cálculo:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + g z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2} + g z_2\right) = h_{l_T} \tag{8.29}$$

$$h_{l_T} = h_l + h_{l_m} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}_2^2}{2} \qquad (h_{l_m} = 0(3))$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) $h_{l_T} = h_l$, i.e., $h_{l_m} = 0$
(4) $z_1 = z_2$
(5) $\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}$; $\alpha_1 \simeq \alpha_2$

Então

$$\Delta p = p_1 - p_2 = f \frac{L}{D} \frac{\rho \bar{V}^2}{2}$$

Como diâmetros serão admitidos por tentativa, é conveniente substituir $\bar{V} = Q/A = 4Q/\pi D^2$, de modo que

$$\Delta p = f \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2 = \frac{8 f L \rho Q^2}{\pi^2 D^5} \tag{1}$$

O número de Reynolds é necessário para determinar *f*. Em termos de *Q*,

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D^2} \frac{D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi \nu D}$$

Finalmente, Q deve ser convertido para pés cúbicos por segundo.

$$Q = 1{,}500\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48\ \text{gal}} = 3{,}34\ \text{pé}^3/\text{s}$$

Como estimativa inicial, admita um diâmetro nominal do tubo de 4 pol. (d.i. de 4,026 pol.):

$$Re = \frac{4Q}{\pi \nu D} = \frac{4}{\pi} \times 3{,}34\ \frac{\text{pé}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1{,}21 \times 10^{-5}\ \text{pé}^2} \times \frac{1}{4{,}026\ \text{pol.}} \times 12\ \frac{\text{pol.}}{\text{pé}} = 1{,}06 \times 10^6$$

Para tubos trefilados, $e = 5 \times 10^{-6}$ pé (Tabela 8.1) e por conseguinte $e/D = 1{,}5 \times 10^{-5}$, de modo que $f \simeq 0{,}012$ (Fig. 8.13) e

$$\Delta p = \frac{8fL\rho Q^2}{\pi^2 D^5} = \frac{8}{\pi^2} \times 0{,}012 \times 500\ \text{pés} \times 1{,}94\ \frac{\text{slug}}{\text{pé}^3} \times (3{,}34)^2\ \frac{\text{pé}^6}{\text{s}^2}$$

$$\times \frac{1}{(4{,}026)^5\ \text{pol.}^5} \times 1728\ \frac{\text{pol.}^3}{\text{pé}^3} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}}$$

$$\Delta p = 172\ \text{lbf/pol.}^2 > \Delta p_{\text{máx}}$$

Como essa queda de pressão é grande demais, admitamos $D = 6$ pol., (na verdade d.i. de 6,065 pol.):

$$Re = \frac{4}{\pi} \times 3{,}34\ \frac{\text{pé}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1{,}21 \times 10^{-5}\ \text{pé}^2} \times \frac{1}{6{,}065\ \text{pol.}} \times 12\ \frac{\text{pol.}}{\text{pé}} = 6{,}95 \times 10^5$$

Para tubo trefilado com $D = 6$ pol., $e/D = 1{,}0 \times 10^{-5}$, de modo que $f \simeq 0{,}013$ (Fig. 8.13) e

$$\Delta p = \frac{8}{\pi^2} \times 0{,}013 \times 500\ \text{pés} \times 1{,}94\ \frac{\text{slug}}{\text{pé}^3} \times (3{,}34)^2\ \frac{\text{pé}^6}{\text{s}^2}$$

$$\times \frac{1}{(6{,}065)^5\ \text{pol.}^5} \times (12)^3\ \frac{\text{pol.}^3}{\text{pé}^3} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}}$$

$$\Delta p = 24{,}0\ \text{lbf/pol.}^2 < \Delta p_{\text{máx}}$$

Como esse valor é menor do que a queda de pressão permitida, devemos verificar para um tubo de 5 pol. de diâmetro nominal com um diâmetro interno real de 5,047 pol.,

$$Re = \frac{4}{\pi} \times 3{,}34\ \frac{\text{pé}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1{,}21 \times 10^{-5}\ \text{pé}^2} \times \frac{1}{5{,}047\ \text{pol.}} \times 12\ \frac{\text{pol.}}{\text{pé}} = 8{,}36 \times 10^5$$

Para tubo trefilado com $D = 5$ pol., $e/D = 1{,}2 \times 10^{-5}$, de modo que $f \simeq 0{,}012$ (Fig. 8.13) e

$$\Delta p = \frac{8}{\pi^2} \times 0{,}012 \times 500\ \text{pés} \times 1{,}94\ \frac{\text{slug}}{\text{pé}^3} \times (3{,}34)^2\ \frac{\text{pé}^6}{\text{s}^2}$$

$$\times \frac{1}{(5{,}047)^5\ \text{pol.}^5} \times (12)^3\ \frac{\text{pol.}^3}{\text{pé}^3} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}}$$

$$\Delta p = 55{,}5\ \text{lbf/pol.}^2 > \Delta p_{\text{máx}}$$

Assim, o critério da queda de pressão é satisfeito para um diâmetro nominal mínimo de 6 pol. $\longleftarrow$ D

Esse problema ilustra o procedimento para resolver problemas de escoamento em tubos quando o diâmetro é desconhecido. Note, da Eq. 1, que a queda de pressão no escoamento turbulento é proporcional à f/D^5. A variação de f é pequena, de modo que Δp é aproximadamente proporcional à $1/D^5$, para vazão constante.

Resolvemos os Problemas-Exemplo 8.7 e 8.8 por iteração direta. Diversos diagramas especializados de fator de atrito versus número de Reynolds têm sido introduzidos para resolver problemas desse tipo sem a necessidade de iteração. Para exemplos desses diagramas especializados, veja [21] e [22].

Os Problemas-Exemplo 8.9 e 8.10 ilustram a avaliação dos coeficientes de perdas localizadas e a aplicação de um difusor para reduzir a energia cinética de saída num sistema de escoamento.

EXEMPLO 8.9 — Cálculo do Coeficiente de Perda em Entrada

A referência [23] relata resultados de medições feitas para determinar as perdas de entrada no escoamento de um reservatório para um tubo com diversos graus de arredondamento da entrada. Um tubo de cobre com 10 pés de comprimento e diâmetro interno de 1,5 pol. foi utilizado nos testes. O tubo descarregava para a atmosfera. Para uma entrada de bordas vivas, a vazão de 0,566 pé3/s foi medida quando o nível do reservatório estava 85,1 pés acima da linha de centro do tubo. A partir desses dados, avalie o coeficiente de perda para uma entrada com bordas vivas.

PROBLEMA-EXEMPLO 8.9

DADOS: Tubo com entrada de bordas vivas, descarregando de um reservatório conforme mostrado.

DETERMINAR: K_{entrada}.

SOLUÇÃO:

Apliquemos a equação da energia para escoamento permanente e incompressível.

Equações de cálculo:

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2} + g z_2 + h_{l_T}$$

$$h_{l_T} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}_2^2}{2} + K_{\text{entrada}} \frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

Considerações: (1) $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$

(2) $\bar{V}_1 \approx 0$

Substituindo para h_{l_T}, e dividindo por g, resulta $z_1 = h = \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + K_{\text{entrada}} \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$

ou

$$K_{\text{entrada}} = \frac{2gh}{\bar{V}_2^2} - f \frac{L}{D} - \alpha_2 \qquad (1)$$

A velocidade média é

$$\bar{V}_2 = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\bar{V}_2 = \frac{4}{\pi} \times 0{,}566 \frac{\text{pé}^3}{\text{s}} \times \frac{1}{(1{,}5)^2 \text{ pol.}^2} \times 144 \frac{\text{pol.}^2}{\text{pé}^2} = 46{,}1 \text{ pé/s}$$

Admita $T = 70°\text{F}$, de modo que $\nu = 1{,}05 \times 10^{-5}$ pé²/s (Tabela A.7). Então

$$Re = \frac{\bar{V}D}{\nu} = 46{,}1 \frac{\text{pé}}{\text{s}} \times 1{,}5 \text{ pol.} \times \frac{\text{s}}{1{,}05 \times 10^{-5} \text{ pé}^2} \times \frac{\text{pé}}{12 \text{ pol.}} = 5{,}49 \times 10^5$$

Para tubo trefilado, $e = 5 \times 10^{-6}$ pés (Tabela 8.1), de modo que $e/D = 0{,}00004$ e $f = 0{,}013$ (Fig. 8.13). Da Eq. 8.23, $n = 8{,}7$, portanto

$$\frac{\bar{V}}{U} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} = 0{,}848 \qquad (8.24)$$

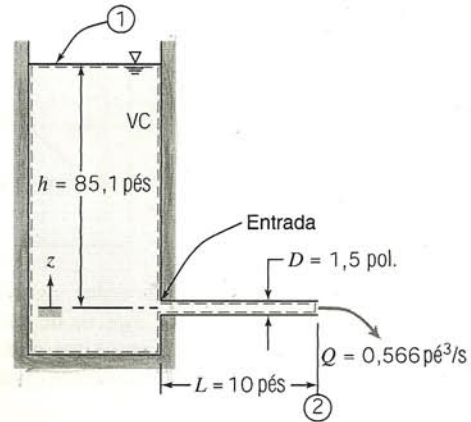
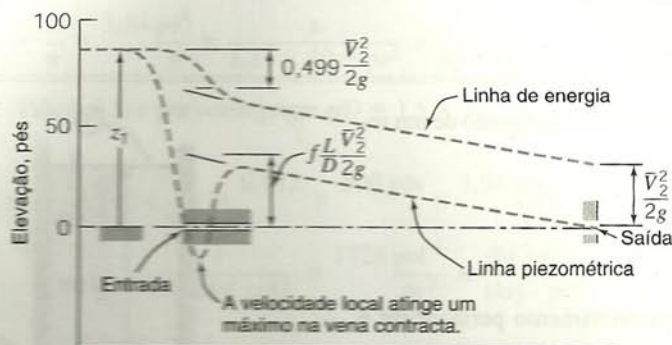
e

$$\alpha = \left(\frac{U}{\bar{V}}\right)^3 \frac{2n^2}{(3+n)(3+2n)} = 1{,}04 \qquad (8.27)$$

Substituindo na Eq. 1, obtemos

$$K_{\text{entrada}} = 2 \times 32{,}2 \frac{\text{pé}}{\text{s}^2} \times 85{,}1 \text{ pés} \times \frac{\text{s}^2}{(46{,}1)^2 \text{ pé}^2} - (0{,}013) \frac{10 \text{ pé}}{1{,}5 \text{ pol.}} \times 12 \frac{\text{pol.}}{\text{pé}} - 1{,}04$$

$$K_{\text{entrada}} = 0{,}499$$

K_{entrada}

Esse coeficiente concorda bem com aquele mostrado na Tabela 8.2. As linhas de energia e piezométrica são mostradas a seguir. A grande perda de carga numa entrada com bordas vivas é devida essencialmente à separação na borda viva e à formação de uma vena contracta imediatamente à jusante da quina. A área de escoamento efetiva atinge um mínimo na vena contracta de forma que a velocidade é máxima ali. O escoamento expande-se novamente após a vena contracta para preencher o tubo. A expansão não controlada após a vena contracta é responsável pela maior parte da perda de carga. (Veja o Problema-Exemplo 8.12.)

O arredondamento das bordas da entrada reduz significativamente a extensão da separação. Isso reduz o aumento de velocidade através da vena contracta e, conseqüentemente, reduz a perda de carga devida na entrada. Uma entrada "bem arredondada" quase elimina a separação do escoamento; a configuração do escoamento aproxima-se daquele mostrado na Fig. 8.1. A perda de carga adicional numa entrada bem arredondada comparada com o escoamento completamente desenvolvido é o resultado de maiores tensões de cisalhamento na parede no comprimento de entrada.

EXEMPLO 8.10 — Emprego de Difusor para Aumentar Vazão

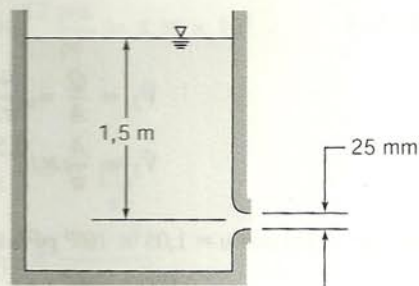
Direitos sobre a água, concedidos a cada cidadão pelo Imperador de Roma, davam permissão para instalar no distribuidor público principal de água um bocal tubular circular de bronze, calibrado [24]. Alguns cidadãos eram espertos o suficiente para tirar vantagens de uma lei que regulava vazão por esse método indireto. Eles instalavam difusores nas descargas dos bocais para aumentar suas vazões. Admita que a altura de carga estática disponível no distribuidor principal fosse $z_0 = 1{,}5$ m e o diâmetro do bocal fosse $D = 25$ mm. (A descarga era para a pressão atmosférica.) Determine o aumento de vazão quando um difusor $N/R_1 = 3{,}0$ e $AR = 2{,}0$ estivesse instalado na extremidade do bocal.

PROBLEMA-EXEMPLO 8.10

DADOS: Bocal instalado no distribuidor principal de água, conforme mostrado.

DETERMINAR: O aumento de vazão quando um difusor com $N/R_1 = 3{,}0$ e $AR = 2{,}0$ fosse instalado.

SOLUÇÃO:

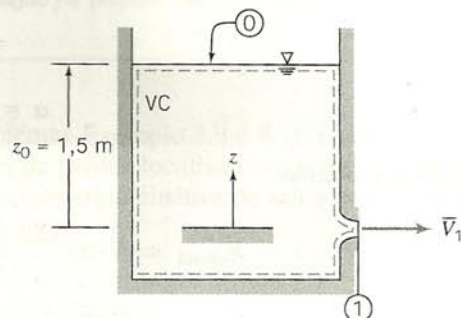
Apliquemos a equação da energia para escoamento permanente, incompressível.

Equação de cálculo:

$$\frac{p_0}{\rho} + \alpha_0\frac{\bar{V}_0^2}{2} + gz_0 = \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1 + h_{l_T} \quad (8.29)$$

Considerações: (1) $\bar{V}_0 \approx 0$
(2) $\alpha_1 \approx 1$

Para o bocal apenas,

$$\cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \cancel{\alpha_0\frac{\bar{V}_0^2}{2}}^{\approx 0(1)} + gz_0 = \cancel{\frac{p_1}{\rho}} + \cancel{\alpha_1}^{\approx 1(2)}\frac{\bar{V}_1^2}{2} + \cancel{gz_1}^{=0} + h_{l_T}$$

$$h_{l_T} = K_{\text{entrada}}\frac{\bar{V}_1^2}{2} \approx 0{,}04\frac{\bar{V}_1^2}{2} \qquad \text{(da Tabela 8.2)}$$

Assim,

$$gz_0 = \frac{\bar{V}_1^2}{2} + 0{,}04\frac{\bar{V}_1^2}{2} = 1{,}04\frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

$$\bar{V}_1 = \sqrt{\frac{2gz_0}{1{,}04}} = \sqrt{\frac{2}{1{,}04} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1{,}5\text{ m}} = 5{,}32\text{ m/s}$$

$$Q = \bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_1 \frac{\pi D^2}{4} = 5{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\pi}{4} \times (0{,}025)^2\text{ m}^2 = 0{,}00261\text{ m}^3/\text{s} \qquad \longleftarrow Q$$

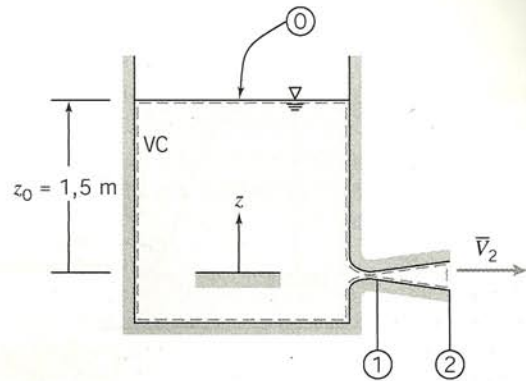
Para o bocal com o difusor instalado,

$$\frac{p_0}{\rho} + \alpha_0\frac{\bar{V}_0^2}{2} + gz_0 = \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2 + h_{l_T}$$

(com $p_0 \approx 0(1)$, $\bar{V}_0 \approx 0$, $p_2 \approx 1(2)$, $\alpha_2 \approx 1$, $z_2 = 0$)

$$h_{l_T} = K_{\text{entrada}}\frac{\bar{V}_1^2}{2} + K_{\text{difusor}}\frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

ou

$$gz_0 = \frac{\bar{V}_2^2}{2} + \left(K_{\text{entrada}} + K_{\text{difusor}}\right)\frac{\bar{V}_1^2}{2} \qquad (1)$$

A Fig. 8.16 fornece dados para $C_p = \dfrac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}_1^2}$ para difusores. Para obter K_{difusor}, apliquemos a equação da energia de ① a ②.

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2 + K_{\text{difusor}}\frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

Resolvendo, com $\alpha_2 \approx 1$, obtemos

$$K_{\text{difusor}} = 1 - \frac{\bar{V}_2^2}{\bar{V}_1^2} - \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}_1^2} = 1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - C_p = 1 - \frac{1}{(AR)^2} - C_p$$

onde, da continuidade, $\bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_2 A_2$. Da Fig. 8.16, $C_p = 0{,}45$, logo

$$K_{\text{difusor}} = 1 - \frac{1}{(2{,}0)^2} - 0{,}45 = 0{,}75 - 0{,}45 = 0{,}3$$

Dessa maneira, substituindo na Eq. 1,

$$gz_0 = \frac{\bar{V}_2^2}{2} + (0{,}04 + 0{,}30)\frac{\bar{V}_1^2}{2} = \frac{\bar{V}_1^2}{2}\left[\frac{1}{(AR)^2} + 0{,}34\right] = 0{,}59\frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

Para esse sistema

$$\bar{V}_1 = \sqrt{\frac{2gz_0}{0{,}59}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}59} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1{,}5\text{ m}} = 7{,}06\text{ m/s}$$

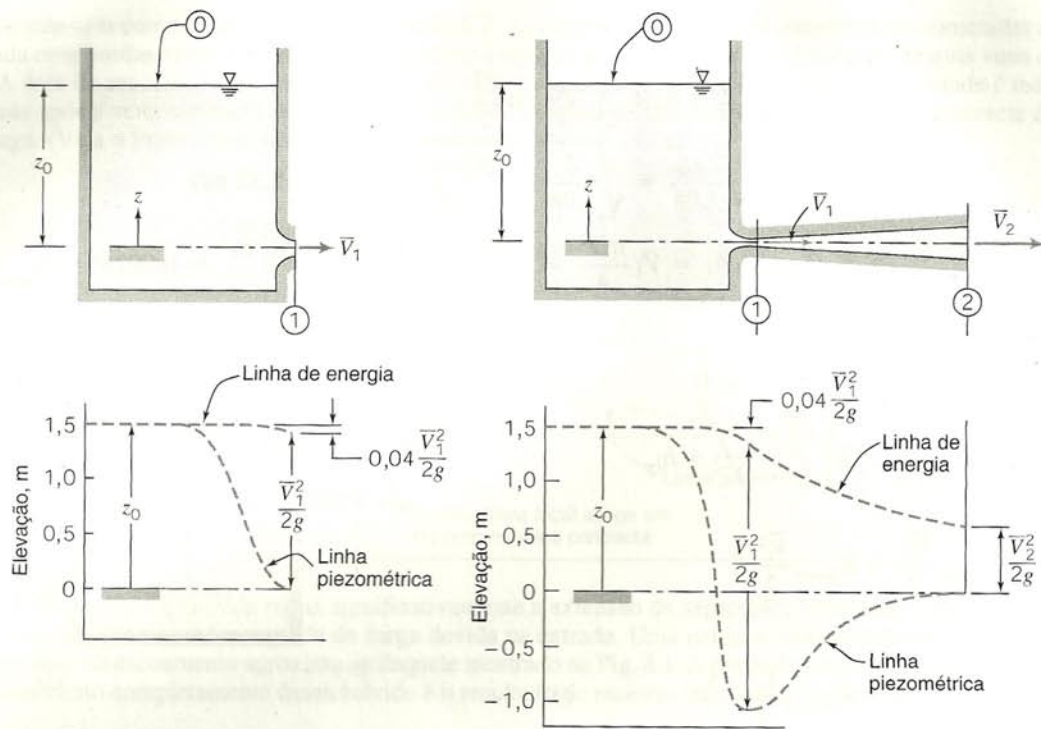
e

$$Q_d = \bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_1\frac{\pi D^2}{4} = 7{,}06\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\pi}{4} \times (0{,}025)^2\text{ m}^2 = 0{,}00347\text{ m}^3/\text{s} \qquad \longleftarrow Q_d$$

O aumento de vazão que resulta da adição de um difusor é

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{Q_d - Q}{Q} = \frac{Q_d}{Q} - 1 = \frac{0{,}00347}{0{,}00261} - 1 = 0{,}330 \quad \text{ou} \quad 33 \text{ por cento} \qquad \longleftarrow \frac{\Delta Q}{Q}$$

A adição do difusor aumenta a vazão através do bocal significativamente. O difusor descarrega para a pressão atmosférica; o aumento de pressão no difusor reduz, assim, a pressão no plano de saída do bocal causando o aumento de vazão.

As linhas de energia e piezométrica estão esboçadas nas figuras a seguir — aproximadamente em escala — para o bocal apenas e para a combinação bocal-difusor. O bocal sozinho descarrega para a pressão atmosférica, de modo que a linha piezométrica cai para cota zero na saída do bocal. A única perda no bocal é 0,04 vez a altura de carga devida à velocidade, de modo que a elevação da linha de energia decresce levemente, conforme mostrado.

A pressão hidrostática no plano de saída do bocal é reduzida abaixo da atmosférica pelo difusor. Conforme mostrado no esboço, a pressão aumenta através do difusor até a pressão atmosférica no plano de descarga. Com uma razão de área igual a 2, a velocidade média é reduzida por um fator 2 e a energia cinética na saída do difusor é um quarto do valor na entrada.

A linha de energia cai de 0,04 vez a altura de carga de velocidade de entrada no plano de saída do bocal. O difusor introduz uma perda adicional, $K_{difusor} = 0{,}3$, que faz cair ainda mais o nível da linha de energia.

O Comissário de Águas Frontinus padronizou condições para todos os romanos no ano 97 d.C. Ele exigiu que o tubo conectado ao bocal do tubo distribuidor de água para cada cidadão tivesse o mesmo diâmetro por pelo menos 50 pés lineares, contados a partir do distribuidor público principal (veja o Problema 8.121).

8.8.2 Bombas em Sistemas de Fluido

Em cada um dos muitos exemplos de escoamento em tubos que temos tratado, a força motriz causadora do movimento do fluido foi explicitamente estabelecida como sendo uma diferença de pressão ou uma diferença de elevação. Em muitas situações práticas de escoamento de fluidos, a força motriz é suprida por uma bomba (no caso de líquidos) ou por um ventilador ou soprador (no caso de gases). Conforme ilustrado pela bomba do Problema-Exemplo 8.6, essas máquinas aumentam a energia mecânica do fluido.

Uma expressão para o aumento da energia mecânica do fluido pode ser obtida a partir da aplicação da primeira lei da termodinâmica através da bomba

$$\dot{W}_{bomba} = \dot{m}\left[\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz\right)_{descarga} - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz\right)_{sucção}\right]$$

A energia por unidade de massa adicionada pela bomba é portanto

$$\Delta h_{bomba} = \frac{\dot{W}_{bomba}}{\dot{m}} = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz\right)_{descarga} - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\bar{V}^2}{2} + gz\right)_{sucção} \quad (8.47)$$

Na aplicação da primeira lei da termodinâmica a um sistema fluido que inclui uma bomba, a energia por unidade de massa, Δh_{bomba}, deve ser incluída como uma entrada de energia. A Eq. 8.29 é modificada para dar a equação de cálculo para tal sistema

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) + \Delta h_{bomba} = h_{l_T} \quad (8.48)$$

Um sistema fluido, definido como a combinação de uma máquina de fluxo e uma rede de tubos ou canais que transportam um fluido, irá operar na combinação de perda de carga e vazão para a qual o desempenho da máquina encaixa-se perfeitamente com as necessidades do sistema. A perda de carga total, h_{l_T}, é uma função da vazão. A altura adicionada pela bomba, Δh_{bomba}, assim como a perda de carga, é uma função da vazão de descarga da bomba. A curva de pressão-vazão do sistema e a curva de altura-vazão da bomba são resolvidas simultaneamente para definir o ponto de operação da bomba e do sistema. Detalhes de características de bombas e de seleção e operação de bombas em sistemas fluidos são tratados no Cap. 10.

*8.8.3 Sistemas de Trajetórias Múltiplas

Em muitas situações práticas, como abastecimento d'água e sistemas de proteção contra incêndios, redes complexas de tubula-

* Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

ções devem ser analisadas. As técnicas básicas desenvolvidas na Seção 8.8.1 também podem ser usadas na análise de sistemas de múltiplas trajetórias. O procedimento é análogo ao da resolução de circuitos elétricos de corrente contínua, porém com elementos não lineares. O sistema de tubos representativo mostrado na Fig. 8.18 tem dois nós, denominados A e B, e três ramais. A vazão total entrando no sistema deve ser distribuída entre os ramais. Conseqüentemente, a vazão através de cada ramal é desconhecida. No entanto, a queda de pressão para cada ramal é a mesma, $p_A - p_B$. Essa informação é suficiente para permitir uma solução iterativa para a vazão em cada ramal.

A vazão do fluido e a queda de pressão são, respectivamente, análogas à corrente e à tensão num circuito elétrico. Todavia, a relação linear simples entre tensão e corrente dada pela lei de Ohm não se aplica ao sistema de escoamento fluido. Em vez disso, a queda de pressão é aproximadamente proporcional ao quadrado da vazão. Essa não linearidade torna necessária a solução iterativa, e os cálculos resultantes podem ser bastante extensos. Diversos esquemas foram desenvolvidos para uso em computadores digitais. Para um exemplo, veja [25].

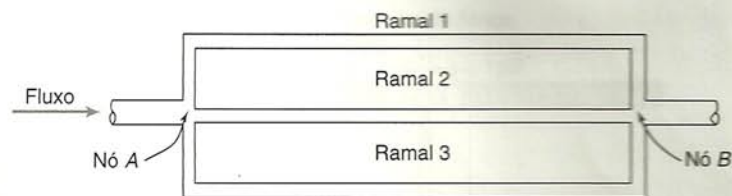



Fig. 8.18 Sistema de escoamento simples de tubo de trajetórias múltiplas.

PARTE C
MEDIÇÃO DE VAZÃO

A escolha de um medidor de vazão é influenciada pela precisão exigida, faixa de medida, custo, complicações, facilidade de leitura ou de redução de dados e tempo de vida em serviço. O dispositivo mais simples e barato que forneça a precisão desejada deve ser escolhido.

8.9 MÉTODOS DIRETOS

Tanques podem ser empregados para determinar vazão de líquidos em escoamentos permanentes pela medição do volume ou da massa coletada durante um intervalo de tempo conhecido. Se o intervalo for longo o suficiente para ser medido com precisão, as vazões também poderão ser determinadas com precisão.

A compressibilidade deve ser considerada nas medições de volume em escoamentos de gases. As massas específicas dos gases são em geral muito pequenas para permitirem a medição direta, com precisão, da vazão em massa. Contudo, uma amostra de volume pode às vezes ser coletada pelo deslocamento de um "sino", ou vaso invertido sobre água (se a pressão for mantida constante por meio de contrapesos). Se as medições de volume ou de massa forem cuidadosamente organizadas, nenhuma calibração é requerida; essa é uma grande vantagem dos métodos diretos.

Em aplicações especializadas, particularmente em utilizações a distância ou com registro de leituras, os medidores de deslocamento positivo podem ser especificados. Exemplos comuns incluem os medidores residenciais de água e de gás natural, que são calibrados para leitura direta em unidades do produto, ou as bombas medidoras de gasolina, que medem a vazão total e automaticamente calculam o custo. Muitos medidores de deslocamento positivo estão disponíveis no comércio. Consulte a literatura de fabricantes ou as Referências (p. ex., [10]) para projeto e detalhes de instalação.

8.10 MEDIDORES DE VAZÃO DE RESTRIÇÃO PARA ESCOAMENTOS INTERNOS

A maioria dos medidores de restrição para escoamentos internos (exceto o elemento de escoamento laminar, Seção 8.10.4), baseiam-se no princípio da aceleração de uma corrente fluida através de alguma forma de bocal, como mostrado na Fig. 8.19. A separação do escoamento na borda viva da garganta do bocal provoca a formação de uma zona de recirculação, como mostrado pelas linhas tracejadas à jusante do bocal. A corrente principal do escoamento continua a acelerar-se após a garganta formando uma *vena contracta* na seção ② e, em seguida, desacelera-se para preencher o duto. Na vena contracta, a área de escoamento é um mínimo, as linhas de corrente são essencialmente retilíneas e a pressão é uniforme através da seção do canal.

A vazão teórica pode ser relacionada com o diferencial de pressão entre as seções ① e ② pela aplicação das equações da continuidade e de Bernoulli. Em seguida, fatores de correção empíricos podem ser aplicados para se obter a vazão real.

Equações básicas:

$$0 = \cancelto{0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + \cancel{gz_1} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{gz_2} \qquad (6.9)$$

Considerações:
(1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(4) Não há atrito
(5) Velocidade uniforme nas seções ① e ②
(6) Não há curvatura nas linhas de corrente nas seções ① e ②, logo a pressão é uniforme ao longo dessas seções
(7) $z_1 = z_2$

Então, da equação de Bernoulli,

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho V_2^2}{2}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2\right]$$

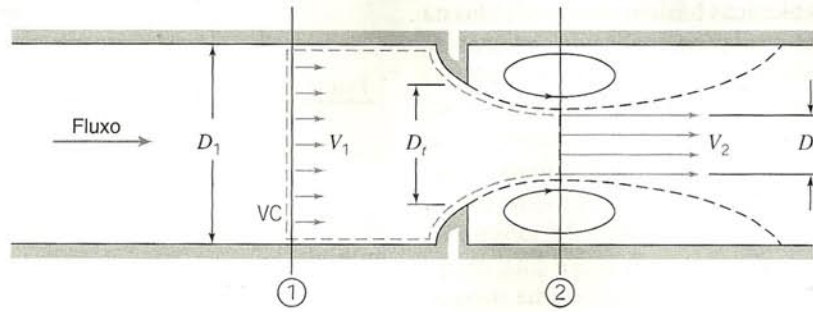



Fig. 8.19 Escoamento interno através de um bocal genérico mostrando o volume de controle usado para análise.

e da continuidade

$$0 = \{-|\rho V_1 A_1|\} + \{|\rho V_2 A_2|\}$$

ou

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \text{então} \quad \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2$$

Substituindo dá

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho V_2^2}{2}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$

Resolvendo para a velocidade teórica, V_2,

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}} \qquad (8.49)$$

A vazão em massa teórica é dada então por

$$\dot{m}_{\text{teórico}} = \rho V_2 A_2 = \rho\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}\, A_2$$

ou

$$\dot{m}_{\text{teórico}} = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}}\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \qquad (8.50)$$

A Eq. 8.50 mostra a relação geral entre vazão em massa e queda de pressão para um medidor de restrição: a vazão em massa é proporcional à raiz quadrada da diferença de pressão entre as tomadas do medidor. Essa relação limita as vazões que podem ser medidas com precisão a uma faixa de 4:1 aproximadamente.

Diversos fatores limitam a utilidade da Eq. 8.50 para o cálculo da vazão em massa real através de um medidor. A área de escoamento real na seção ② é desconhecida quando a vena contracta é pronunciada (p. ex., em placas de orifício, quando D_t é uma pequena fração de D_1). Os perfis de velocidade aproximam-se do escoamento uniforme somente para números de Reynolds muito grandes. Os efeitos de atrito podem tornar-se importantes (especialmente à jusante do medidor) quando os contornos do medidor são abruptos. Finalmente, a localização das tomadas de pressão influencia a leitura da pressão diferencial.

A equação teórica é ajustada para o número de Reynolds e a razão de diâmetros pela definição de um *coeficiente de descarga* empírico tal que

$$\dot{m}_{\text{real}} = \frac{C A_t}{\sqrt{1 - (A_t/A_1)^2}}\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \qquad (8.51)$$

Fazendo $\beta = D_t/D_1$, então $(A_t/A_1)^2 = (D_t/D_1)^4 = \beta^4$, logo

$$\dot{m}_{\text{real}} = \frac{C A_t}{\sqrt{1 - \beta^4}}\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \qquad (8.52)$$

Na Eq. 8.52, $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^4}}$ é o *fator de velocidade de aproximação.*

O coeficiente de descarga e o fator de velocidade de aproximação são freqüentemente combinados num único *coeficiente de vazão*,

$$K \equiv \frac{C}{\sqrt{1 - \beta^4}} \qquad (8.53)$$

Em termos do coeficiente de vazão, a vazão em massa real é expressa como

$$\dot{m}_{\text{real}} = K A_t \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \qquad (8.54)$$

Para medidores padronizados, dados de testes [10, 26] têm sido usados no desenvolvimento de equações empíricas que prevêem os coeficientes de descarga e de vazão a partir do furo do medidor, do diâmetro do tubo e do número de Reynolds. A precisão das equações (dentro de faixas especificadas) é usualmente adequada, de forma que os medidores podem ser empregados sem calibração. Se o número de Reynolds, o diâmetro do tubo ou o diâmetro do furo estiverem fora da faixa especificada da equação, os coeficientes deverão ser medidos experimentalmente.

Para o regime de escoamento turbulento (número de Reynolds no tubo maior que 4000) o coeficiente de descarga pode ser expresso por uma equação da forma [10]

$$C = C_\infty + \frac{b}{Re_{D_1}^n} \qquad (8.55)$$

A forma correspondente da equação do coeficiente de vazão é

$$K = K_\infty + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^4}}\frac{b}{Re_{D_1}^n} \qquad (8.56)$$

Nas Eqs. 8.55 e 8.56, o subscrito ∞ denota o coeficiente para número de Reynolds infinito; as constantes b e n permitem o transporte para números de Reynolds finitos. Equações de correlação e

curvas de coeficientes *versus* números de Reynolds são dadas para elementos medidores específicos nas três próximas subseções, logo após uma comparação geral das características desses medidores.

Como já observamos, a seleção de um medidor depende de fatores como custo, precisão, necessidade de calibração e facilidade de instalação e manutenção. Alguns desses fatores são comparados para medidores de placa de orifício, de bocal e de venturi, na Tabela 8.6.

Os coeficientes de medidores de vazão apresentados na literatura foram medidos com distribuições de velocidades turbulentas, completamente desenvolvidas na entrada do medidor (Seção ①). Se um medidor deve ser instalado à jusante de uma válvula, cotovelo ou outro elemento perturbador, um trecho de tubo reto deve ser colocado na frente do medidor. Aproximadamente 10 diâmetros de tubo reto são necessários para medidores de venturi e até 40 diâmetros para medidores de placa de orifício ou de bocal. Quando um medidor de vazão é instalado corretamente, a vazão pode ser calculada com as Eqs. 8.52 ou 8.54, após escolher um valor apropriado para o coeficiente de descarga empírico, C, ou para o coeficiente de vazão, K, definidos nas Eqs. 8.51 e 8.53, respectivamente. Alguns dados de projeto para o escoamento incompressível são apresentados nas seções seguintes. Os mesmos métodos básicos podem ser estendidos para escoamentos compressíveis, mas estes não serão abordados aqui. Para detalhes completos, consulte [10] ou [26].

8.10.1 A Placa de Orifício

A placa de orifício (Fig. 8.20) é uma placa fina que pode ser interposta entre flanges de tubos. Como a sua geometria é simples, é de baixo custo e de fácil instalação e reposição. A borda viva do orifício não deve ficar incrustada com depósitos ou matéria em suspensão. Contudo, material em suspensão pode se acumular no lado da entrada de um orifício concêntrico num tubo horizontal; um orifício excêntrico pode ser colocado rente com o fundo do tubo a fim de evitar esse problema. As principais desvantagens do orifício são a sua capacidade limitada e a elevada perda de carga permanente devida à expansão não controlada à jusante do elemento medidor.

As tomadas de pressão para orifícios podem ser colocadas em diversos locais, como mostrado na Fig. 8.20 (consulte [10] ou [26] para detalhes adicionais). Como a localização das tomadas de pressão influencia o coeficiente de vazão empírico, valores

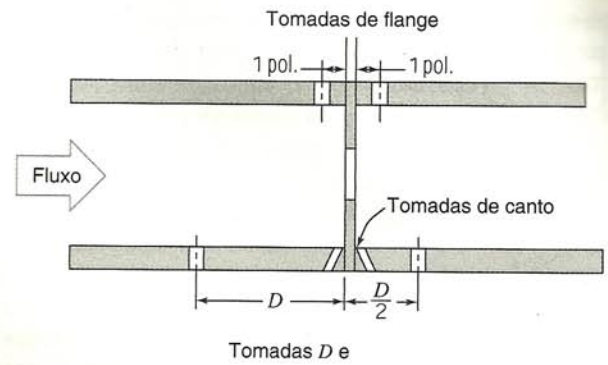



Fig. 8.20 Geometria de orifício e localização de tomadas de pressão [10].

para C ou K consistentes com a localização das tomadas devem ser selecionados de manuais.

A equação de correlação recomendada para um orifício concêntrico com tomadas de canto [10] é

$$C = 0{,}5959 + 0{,}0312\beta^{2,1} - 0{,}184\beta^{8} + \frac{91{,}71\beta^{2,5}}{Re_{D_1}^{0,75}} \tag{8.57}$$

A Eq. 8.57 prediz os coeficientes de descarga com precisão de $\pm 0{,}6$ por cento para $0{,}2 < \beta < 0{,}75$ e $10^4 < Re_{D_1} < 10^7$. Alguns coeficientes de vazão calculados das Eqs. 8.57 e 8.53 são apresentados na Fig. 8.21.

Uma equação de correlação similar é disponível para placas de orifício com tomadas de pressão com D e $D/2$. As tomadas de flange exigem uma correlação diferente para cada diâmetro do tubo. As tomadas de pressão, localizadas a $2\frac{1}{2}$ e $8D$, não são mais recomendadas para trabalhos precisos.

O Problema-Exemplo 8.11, que aparece mais adiante nesta seção, ilustra a aplicação de dados do coeficiente de vazão no dimensionamento de placa de orifício.

8.10.2 O Bocal Medidor de Vazão

Bocais podem ser empregados como elementos medidores tanto em câmaras pressurizadas quanto em dutos, conforme mostrado

Tabela 8.6 Características de Medidores de Vazão de Orifício, de Bocal e de Venturi

Tipo de Medidor de Vazão	Diagrama	Perda de Carga	Custo
Orifício	D_1, D_t, Fluxo	Alta	Baixo
Bocal	D_1, D_2, Fluxo	Intermediária	Intermediário
Venturi	D_1, D_2, Fluxo	Baixa	Alto

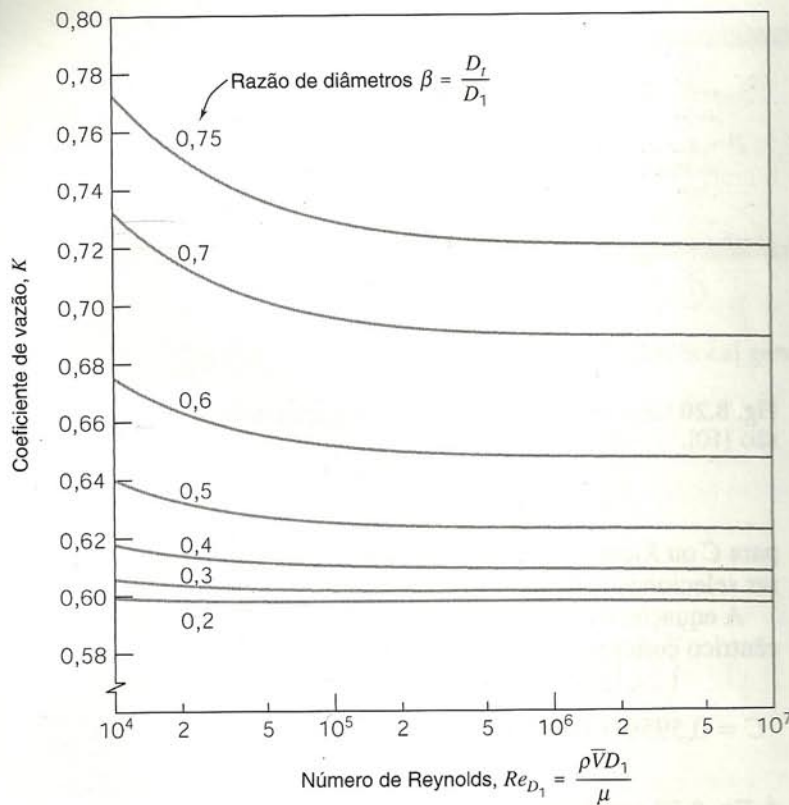



Fig. 8.21 Coeficientes de vazão para orifícios concêntricos com tomadas de canto.

na Fig. 8.22; a seção do bocal é aproximadamente um quarto de elipse. Detalhes de projeto e localizações recomendadas para as tomadas de pressão são dados em [26].

A equação de correlação recomendada para um bocal ASME de raio longo [10] é

$$C = 0{,}9975 - \frac{6{,}53\beta^{0,5}}{Re_{D_1}^{0,5}} \tag{8.58}$$

A Eq. 8.58 prediz coeficientes de descarga para bocais medidores com precisão de $\pm$ 2,0 por cento para $0{,}25 < \beta < 0{,}75$ e $10^4 < Re_{D_1} < 10^7$. Alguns coeficientes de vazão calculados da Eq. 8.58 e da Eq. 8.53 são apresentados na Fig. 8.23. (K pode ser maior do que um quando o fator de velocidade de aproximação excede a unidade.)

a. Instalação no Tubo

Para instalação no tubo, K é uma função de β e de Re_{D_1}. A Fig. 8.23 mostra que K é essencialmente independente do número de Reynolds para $Re_{D_1} > 10^6$. Dessa forma, vazões altas podem ser calculadas diretamente da Eq. 8.54. Para vazões mais baixas, onde K é uma função fraca do número de Reynolds, a iteração pode ser necessária.

b. Instalação em Câmara Pressurizada

Para instalação em câmara pressurizada, os bocais podem ser fabricados de alumínio expandido, fibra de vidro moldada ou outros materiais de baixo custo. Eles são de fabricação e instalação simples e baratas. Como a pressão na câmara é igual a p_2, a localização da tomada de pressão de jusante não é crítica. Medidores adequados a uma ampla faixa de vazões podem ser feitos instalando-se diversos bocais numa câmara de pressão. Para baixas vazões, a maioria deles pode ser bloqueada. Para vazões maiores, mais bocais podem ser usados.

Para os bocais de câmara de pressão $\beta = 0$, que está fora da faixa de aplicação da Eq. 8.56. Coeficientes de vazão típicos estão na faixa $0{,}95 < K < 0{,}99$; os valores maiores aplicam-se para altos números de Reynolds. Dessa forma, a vazão em massa pode ser calculada com erro próximo de ± 2 por cento usando-se a Eq. 8.54 com $K = 0{,}97$.

8.10.3 O Venturi

Os medidores de venturi, como esquematizados na Tabela 8.6, são em geral fundidos e usinados com tolerâncias muito pequenas de modo a reproduzir o desempenho de projeto. Como resultado, os medidores de venturi são pesados, volumosos e caros. A seção do difusor cônico à jusante da garganta dá excelente recuperação de pressão; por conseguinte, a perda de carga total é baixa. Os medidores de venturi são também autolimpantes devido a sua superfície interna lisa.

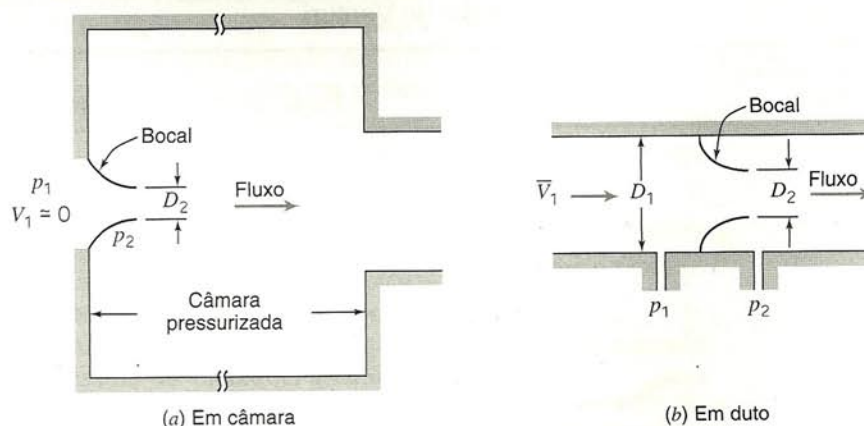



Fig. 8.22 Instalações típicas de bocais medidores.

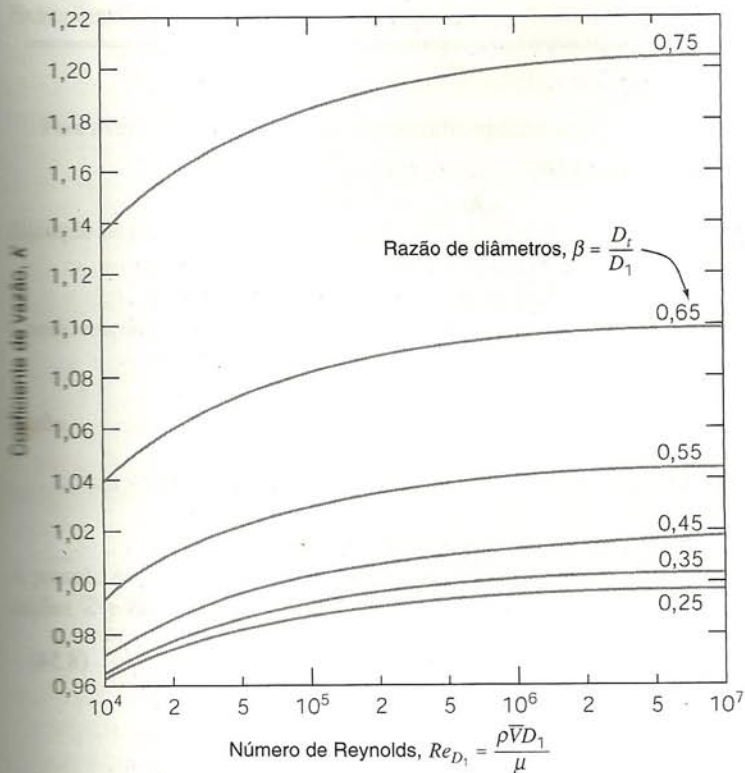



Fig. 8.23 Coeficientes de vazão para bocais ASME de raio longo.

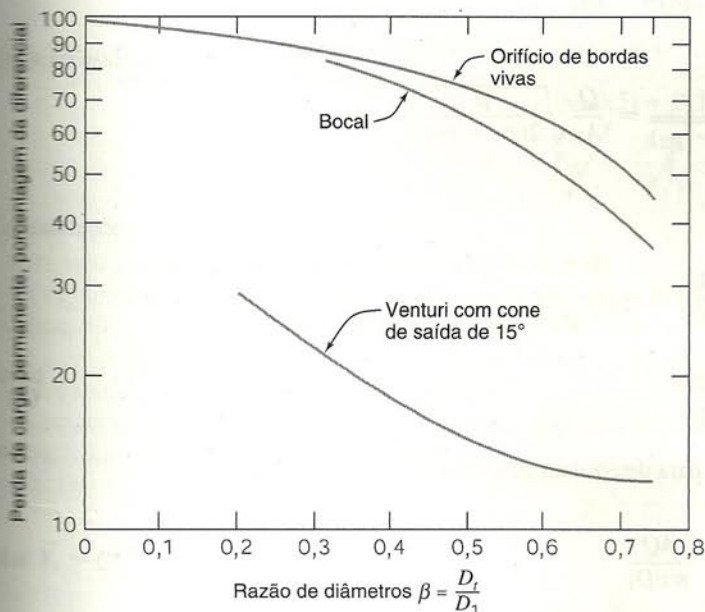



Fig. 8.24 Perda de carga permanente produzida por diversos elementos medidores de vazão [10].

Dados experimentais mostram que os coeficientes de descarga para medidores de venturi variam de 0,980 a 0,995 para números de Reynolds elevados ($Re_{D_1} > 2 \times 10^5$). Por isso, $C = 0{,}99$ pode ser usado para medir a vazão em massa com cerca de $\pm$ 1 por cento de erro, para altos números de Reynolds [10]. A literatura dos fabricantes deve ser consultada para informações específicas relativas a números de Reynolds abaixo de 10^5.

A placa de orifício, o bocal e o venturi, produzem diferenciais de pressão proporcionais ao quadrado da vazão em massa, de acordo com a Eq. 8.54. Na prática, um tamanho de medidor deve ser escolhido de modo a acomodar a maior vazão esperada. Como a relação entre a queda de pressão e a vazão em massa não é linear, a faixa de vazões que pode ser medida precisamente é limitada. Medidores com uma única garganta geralmente são considerados para vazões numa faixa de 4:1 apenas [10].

A perda de carga irrecuperável através de um elemento medidor pode ser expressa como uma fração da pressão diferencial, Δp, através do elemento. As perdas de pressão são apresentadas como funções da razão de diâmetros na Fig. 8.24 [10].

8.10.4 O Elemento Medidor de Escoamento Laminar

O elemento de escoamento laminar[7] é projetado para produzir um diferencial de pressão diretamente proporcional à vazão. O elemento de escoamento laminar (LFE) contém uma seção medidora subdividida em muitas passagens, cada uma pequena o suficiente em diâmetro de modo a assegurar escoamento laminar completamente desenvolvido. Como mostrado na Seção 8.3, a queda de pressão no escoamento laminar em dutos é diretamente proporcional à vazão. Uma vez que a relação entre a queda de pressão e a vazão é linear, o elemento de escoamento laminar (LFE) pode ser empregado com razoável precisão numa faixa de vazão de 10:1. A relação entre a queda de pressão e a vazão para o escoamento laminar também depende da viscosidade, que é uma forte função da temperatura. Portanto, a temperatura do fluido deve ser conhecida para que seja obtida uma medição precisa com um LFE.

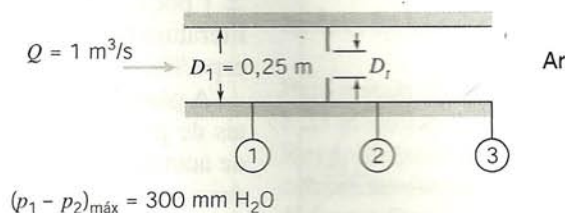
Um elemento de escoamento laminar custa aproximadamente tanto quanto um venturi, porém é muito mais leve e menor. Por isso, o LFE está sendo muito empregado em aplicações onde tamanho reduzido e faixa estendida são importantes.

[7] Patenteado e manufaturado por Meriam Instrument Co., 10920 Madison Ave., Cleveland, Ohio, 44102.

EXEMPLO 8.11 — Escoamento Através de uma Placa de Orifício

Uma vazão de ar de 1 m^3/s nas condições-padrão é esperada em um duto com 0,25 m de diâmetro. Uma placa de orifício é usada para medir a vazão. O manômetro disponível para a medição tem alcance máximo de 300 mm de água. Que diâmetro de orifício deve ser empregado com tomadas de canto? Analise a perda de carga se a área de escoamento na vena contracta for $A_2 = 0{,}65\ A_t$. Compare com os dados da Fig. 8.24.

PROBLEMA-EXEMPLO 8.11

DADOS: Escoamento através de um duto com placa de orifício, conforme mostrado.

DETERMINAR: (a) D_t.
(b) A perda de carga entre as seções ① e ③.
(c) O grau de concordância com os dados da Fig. 8.24.

SOLUÇÃO:

A placa de orifício pode ser projetada usando a Eq. 8.54 e dados da Fig. 8.21.

Equação de cálculo:

$$\dot{m}_{\text{real}} = KA_t\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \tag{8.54}$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível

Como $A_t/A_1 = (D_t/D_1)^2 = \beta^2$,

$$\dot{m}_{\text{real}} = K\beta^2 A_1 \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}$$

ou

$$K\beta^2 = \frac{\dot{m}_{\text{real}}}{A_1\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}} = \frac{\rho Q}{A_1\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}} = \frac{Q}{A_1}\sqrt{\frac{\rho}{2(p_1 - p_2)}}$$

$$= \frac{Q}{A_1}\sqrt{\frac{\rho}{2g\rho_{\text{H}_2\text{O}}\Delta h}}$$

$$= \frac{1\ \text{m}^3}{\text{s}} \times \frac{4}{\pi}\frac{1}{(0{,}25)^2\ \text{m}^2}\left[\frac{1}{2} \times \frac{1{,}23\ \text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{\text{s}^2}{9{,}81\ \text{m}} \times \frac{\text{m}^3}{999\ \text{kg}} \times \frac{1}{0{,}30\ \text{m}}\right]^{1/2}$$

$$K\beta^2 = 0{,}295 \quad \text{ou} \quad K = \frac{0{,}295}{\beta^2} \tag{1}$$

Como K é uma função tanto de β quanto de Re_{D_1}, devemos fazer iterações para determinar β. O número de Reynolds no duto é

$$Re_{D_1} = \frac{\rho\bar{V}_1 D_1}{\mu} = \frac{\rho(Q/A_1)D_1}{\mu} = \frac{4Q}{\pi\nu D_1}$$

$$Re_{D_1} = \frac{4}{\pi} \times \frac{1\ \text{m}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1{,}46 \times 10^{-5}\ \text{m}^2} \times \frac{1}{0{,}25\ \text{m}} = 3{,}49 \times 10^5$$

Suponhamos $\beta = 0{,}75$. Da Fig. 8.21, K deve ser 0,72. Da Eq. 1,

$$K = \frac{0{,}295}{(0{,}75)^2} = 0{,}524$$

Assim, nossa estimativa para β é grande demais. Suponhamos $\beta = 0{,}70$. Da Fig. 8.21, K deve ser 0,69. Da Eq. 1,

$$K = \frac{0{,}295}{(0{,}70)^2} = 0{,}602$$

Assim a nossa estimativa para β ainda é grande demais. Suponhamos $\beta = 0{,}65$. Da Fig. 8.21, K deve ser 0,67. Da Eq. 1,

$$K = \frac{0{,}295}{(0{,}65)^2} = 0{,}698$$

Existe concordância satisfatória com $\beta \simeq 0{,}66$ e

$$D_t = \beta D_1 = 0{,}66(0{,}25 \text{ m}) = 0{,}165 \text{ m} \quad \longleftarrow \quad D_t$$

Para avaliar a perda de carga permanente, apliquemos a Eq. 8.29 entre as seções ① e ③.

Equação de cálculo:

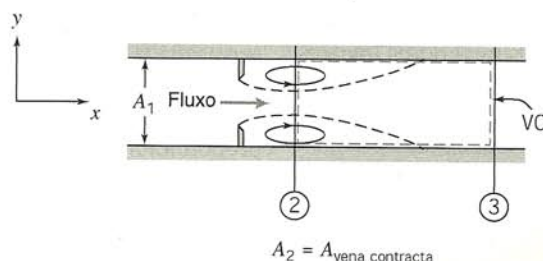
$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + g z_1\right) - \left(\frac{p_3}{\rho} + \alpha_3 \frac{\bar{V}_3^2}{2} + g z_3\right) = h_{l_T} \tag{8.29}$$

Considerações: (3) $\alpha_1 \overline{V}_1^2 = \alpha_3 \overline{V}_3^2$
(4) Δz desprezível

Então,

$$h_{l_T} = \frac{p_1 - p_3}{\rho} = \frac{p_1 - p_2 - (p_3 - p_2)}{\rho} \tag{2}$$

A pressão em ③ pode ser encontrada pela aplicação da componente x da equação da quantidade de movimento a um volume de controle entre as seções ② e ③.

$A_2 = A_{\text{vena contracta}}$

Equação básica:

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho \, d\forall + \int_{SC} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

$= 0(5) = 0(1)$

Considerações: (5) $F_{B_x} = 0$
(6) Escoamento uniforme nas seções ② e ③
(7) Pressão uniforme através do duto nas seções ② e ③
(8) Força de atrito desprezível sobre o VC

Então

$$(p_2 - p_3)A_1 = u_2\{-|\rho \bar{V}_2 A_2|\} + u_3\{|\rho \bar{V}_3 A_3|\} = (u_3 - u_2)\rho Q = (\bar{V}_3 - \bar{V}_2)\rho Q$$

ou

$$p_3 - p_2 = (\bar{V}_2 - \bar{V}_3)\frac{\rho Q}{A_1}$$

Mas $\overline{V}_3 = Q/A_1$, e

$$\bar{V}_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{0{,}65 A_t} = \frac{Q}{0{,}65\beta^2 A_1}$$

Logo

$$p_3 - p_2 = \frac{\rho Q^2}{A_1^2}\left[\frac{1}{0{,}65\beta^2} - 1\right]$$

$$p_3 - p_2 = 1{,}23\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (1)^2\,\frac{\text{m}^6}{\text{s}^2} \times \frac{4^2}{\pi^2}\,\frac{1}{(0{,}25)^4\,\text{m}^4}\left[\frac{1}{0{,}65(0{,}66)^2} - 1\right]\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$p_3 - p_2 = 1290 \text{ N/m}^2$$

A razão de diâmetros, β, foi selecionada para dar uma deflexão máxima no manômetro na vazão máxima. Por conseguinte,

$$p_1 - p_2 = \rho_{H_2O} g \Delta h = 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0{,}30 \text{ m} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} = 2940 \text{ N/m}^2$$

Substituindo na Eq. 2 resulta

$$h_{l_T} = \frac{p_1 - p_3}{\rho} = \frac{p_1 - p_2 - (p_3 - p_2)}{\rho}$$

$$h_{l_T} = \frac{(2940 - 1290)\,\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}^3}{1{,}23\ \text{kg}} = 1340\ \text{N} \cdot \text{m/kg} \qquad h_{l_T}$$

Para comparação com a Fig. 8.24, expressemos a perda de carga permanente como uma fração do diferencial do medidor

$$\frac{p_1 - p_3}{p_1 - p_2} = \frac{(2940 - 1290)\ \text{N/m}^2}{2940\ \text{N/m}^2} = 0{,}561$$

A fração da Fig. 8.24 é de cerca de 0,57. Isso é uma concordância satisfatória!

{ Esse problema ilustra cálculos de medidor de vazão e mostra o emprego da equação da quantidade de movimento no cálculo do aumento de pressão numa expansão súbita. }

8.11 MEDIDORES DE VAZÃO LINEARES

Vários tipos de medidores produzem saídas que são diretamente proporcionais à vazão. Esses instrumentos produzem sinais sem a necessidade de medir a pressão diferencial. Os medidores lineares mais comuns são discutidos brevemente nos parágrafos seguintes.

Medidores de área variável podem ser empregados para indicar diretamente a vazão de líquidos e gases. Um exemplo é mostrado na Fig. 8.25. Em operação, o flutuador dentro do tubo cônico transparente é carregado para cima pelo líquido em escoamento até que a força de arrasto e o peso do flutuador se equilibrem. Tais medidores (comumente chamados de rotâmetros) estão disponíveis com calibração de fábrica para diversos fluidos comuns e diversas faixas de vazão.

Um rotor com palhetas, livre para girar, pode ser montado numa seção cilíndrica de um tubo (Fig. 8.26), constituindo *um medidor de turbina*. Com um projeto adequado, a taxa de rotação do rotor pode ser feita aproximadamente proporcional à vazão em volume numa ampla faixa.

A velocidade de rotação da turbina pode ser medida usando-se um transdutor magnético ou modulado, externo ao medidor. Esse método de medida não requer, portanto, penetrações ou gaxetas no duto. Desse modo, os medidores de turbina podem ser empregados com segurança na medição de vazões de fluidos corrosivos ou tóxicos. O sinal elétrico pode ser mostrado, registrado ou integrado para fornecer informações completas do escoamento.

A esteira de vórtices formada por uma obstrução rombuda pode ser usada para medir vazões. Conforme observado no Cap. 7, o número de Strouhal, $St = fL/V$, é aproximadamente constante ($St \approx 0{,}21$). Desse modo, a freqüência de formação de vórtices, f, é proporcional à velocidade do escoamento. A esteira de vórtices da obstrução acarreta variações de velocidade e pressão em torno e à jusante da obstrução. Sensores de pressão, térmicos ou ultra-sônicos podem ser usados para detectar a freqüência de formação de vórtices e assim inferir a velocidade do fluido. (O perfil de velocidade não afeta a constância da freqüência de vórtices.) Medidores de vórtices podem ser usados numa faixa de vazões de 20:1 [10].

O medidor eletromagnético utiliza o princípio da indução magnética. Um campo magnético é criado transversalmente ao tubo. Quando um fluido condutor passa através do campo, uma tensão elétrica é gerada a ângulos retos em relação aos vetores campo e velocidade. Eletrodos colocados diametralmente opostos são usados para detectar o sinal de tensão resultante. O sinal de tensão é proporcional à velocidade média axial quando o perfil é axissimétrico.

Os medidores magnéticos podem ser usados com líquidos que têm condutividade elétrica acima de 100 microsiemens por metro (1 siemen = 1 ampère por volt). A velocidade mínima de escoamento deve ser superior a 0,3 m/s, mas não há restrições

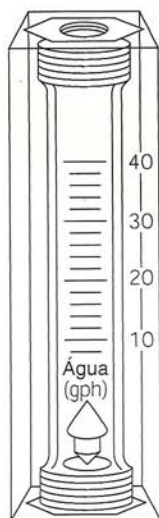



Fig. 8.25 Medidor de vazão do tipo área variável com flutuador. (Cortesia de Dwyer Instrument Co., Michigan City, Indiana.)

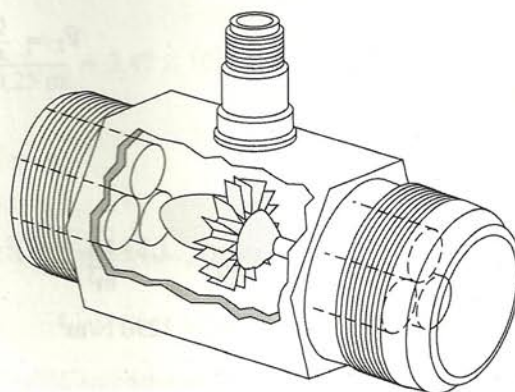



Fig. 8.26 Medidor de vazão de turbina. (Cortesia da Potter Aeronautical Corp., Union, New Jersey.)

quanto ao número de Reynolds. A faixa de vazões normalmente mencionada é de 10:1 [10].

Os medidores ultra-sônicos também respondem à velocidade média numa seção transversal de um tubo. Dois tipos principais de medidores ultra-sônicos são comuns: o tempo de propagação é medido para líquidos limpos, e o deslocamento da freqüência de reflexão (efeito Doppler) é medido para fluidos transportando particulados. A velocidade de uma onda acústica aumenta no sentido do fluxo e decresce quando transmitida contra o fluxo. Para líquidos limpos, uma trajetória acústica inclinada em relação ao eixo do tubo é usada para inferir a velocidade do escoamento. Trajetórias múltiplas são usadas para medir a vazão em volume com precisão.

Os medidores ultra-sônicos de efeito Doppler dependem da reflexão das ondas sonoras (na faixa de MHz) em partículas espalhadas no fluido. Quando as partículas se movem com a velocidade do escoamento, a mudança de freqüência é proporcional à velocidade do fluido; para uma trajetória adequadamente escolhida, o sinal de saída é proporcional à vazão em volume. Um ou dois transdutores podem ser usados e o medidor pode ser fixado na parte externa do tubo. Os medidores ultra-sônicos podem requerer calibração no local. A faixa de vazões é de 10:1 [10].

8.12 MÉTODOS TRANSVERSOS

Em situações tais como no manuseio de ar ou de equipamentos de refrigeração, pode ser impraticável ou impossível instalar medidores fixos. Nesses casos, é possível obter dados de vazão usando técnicas denominadas transversas.

Para fazer uma medição de vazão por esse método, a seção transversal do duto é subdividida em segmentos de áreas iguais. A velocidade é medida no centro de cada segmento de área por meio de um tubo de pitot, um tubo de carga total ou um anemômetro adequado. A vazão em volume para cada segmento é aproximada pelo produto da velocidade medida e pela área do segmento. A vazão em todo o duto é a soma dessas vazões segmentais. Detalhes dos procedimentos recomendados para medições de vazão por esse método são apresentados em [27].

O emprego de tubos de pitot ou de pitot-estática para medições transversas exige acesso direto ao campo de escoamento. Tubos de pitot dão resultados incertos quando gradientes de pressão ou curvatura de linha de corrente estão presentes; além disso, as suas respostas são lentas. Dois tipos de anemômetros — térmicos e de laser Doppler — superam essas dificuldades parcialmente, embora eles introduzam novas complicações.

Os anemômetros térmicos usam elementos diminutos (elementos de fio quente ou de filme quente) que são aquecidos eletricamente. Circuitos eletrônicos sofisticados de retroalimentação são usados para manter constante a temperatura do elemento e medir a taxa de aquecimento. A taxa de aquecimento é relacionada com a velocidade local do escoamento por calibração. A vantagem principal dos anemômetros térmicos é o pequeno tamanho do elemento sensor. Sensores tão pequenos quanto 0,002 mm de diâmetro e 0,1 mm de comprimento estão disponíveis comercialmente. Como a massa térmica desses elementos é extremamente pequena, sua resposta a flutuações na velocidade do escoamento é muito rápida. Freqüências de resposta da ordem de 50 kHz têm sido citadas [28]. Dessa forma, os anemômetros térmicos são ideais para medições de quantidades turbulentas. Revestimentos isolantes podem ser aplicados para permitir o seu emprego em gases e líquidos corrosivos ou condutores.

Por causa da sua resposta rápida e tamanho pequeno, os anemômetros térmicos são usados extensivamente em pesquisas. Numerosos esquemas têm sido publicados para tratamento dos dados resultantes [29]. Técnicas de processamento digital, incluindo rápidas transformadas de Fourier, podem ser aplicadas aos sinais para obter valores e momentos médios, e para analisar conteúdo de freqüência e correlações.

Os anemômetros de laser Doppler (LDAs) estão sendo largamente empregados em aplicações especializadas onde o acesso físico direto ao campo de escoamento é difícil ou impossível. Um ou mais raios laser são focalizados em um pequeno volume no escoamento no local de interesse. A luz laser é espalhada pelas partículas presentes no escoamento (poeira ou particulados) ou ali introduzidas para essa finalidade. Uma mudança de freqüência é causada pela velocidade local do escoamento (efeito Doppler). A luz espalhada e um raio de referência são coletados por receptores óticos. O deslocamento de freqüência é proporcional à velocidade do escoamento; essa relação pode ser calculada, de modo que não há necessidade de calibração. Como a velocidade é medida diretamente, o sinal não é afetado por variações de temperatura, massa específica ou composição no campo de escoamento. As principais desvantagens dos LDAs são que o equipamento ótico é caro e frágil, e que um alinhamento extremamente cuidadoso é requerido.

8.13 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o estudo do Cap. 8, você deverá ser capaz de:

1. Definir:

escoamento interno	coeficiente de energia cinética
comprimento de entrada	coeficiente de quantidade de movimento
escoamento completamente desenvolvido	perda de carga
velocidade de atrito	perdas de carga distribuída e localizada
tensão de Reynolds	diâmetro hidráulico

2. Para escoamentos laminares completamente desenvolvidos, aplicar a formulação de volume de controle da segunda lei de Newton para um volume de controle adequadamente escolhido a fim de determinar: a distribuição de velocidade, a distribuição de tensão de cisalhamento, a vazão em volume, a velocidade média e a localização da velocidade máxima.
3. Para escoamento completamente desenvolvido num tubo, determinar a tensão de cisalhamento na parede e a variação de tensão de cisalhamento no escoamento em termos do gradiente de pressão.
4. Para escoamento turbulento completamente desenvolvido num tubo, com distribuição de velocidade representada por um perfil de lei de potência, determinar $\bar{V}/U$.
5. Escrever a primeira lei da termodinâmica numa forma adequada para a solução de problemas de escoamento em tubos.
6. Usar o diagrama de Moody para determinar o fator de atrito para escoamento completamente desenvolvido num tubo.
7. Resolver problemas de sistema de escoamento em tubos de trajetória única para cada um dos quatro casos discutidos na Seção 8.8.1; esquematizar a distribuição de pressão e as linhas de energia e piezométrica.

*8. Usar as técnicas básicas da Seção 8.8.1 para analisar sistemas de escoamento em tubos de trajetórias múltiplas.
9. Determinar a vazão em massa a partir do diferencial de pressão medido em uma placa de orifício, bocal ou venturi.
10. Resolver os problemas ao final do capítulo relacionados com o material que você estudou.

* Esse objetivo aplica-se a uma seção que pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

REFERÊNCIAS

1. Streeter, V. L., ed., *Handbook of Fluid Dynamics.* New York: McGraw-Hill, 1961.
2. Rouse, H., and S. Ince, *History of Hydraulics.* New York: Dover, 1957.
3. Moin, P., and J. Kim, "Tackling Turbulence with Supercomputers," *Scientific American, 276,* 1, January 1997, pp. 62–68.
4. Panton, R. L., *Incompressible Flow,* 2nd ed. New York: Wiley, 1996.
5. Laufer, J., "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow," U.S. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Technical Report 1174, 1954.
6. Tennekes, H., and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence.* Cambridge, MA: The MIT Press, 1972.
7. Hinze, J. O., *Turbulence,* 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1975.
8. Moody, L. F., "Friction Factors for Pipe Flow," *Transactions of the ASME, 66,* 8, November 1944, pp. 671–684.
9. Colebrook, C. F., "Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws," *Journal of the Institution of Civil Engineers, London, 11,* 1938–39, pp. 133–156.
10. Miller, R. W., *Flow Measurement Engineering Handbook,* 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1996.
11. Swamee, P. K., and A. K. Jain, "Explicit Equations for Pipe-Flow Problems," *Proceedings of the ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 102,* HY5, May 1976, pp. 657–664.
12. "Flow of Fluids through Valves, Fittings, and Pipe," New York: Crane Company, Technical Paper No. 410, 1982.
13. *ASHRAE Handbook—Fundamentals.* Atlanta, GA: American Society of Heating, Refrigerating, and Air Conditioning Engineers, Inc., 1981.
14. Cockrell, D. J., and C. I. Bradley, "The Response of Diffusers to Flow Conditions at Their Inlet," Paper No. 5, *Symposium on Internal Flows,* University of Salford, Salford, England, April 1971, pp. A32–A41.
15. Sovran, G., and E. D. Klomp, "Experimentally Determined Optimum Geometries for Rectilinear Diffusers with Rectangular, Conical, or Annular Cross-Sections," in *Fluid Mechanics of Internal Flows,* G. Sovran, ed. Amsterdam: Elsevier, 1967.
16. Feiereisen, W. J., R. W. Fox, and A. T. McDonald, "An Experimental Investigation of Incompressible Flow without Swirl in R-Radial Diffusers," Proceedings, Second International Japan Society of Mechanical Engineers Symposium on Fluid Machinery and Fluidics, Tokyo, Japan, September 4–9, 1972, pp. 81–90.
17. McDonald, A. T., and R. W. Fox, "An Experimental Investigation of Incompressible Flow in Conical Diffusers," *International Journal of Mechanical Sciences, 8,* 2, February 1966, pp. 125–139.
18. Runstadler, P. W., Jr., "Diffuser Data Book," Hanover, NH: Creare, Inc., Technical Note 186, 1975.
19. Reneau, L. R., J. P. Johnston, and S. J. Kline, "Performance and Design of Straight, Two-Dimensional Diffusers," *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, 89D,* 1, March 1967, pp. 141–150.
20. *Aerospace Applied Thermodynamics Manual.* New York: Society of Automotive Engineers, 1969.
21. Daily, J. W., and D. R. F. Harleman, *Fluid Dynamics.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
22. White, F. M., *Fluid Mechanics,* 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1994.
23. Hamilton, J. B., "The Suppression of Intake Losses by Various Degrees of Rounding," University of Washington, Seattle, WA, Experiment Station Bulletin 51, 1929.

24. Herschel, C., *The Two Books on the Water Supply of the City of Rome, from Sextus Julius Frontinus* (ca. 40–103 A.D.). Boston, 1899.

25. Lam, C. F., and M. L. Wolla, "Computer Analysis of Water Distribution Systems: Part 1, Formulation of Equations," *Proceedings of the ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 98*, HY2, February 1972, pp. 335–344.

26. Bean, H. S., ed., *Fluid Meters, Their Theory and Application*. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1971.

27. ISO 7145, *Determination of Flowrate of Fluids in Closed Conduits or Circular Cross Sections—Method of Velocity Determination at One Point in the Cross Section*, ISO UDC 532.57.082.25:532.542, 1st ed. Geneva: International Standards Organization, 1982.

28. Goldstein, R. J., ed., *Fluid Mechanics Measurements*, 2nd ed. Washington, D.C.: Taylor & Francis, 1996.

29. Bruun, H. H., *Hot-Wire Anemometry—Principles and Signal Analysis*. New York: Oxford University Press, 1995.

30. Potter, M. C., and J. F. Foss, *Fluid Mechanics*. New York: Ronald, 1975.

PROBLEMAS

8.1 Ar padrão entra num duto de 0,3 m de diâmetro. A vazão em volume é 2 m^3/min. Determine se o escoamento é laminar ou turbulento. Estime o comprimento de entrada necessário para estabelecer escoamento completamente desenvolvido.

8.2 Para escoamento em tubos circulares, a transição para escoamento turbulento em sistemas de engenharia raramente ocorre antes de $Re = 2300$. Plote, num gráfico log-log, linhas de velocidade média *versus* diâmetro do tubo correspondentes a $Re = 2300$ para (a) ar padrão e (b) água a 15°C.

8.3 Para escoamento em tubos circulares, a transição para escoamento turbulento em sistemas de engenharia raramente ocorre antes de $Re = 2300$. Plote, num gráfico log-log, linhas de vazão em volume *versus* diâmetro do tubo correspondentes a $Re = 2300$ para (a) ar padrão e (b) água a 15°C.

8.4 Para escoamento em tubos circulares, a transição para escoamento turbulento em sistemas de engenharia raramente ocorre antes de $Re = 2300$. Plote, num gráfico log-log, linhas de vazão em massa *versus* diâmetro do tubo correspondentes a $Re = 2300$ para (a) ar padrão e (b) água a 15°C.

8.5 Para escoamento laminar num tubo com 12,7 mm de diâmetro, determine (a) a máxima vazão em volume permissível se o fluido for água e (b) a máxima velocidade média se o fluido for ar. Qual o correspondente comprimento de entrada?

8.6 Considere um escoamento incompressível num duto circular. Deduza expressões gerais para o número de Reynolds em termos de (a) vazão em volume e diâmetro do tubo e (b) vazão em massa e diâmetro do tubo. O número de Reynolds é 1800 numa seção onde o diâmetro do tubo é 10 mm. Determine o número de Reynolds para a mesma vazão numa seção em que o diâmetro do tubo é 6 mm.

8.7 Para o escoamento laminar na seção de tubo mostrada na Fig. 8.1, esboce a tensão cisalhante na parede, a pressão e a velocidade na linha de centro como funções da distância ao longo do tubo. Explique as características significativas dos gráficos, comparando-os com o escoamento completamente desenvolvido. A equação de Bernoulli pode ser aplicada em alguma parte do campo de escoamento? Se afirmativo, onde? Explique brevemente.

8.8 O perfil de velocidade para escoamento completamente desenvolvido entre placas planas paralelas estacionadas é dado por $u = ay(h - y)$, onde a é uma constante, h é a largura total da fresta entre as placas e y é a distância medida para cima a partir da placa inferior. Determine a razão $\overline{V}/u_{máx}$.

8.9 Um fluido incompressível escoa entre duas placas paralelas estacionadas infinitas. O perfil de velocidade é dado por $u = u_{máx}(Ay^2 + By + C)$, onde A, B e C são constantes e y é medido a partir do centro da fresta. O espaçamento total entre as placas é h. Use condições de contorno apropriadas para expressar a magnitude e as unidades SI das constantes em termos de h. Desenvolva uma expressão para a vazão em volume por unidade de profundidade e avalie a razão $\overline{V}/u_{máx}$.

8.10 Um óleo viscoso escoa em regime permanente entre duas placas paralelas. O escoamento é laminar e completamente desenvolvido. O espaçamento total entre as placas é $h = 3$ mm. A viscosidade do óleo é 0,5 N·s/m^2 e o gradiente de pressão é -1200 N/m^2/m. Determine a magnitude e o sentido da tensão de cisalhamento na placa superior e a vazão em volume através da fresta por metro de largura.

8.11 Um óleo viscoso escoa em regime permanente entre duas placas paralelas. O escoamento é laminar e completamente desenvolvido. O gradiente de pressão é -8 lbf/pé^2/pé e a meia altura do canal é $h = 0{,}06$ pol. Determine a magnitude e o sentido da tensão de cisalhamento na superfície da placa superior. Determine a vazão em volume através do canal ($\mu = 0{,}01$ lbf·s/pé).

8.12 Um fluido escoa em regime permanente entre duas placas paralelas. O escoamento é completamente desenvolvido e laminar. A distância entre as placas é h.

(a) Deduza uma equação para a tensão de cisalhamento como função de y. Trace um gráfico dessa função.

(b) Para $\mu = 2{,}4 \times 10^{-5}$ lbf·s/pé^2, $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -4{,}0$ lbf/pe^2/pé, e $h = 0{,}05$ pol., calcule a tensão cisalhante máxima em lbf/pé^2.

8.13 Um macaco hidráulico suporta uma carga de 20.000 lbf. Os seguintes dados estão disponíveis:

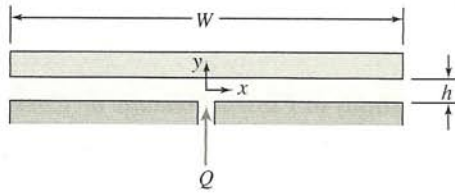
Diâmetro do pistão = 4,0 pol.
Folga radial entre o pistão e o cilindro = 0,002 pol.
Comprimento do pistão = 4,8 pol.

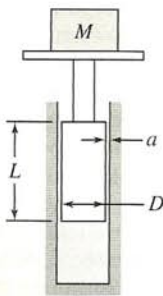
Estime a taxa de vazamento de fluido hidráulico pelo pistão, admitindo que o fluido é óleo SAE 30 a 80°F.

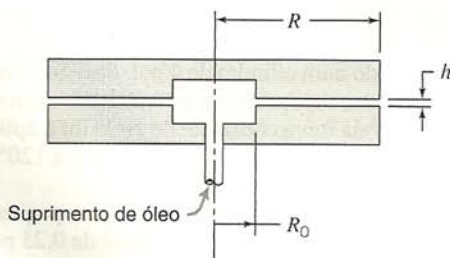
8.14 Óleo está confinado num cilindro de 4 pol. de diâmetro por um pistão que possui um espaço morto de 0,001 pol. e um comprimento de 2 pol. Uma força constante de 5000 lbf é aplicada ao pistão. Admita as propriedades do óleo SAE 30 a 120°F. Estime a taxa com que o óleo vaza pelo pistão.

8.15 Uma alta pressão num sistema é criada por um pequeno conjunto pistão-cilindro. O diâmetro do pistão é de 0,25 pol. e ele penetra 2 pol. no cilindro. A folga radial entre as duas peças é de 10^{-4} pol. Despreze deformações elásticas do pistão e do cilindro decorrentes da pressão. Admita que as propriedades do fluido são aquelas do óleo SAE 10W a 100°F. Estime a taxa de vazamento quando a pressão no cilindro for de 100.000 psi.

8.16 Um mancal hidrostático deve suportar uma carga de 3600 lbf por pé de comprimento, perpendicularmente ao diagrama. O mancal é suprido com óleo SAE 30 a 100°F e 100 psig através da fenda central. Como o óleo é viscoso e a fresta é estreita, o

escoamento na fresta pode ser considerado completamente desenvolvido. Calcule (a) a largura requerida para plataforma do mancal, (b) o gradiente de pressão resultante, dp/dx, e (c) a altura h da fresta, se $Q = 0{,}0006$ pé³/min por pé de comprimento.

P8.16

8.17 O componente básico de um aparelho para testar manômetros consiste de um conjunto pistão-cilindro, conforme mostrado. O pistão, com 6 mm de diâmetro, é carregado de modo a desenvolver uma pressão de valor conhecido. (O comprimento do pistão é 25 mm.) Calcule a massa, M, necessária para produzir 1,5 MPa (manométrico) no cilindro. Determine a vazão de vazamento como função da folga radial, a, para essa carga, se o líquido for óleo SAE 30 a 20°C. Especifique a máxima folga radial admissível de modo que o movimento vertical do pistão devido ao vazamento seja inferior a 1 mm/min.

P8.17

8.18 Líquido viscoso com vazão em volume Q é bombeado através da abertura central para dentro da fresta estreita entre os discos paralelos mostrados. A vazão é baixa, de modo que o escoamento é laminar e o gradiente de pressão devido à aceleração convectiva na fresta é desprezível em comparação com o gradiente devido às forças viscosas (isso é chamado *creeping flow* ou *escoamento de arrasto*). Obtenha uma expressão geral para a variação da velocidade média no espaço entre os discos. Para *escoamento de arrasto*, o perfil de velocidade em qualquer seção transversal na fresta é o mesmo que aquele para escoamento completamente desenvolvido entre placas paralelas estacionárias. Avalie o gradiente de pressão, dp/dr, como uma função do raio. Obtenha uma expressão para $p(r)$. Mostre que a força líquida requerida para manter a placa superior na posição mostrada é

P8.18

$$F = \frac{3\mu Q R^2}{h^3}\left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]$$

8.19 Considere o modelo simples de lei de potência para um fluido não Newtoniano dado pela Eq. 2.11. Estenda a análise da Seção 8.2.1 para mostrar que o perfil de velocidade para escoamento laminar completamente desenvolvido de um fluido de lei de potência entre placas paralelas separadas da distância $2h$ pode ser escrito

$$u = \left(\frac{h}{k}\frac{\Delta p}{L}\right)^{1/n} \frac{nh}{n+1}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

onde y é a coordenada medida a partir da linha de centro do canal. Trace um gráfico dos perfis $u/U_{máx}$ *versus* y/h para $n = 0{,}7$, $1{,}0$ e $1{,}3$.

8.20 Usando o perfil do Problema 8.19, avalie a vazão volumétrica para o escoamento laminar completamente desenvolvido de um fluido de lei de potência entre placas paralelas estacionárias. Mostre que o perfil de velocidade pode ser escrito

$$\frac{u}{\bar{V}} = \frac{2n+1}{n+1}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

onde y é a coordenada medida a partir da linha de centro do canal. Trace um gráfico dos perfis $u/\bar{V}$ *versus* y/h para $n = 0{,}7$, $1{,}0$ e $1{,}3$.

8.21 Um mancal de deslizamento selado é constituído por cilindros concêntricos. Os raios interno e externo são de 25 e 26 mm, respectivamente, o comprimento do mancal é 100 mm e ele gira a 2800 rpm. A folga radial é preenchida com óleo em movimento laminar. O perfil de velocidade é linear através da folga. O torque necessário para girar o mancal é de 0,2 N·m. Calcule a viscosidade do óleo. O torque aumentará ou diminuirá com o tempo? Por quê?

8.22 Considere o escoamento laminar completamente desenvolvido entre placas paralelas infinitas espaçadas de $d = 0{,}35$ pol. A placa superior move-se para a direita com velocidade $U_2 = 2$ pés/s; a placa inferior move-se para a esquerda com velocidade $U_1 = 1$ pé/s. O gradiente de pressão no sentido do escoamento é zero. Desenvolva uma expressão para a distribuição de velocidade na fresta. Determine a vazão em volume por unidade de profundidade, que passa por uma dada seção.

8.23 Água a 60°C escoa entre duas grandes placas planas. A placa inferior move-se para a esquerda com velocidade de 0,3 m/s; a placa superior está parada. O espaçamento entre as placas é de 3 mm e o escoamento é laminar. Determine o gradiente de pressão necessário para produzir vazão líquida nula numa seção transversal.

8.24 O perfil de velocidade adimensional para escoamento laminar completamente desenvolvido entre placas paralelas infinitas com a placa superior movendo-se com velocidade constante U é mostrado na Fig. 8.5. Trace um gráfico da tensão de cisalhamento como uma função da distância não-dimensional y/a para cada um dos três casos mostrados na figura.

8.25 A cabeça gravadora do disco de armazenamento de memória de um computador flutua acima do disco giratório sobre uma delgada camada de ar (a espessura da camada é 0,5 μm). A localização da cabeça é 150 mm acima da linha de centro do disco; o disco gira a 3600 rpm. A cabeça gravadora é quadrada, com 10 mm de lado. Para ar padrão no espaço entre a cabeça e o disco, determine (a) o número de Reynolds do escoamento, (b) a tensão de cisalhamento viscosa e (c) a potência necessária para superar o cisalhamento viscoso.

8.26 Considere o escoamento permanente laminar completamente desenvolvido de um líquido viscoso, para baixo sobre uma superfície inclinada sem gradiente de pressão. O perfil de velocidade foi deduzido no Problema-Exemplo 5.9. Plote o perfil

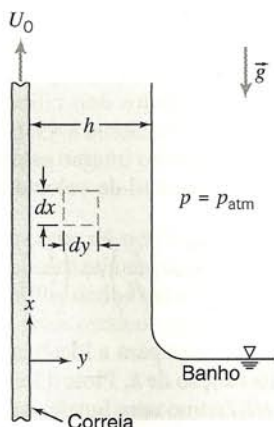
de velocidade. Calcule a viscosidade cinemática do líquido se a espessura do filme com inclinação de 30° for 0,8 mm e a velocidade máxima 15,7 mm/s.

8.27 Considere o escoamento permanente laminar completamente desenvolvido de um líquido viscoso, para baixo sobre uma superfície inclinada. A camada de líquido é de espessura constante, h. Use um volume de controle diferencial adequadamente escolhido para obter o perfil de velocidade. Desenvolva uma expressão para a vazão em volume.

8.28 A distribuição de velocidade em uma fina película de fluido escoando para baixo sobre uma superfície inclinada foi desenvolvida no Problema-Exemplo 5.9. Considere uma película com 5,63 mm de espessura de um líquido com SG = 1,26 e viscosidade dinâmica de 1,4 N·s/m². Deduza uma expressão para a distribuição da tensão de cisalhamento dentro da película. Calcule a máxima tensão cisalhante dentro da película e indique seu sentido. Avalie a vazão em volume na película, em mm³/s por milímetro de largura da superfície. Calcule o número de Reynolds baseado na velocidade média.

8.29 Considere o escoamento completamente desenvolvido entre placas paralelas com a placa superior movendo-se a $U = 2$ m/s; o espaçamento entre as placas é $a = 2,5$ mm. Determine a vazão em volume por unidade de profundidade para o caso de gradiente de pressão nulo. Se o fluido for ar, avalie a tensão cisalhante sobre a placa inferior e plote a distribuição de tensão de cisalhamento através do canal para o caso de gradiente de pressão nulo. A vazão aumentará ou diminuirá se o gradiente de pressão for adverso? Determine o gradiente de pressão que dará tensão cisalhante nula em $y = 0,25a$. Trace o gráfico da distribuição de tensão de cisalhamento através do canal para o último caso.

8.30 Água a 60°F escoa entre placas paralelas com uma folga $b = 0,01$ pé entre elas. A placa superior move-se com a velocidade $U = 1$ pé/s no sentido positivo de x. O gradiente de pressão, $\partial p/\partial x = -1,20$ lbf/pé²/pé. Localize o ponto de velocidade máxima e determine a sua magnitude (faça $y = 0$ na placa inferior). Determine a vazão em volume que passa por uma dada seção transversal (x = constante) em 10 s. Trace um gráfico das distribuições de velocidade e tensão de cisalhamento.

8.31 Uma correia contínua, movendo-se com velocidade U_0 para cima através de um banho químico, arrasta uma película líquida de espessura h, massa específica ρ e viscosidade μ. A gravidade tende a fazer com que o líquido escorregue para baixo, mas o movimento da correia impede que ele caia completamente. Admita que o escoamento é completamente desenvolvido e laminar com gradiente de pressão nulo, e que a atmosfera não produz tensão de cisalhamento na superfície externa da película. Enuncie claramente as condições de contorno a serem satisfeitas pela velocidade em $y = 0$ e $y = h$. Obtenha uma expressão para o perfil de velocidade.

P8.31

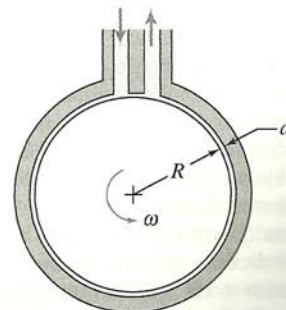
8.32 O perfil de velocidade para escoamento completamente desenvolvido de ar entre placas paralelas, com a placa superior em movimento, é dado pela Eq. 8.8. Admita $U = 3$ m/s e $a = 2,5$ mm. Determine o gradiente de pressão para o qual não exista escoamento resultante na direção x. Esboce as distribuições esperadas de velocidade e de tensão de cisalhamento através do canal para esse escoamento. Para o caso em que $u = 2U$ em $y/a = 0,5$, esboce as distribuições esperadas de velocidade e de tensão de cisalhamento através do canal. Comente sobre as características dos gráficos.

8.33 O perfil de velocidade para escoamento completamente desenvolvido de água entre placas paralelas, com a placa superior em movimento, é dado pela Eq. 8.8. Admita $U = 3$ m/s e $a = 2,5$ mm. Determine a vazão em volume por unidade de profundidade para gradiente de pressão nulo. Avalie a tensão cisalhante sobre a placa inferior e esboce a distribuição de tensão de cisalhamento através do canal. A vazão em volume aumentaria ou diminuiria com um ligeiro gradiente adverso de pressão? Calcule o gradiente de pressão que dará tensão cisalhante nula em $y/a = 0,25$. Esboce a distribuição de tensão de cisalhamento para esse caso.

8.34 Microcomponentes eletrônicos (*microchips*) são mantidos sobre uma fina película de ar sobre uma superfície horizontal durante um estágio do processo de fabricação. Os *chips* têm 11,7 mm de comprimento por 9,35 mm de largura e massa de 0,325 g. O filme de ar tem 0,125 mm de espessura. A velocidade inicial de um *chip* é $V_0 = 1,75$ mm/s; o *chip* desacelera como resultado do atrito viscoso no filme de ar. Analise o movimento do *chip* durante a desaceleração e desenvolva uma equação diferencial para a velocidade do *chip* como uma função do tempo t. Calcule o tempo requerido para o *chip* perder 5% da sua velocidade inicial. Esboce a variação da velocidade do *chip* com o tempo durante a desaceleração. Rotule esse esboço e explique por que ele aparenta a forma que você desenhou.

8.35 Ondas de superfície livre começam a formar-se sobre uma película laminar de um líquido escoando para baixo sobre uma superfície inclinada sempre que o número de Reynolds, baseado na vazão mássica por unidade de largura do filme, é maior que 33 aproximadamente. Estime a máxima espessura do filme laminar de água que permanece sem ondas num escoamento para baixo sobre uma superfície vertical.

8.36 Mantenha uma folha de papel 50 a 75 mm acima de uma mesa lisa. Lance a folha de forma suave paralelamente à superfície da mesa. Comente sobre o movimento que você observa. Explique o fenômeno de dinâmica do fluido envolvido no movimento.

8.37 Uma bomba de arrasto viscoso é feita de um invólucro estacionário com um tambor rotativo bem ajustado no seu interior. A folga é pequena comparada com o diâmetro do tambor, de modo que o escoamento no espaço anular pode ser tratado como escoamento entre placas paralelas. Fluido é arrastado em volta do anel por forças viscosas. Avalie as características de desempenho da bomba de arrasto (pressão diferencial, potência requerida e eficiência) como funções da vazão volumétrica. Admita que a profundidade normal ao diagrama é b.

P8.37

8.38 A força aplicada em um torno para reter uma peça durante o torneamento é devida a óleo de alta pressão suprido por uma bomba. O óleo vaza axialmente através de uma folga anular com diâmetro D, comprimento L e folga radial a. O membro interno do anel gira com velocidade angular ω. Potência é requerida tanto para bombear o óleo quanto para vencer a dissipação viscosa no espaço anular. Desenvolva expressões em termos da geometria especificada para a potência da bomba, $\mathscr{P}_p$, e para a potência de dissipação viscosa, $\mathscr{P}_v$. Mostre que o requisito de potência total é minimizado quando a folga radial, a, é escolhida de forma que $\mathscr{P}_v = 3\mathscr{P}_p$.

8.39 Um inventor propõe fabricar um "temporizador viscoso" colocando um cilindro pesado dentro de um outro cilindro ligeiramente maior contendo um líquido viscoso, criando assim uma película anular delgada. Analise o campo de escoamento criado quando o aparelho é invertido e o cilindro interno começa a cair sob a ação da gravidade. Seria esse sistema um medidor de tempo satisfatório? Se afirmativo, para qual intervalo de tempo? Qual seria o efeito da mudança de temperatura sobre o tempo medido?

8.40 O projeto de automóveis está tendendo para o controle total de direção (nas quatro rodas) de modo a melhorar o desempenho e a segurança do veículo quando a tração é fraca. Um veículo de direção total deve ter um diferencial especial (com interação entre eixos) para permitir operação em estradas secas. Numerosos veículos estão sendo construídos usando direções multiplacas viscosas para esse tipo de diferencial. Faça a análise e o projeto necessários para definir o torque transmitido pelo diferencial para uma dada diferença de velocidade, em termos dos parâmetros de projeto. Identifique dimensões adequadas para o diferencial viscoso (discos paralelos rotativos) transmitir um torque de 150 N·m a uma perda de velocidade de 125 rpm, usando lubrificante com propriedades do óleo SAE 30. Discuta como determinar o custo mínimo de material para o diferencial viscoso se o custo de placa por metro quadrado for constante.

8.41 Para escoamento viscoso completamente desenvolvido em um tubo, determine a distância radial a partir do eixo do tubo na qual a velocidade iguala-se à velocidade média.

8.42 Considere em primeiro lugar a água e em seguida óleo lubrificante SAE 10W fluindo a 40°C num tubo de 6 mm de diâmetro. Determine, para cada fluido, a máxima vazão (e o correspondente gradiente de pressão, $\partial p/\partial x$) para a qual o escoamento laminar seria esperado.

8.43 Um dispositivo para medição de viscosidade deve ser feito com tubo plástico flexível num laboratório de mecânica dos fluidos; o fluido será a água. Admita que o tubo tem diâmetro $D = 0{,}125 \pm 0{,}010$ pol. e o seu comprimento é 50 pés. Avalie a vazão em volume máxima e a correspondente queda de pressão com a qual seria esperado escoamento laminar. Estime a incerteza experimental na viscosidade medida com esse dispositivo. Como poderia o dispositivo ser melhorado?

8.44 Uma agulha hipodérmica com diâmetro interno $d = 0{,}1$ mm e comprimento $L = 25$ mm é utilizada para injetar uma solução salina com viscosidade igual a cinco vezes a da água. O diâmetro do êmbolo é $D = 10$ mm; a força máxima que pode ser exercida pelo polegar sobre o êmbolo é $F = 45$ N. Estime a vazão em volume de solução que pode ser produzida.

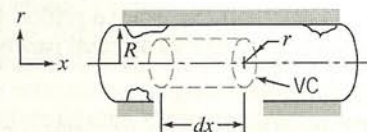
8.45 Num viscosímetro comercial, a vazão em volume é medida cronometrando-se o tempo de escoamento de um volume conhecido através de um tubo capilar vertical sob a ação da gravidade. Para reduzir a incerteza da medição do tempo a uma percentagem desprezível, o tamanho é escolhido de forma a dar um tempo de escoamento de cerca de 200 segundos. Um certo viscosímetro tem um capilar de 0,31 mm de diâmetro e 73 mm de comprimento. Estime a quantidade máxima que o diâmetro pode variar de modo a permitir medições de viscosidade com incerteza inferior a 1%. (Note que a precisão requerida é da ordem de ± 1 micrômetro; assim, a maioria dos viscosímetros exige calibração com um líquido de viscosidade conhecida.)

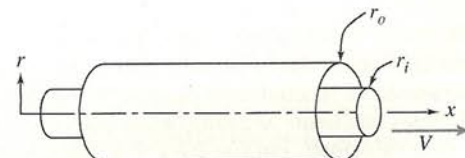
8.46 A resistência ao escoamento de um fluido pode ser definida por analogia com a lei de Ohm para circuito elétrico. Desse modo, a resistência ao escoamento é dada pela razão entre a queda de pressão (potencial motor) e a vazão em volume (corrente). Mostre que a resistência ao escoamento laminar é dada por

$$\text{resistência} = \frac{128\mu L}{\pi D^4}$$

que é independente da vazão. Determine a máxima queda de pressão para a qual essa relação é válida para um tubo com 50 mm de comprimento e 0,25 mm de diâmetro interno, para querosene e para óleo de rícino a 40°C.

8.47 Considere o viscosímetro capilar do Problema-Exemplo 8.4. Estime a incerteza experimental da medição de viscosidade se as contagens mínimas das medidas são $\pm 0{,}010$ MPa para pressão, $\pm 0{,}01$ mm para diâmetro do tubo, ± 5 mm³/s para vazão volumétrica e $\pm 1{,}00$ mm para comprimento do tubo (a densidade relativa do líquido de teste é 0,82). Investigue o efeito do diâmetro do tubo na incerteza experimental. Pode a incerteza ser minimizada por uma escolha apropriada de diâmetro?

8.48 Considere escoamento laminar completamente desenvolvido num tubo circular. Use um volume de controle cilíndrico conforme mostrado. Indique as forças que atuam sobre o volume de controle. Usando a equação da quantidade de movimento, desenvolva uma expressão para a distribuição de velocidade.

P8.48

8.49 Considere escoamento laminar completamente desenvolvido no espaço anular entre dois tubos concêntricos. O tubo externo é estacionário e o tubo interno move-se na direção x com velocidade V. Admita que o gradiente axial de pressão é nulo ($\partial p/\partial x = 0$). Obtenha uma expressão geral para a tensão cisalhante, τ, como função do raio, r, em termos de uma constante, C_1. Obtenha uma expressão geral para o perfil de velocidade, $u(r)$, em termos de duas constantes, C_1 e C_2. Obtenha expressões para C_1 e C_2.

P8.49

8.50 Considere escoamento laminar completamente desenvolvido no espaço anular formado pelos dois cilindros concêntricos mostrados no diagrama do Problema 8.49, porém com gradiente de pressão, $\partial p/\partial x$, e o cilindro interno estacionário. Seja $r_0 = R$ e $r_i = kR$. Mostre que o perfil de velocidade é dado por

$$u = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{1-k^2}{\ln(1/k)}\right)\ln\frac{r}{R}\right]$$

Obtenha uma expressão para a localização da velocidade máxima como uma função de k. Plote a localização da velocidade máxima ($\alpha = r/R$) como uma função da razão de raios k. Compare o caso limite, $k \to 0$, com a expressão correspondente para escoamento em um tubo circular.

8.51 Para o escoamento do Problema 8.50 mostre que a vazão volumétrica é dada por

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left[(1-k^4) - \frac{(1-k^2)^2}{\ln(1/k)}\right]$$

Determine uma expressão para a velocidade média. Compare o caso limite, $k \to 0$, com a expressão correspondente para escoamento em um tubo circular.

8.52 Foi sugerido no projeto de um borrifador agrícola que um elemento estrutural fosse mantido fixo no lugar por meio de um arame esticado ao longo da linha de centro de um tubo; acreditava-se que um arame relativamente fino teria pouco efeito sobre a queda de pressão para uma dada vazão. Usando o resultado do Problema 8.51, deduza uma expressão que dê a variação percentual em queda de pressão como uma função da razão entre o diâmetro do arame e o diâmetro do tubo para escoamento laminar. Trace um gráfico da variação percentual na queda de pressão como uma função da razão de raios k para $0{,}001 \leq k \leq 0{,}10$.

8.53 Um tubo horizontal transporta fluido em escoamento turbulento completamente desenvolvido. A diferença de pressão estática medida entre as duas seções é de 3 psi. A distância entre as seções é de 25 pés e o diâmetro do tubo é de 6 pol. Calcule a tensão cisalhante, τ_w, que atua sobre as paredes.

8.54 A queda de pressão entre duas tomadas separadas de 3 m, num duto horizontal conduzindo água em escoamento completamente desenvolvido, é de 1,78 kPa. A seção transversal do duto é retangular com 30 × 240 mm. Calcule a tensão média de cisalhamento na parede.

8.55 Querosene escoa a 70°F num tubo liso com diâmetro interno de 1 pol. O número de Reynolds do escoamento é 4000. Para escoamento laminar, o gradiente de pressão foi determinado como $\partial p/\partial x = -0{,}2$ lbf/pé²/pé, enquanto que para escoamento turbulento, $\partial p/\partial x = -0{,}5$ lbf/pé²/pé. Plote a variação de tensão de cisalhamento, τ/τ_w, como função do raio adimensional, r/R, para ambas as condições de escoamento.

8.56 Um medicamento líquido com viscosidade e massa específica da água deve ser administrado através de uma agulha hipodérmica. O diâmetro interno da agulha é 0,25 mm e o seu comprimento é 50 mm. Determine (a) a máxima vazão em volume para a qual o escoamento será laminar, (b) a queda de pressão requerida para fornecer a vazão máxima e (c) a correspondente tensão de cisalhamento na parede.

8.57 Laufer [5] mediu os seguintes dados para a velocidade média no escoamento turbulento completamente desenvolvido em tubos para $Re_U = 50.000$:

$\bar{u}/U$	0,996	0,981	0,963	0,937	0,907	0,866	0,831
y/r	0,898	0,794	0,691	0,588	0,486	0,383	0,280
$\bar{u}/U$	0,792	0,742	0,700	0,650	0,619	0,551	
y/R	0,216	0,154	0,093	0,062	0,041	0,024	

Avalie um expoente de perfil de velocidade de lei de potência usando o método dos mínimos quadrados (veja o Problema-Exemplo 8.63). Plote os dados em coordenadas log-log. Compare a curva ajustada pelos mínimos quadrados com os dados no gráfico.

8.58 Laufer [5] mediu os seguintes dados para a velocidade média no escoamento turbulento completamente desenvolvido em tubos, para $Re_U = 500.000$:

$\bar{u}/U$	0,997	0,988	0,975	0,959	0,934	0,908
y/R	0,898	0,794	0,691	0,588	0,486	0,383
$\bar{u}/U$	0,874	0,847	0,818	0,771	0,736	0,690
y/R	0,280	0,216	0,154	0,093	0,062	0,037

Avalie um expoente de perfil de velocidade de lei de potência usando o método dos mínimos quadrados (Veja o Problema-Exemplo 8.63). Plote os dados em coordenadas log-log. Compare a curva ajustada pelos mínimos quadrados com os dados no gráfico.

8.59 Considere o perfil de velocidade empírico de "lei de potência" para escoamento turbulento em tubo, Eq. 8.22. Para $n = 7$ determine o valor de r/R para o qual u é igual à velocidade média $\bar{V}$. Trace um gráfico dos resultados na faixa de $6 \leq n \leq 10$ e compare com o caso de escoamento laminar completamente desenvolvido em tubo, Eq. 8.14.

8.60 O perfil de velocidade para escoamento turbulento em tubos lisos é freqüentemente representado pela relação empírica da Eq. 8.22. Mostre que a razão entre a velocidade média e a velocidade na linha de centro é dada pela Eq. 8.24. Usando n da Eq. 8.23, trace um gráfico de $\bar{V}/U$ como função do número de Reynolds, Re_U.

8.61 A Eq. 8.23 fornece o expoente, n, do perfil de velocidade de lei de potência como uma função do número de Reynolds na linha de centro, Re_U, para escoamento turbulento completamente desenvolvido em tubos lisos. A Eq. 8.24 relaciona a velocidade média, $\bar{V}$, com a velocidade na linha de centro, U, para diversos valores de n. Prepare um gráfico de $\bar{V}/U$ como uma função do número de Reynolds, $Re_{\bar{V}}$.

8.62 Um coeficiente de quantidade de movimento, β, é definido como

$$\int_A u\rho u\, dA = \beta \int_A \bar{V}\rho u\, dA = \beta \dot{m}\bar{V}$$

Avalie β para um perfil de velocidade laminar, Eq. 8.14, e para um perfil de velocidade turbulento de "lei de potência", Eq. 8.22 (escolha $n = 7$). Trace um gráfico de β como uma função de n para perfil turbulento de lei de potência, para a faixa $6 \leq n \leq 10$ e compare com o caso do escoamento laminar completamente desenvolvido em tubo.

8.63 Considere o perfil de velocidade empírico de lei de potência para escoamento turbulento completamente desenvolvido em tubo, Eq. 8.22. Usando o método dos mínimos quadrados, mostre que um valor de n de melhor ajuste pode ser calculado a partir dos dados medidos como

$$\frac{1}{n} = \frac{\sum \ln(\bar{u}/U)\,\ln(y/R)}{\sum [\ln(y/R)]^2}$$

Sugestão: Expresse o perfil como $\ln(\bar{u}/U) = (1/n)\ln(y/R)$.

8.64 Considere o escoamento laminar completamente desenvolvido de água entre placas paralelas infinitas. A velocidade máxima do escoamento, o espaço entre as placas e a largura são, respectivamente, 6 m/s, 0,2 mm e 30 mm. Determine o fluxo de energia cinética numa seção transversal.

8.65 Avalie o coeficiente de energia cinética, α, para o escoamento do Problema 8.64.

8.66 Considere escoamento laminar completamente desenvolvido num tubo circular. Avalie o coeficiente de fluxo de energia cinética para este escoamento.

8.67 Mostre que o coeficiente de energia cinética, α, para o perfil de velocidade de "lei de potência" da Eq. 8.22 para escoamento turbulento é dado pela Eq. 8.27. Avalie α para $n = 7$. Prepare gráficos de α como uma função de n e como uma função de $Re_{\bar{V}}$ para perfis de lei de potência turbulentos na faixa $6 \leq n \leq 10$.

8.68 Água escoa numa tubulação de área transversal constante; o diâmetro do tubo é de 50 mm e a velocidade média do escoamento é de 1,5 m/s. Na entrada do tubo a pressão manométrica é 590 kPa. A saída do tubo situa-se 25 m acima da entrada; a pressão na saída é atmosférica. Determine a perda de carga entre a entrada e a saída do tubo.

8.69 O tubo do Problema 8.68 é colocado numa superfície horizontal. A vazão em volume e a pressão de saída permanecem as mesmas. Calcule a pressão de entrada para essa nova condição.

8.70 Medidas são feitas para a configuração de escoamento mostrada na Fig. 8.12. Na entrada, seção ①, a pressão é 10,2 psig, a velocidade média é 5,5 pés/s e a elevação é 7,5 pés. Na saída, seção ②, a pressão, velocidade média e elevação são, respectivamente, 6,5 psig, 11,2 pés/s e 10,5 pés. Calcule a perda de carga em pés. Converta para unidades de energia por massa no Sistema Internacional.

8.71 Para a configuração de escoamento da Fig. 8.12, é sabido que a perda de carga é de 1,7 pé. Da entrada para a saída, a queda de pressão é de 3,7 psi, o aumento de velocidade é de 75% e o aumento de elevação é de 5,5 pés. Calcule a velocidade de entrada.

8.72 Considere o escoamento no tubo de um reservatório no sistema do Problema-Exemplo 8.5. Numa condição de escoamento, a perda de carga é de 2,85 m a uma vazão volumétrica de 0,0067 m³/s. Determine a profundidade do reservatório requerida para manter essa vazão.

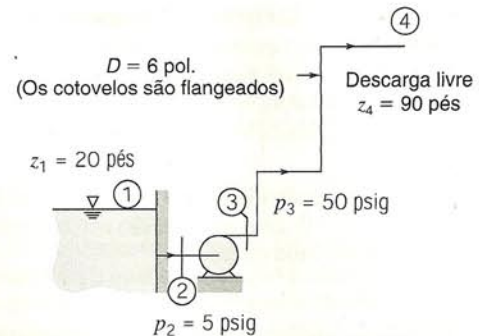
8.73 Considere o escoamento no tubo de um reservatório no sistema do Problema-Exemplo 8.5. Numa condição de escoamento, a perda de carga é de 1,75 m e a profundidade do reservatório é de 3,60 m. Calcule a vazão volumétrica do reservatório.

8.74 A velocidade média de escoamento num trecho de diâmetro constante da tubulação do Alasca é de 8,27 pés/s. Na entrada, a pressão é de 1200 psig e a elevação é de 150 pés; na saída, a pressão é de 50 psig e a elevação é de 375 pés. Calcule a perda de carga nesse trecho da tubulação.

8.75 Na entrada de um trecho de diâmetro constante da tubulação do Alasca, a pressão é de 1200 psig e a elevação é de 150 pés; a elevação na saída é de 375 pés. A perda de carga nessa seção da tubulação é de 74.400 pés·lbf/slug. Calcule a pressão na saída.

8.76 Água escoa de um tubo horizontal para dentro de um grande tanque. O tubo está localizado 8 pés acima da superfície livre da água no tanque. A perda de carga é de 21,1 pés·lbf/slug. Calcule a velocidade média do escoamento no tubo.

8.77 Água escoa a 3 gpm através de uma mangueira de jardim horizontal com diâmetro de $\frac{5}{8}$ de pol. A queda de pressão ao longo de 50 pés de mangueira é de 12,3 psi. Calcule a perda de carga.

8.78 Água é bombeada à razão de 2 pé³/s de um reservatório que está 20 pés acima de uma bomba para uma descarga livre 90 pés acima da bomba. A pressão no lado de admissão da bomba é de 5 psig e no lado de descarga é de 50 psig. Todos os tubos são de aço comercial com 6 pol. de diâmetro. Determine (a) a altura de carga suprida pela bomba e (b) a perda de carga total entre a bomba e o ponto de descarga livre.

P8.78

8.79 Laufer [5] mediu os seguintes dados para a velocidade média próxima à parede no escoamento turbulento completamente desenvolvido em tubos, para $Re_U = 50.000$ ($U = 9,8$ pés/s e $R = 4,86$ pol.) no ar:

$\frac{\bar{u}}{U}$	0,343	0,318	0,300	0,264	0,228	0,221	0,179	0,152	0,140
$\frac{y}{R}$	0,0082	0,0075	0,0071	0,0061	0,0055	0,0051	0,0041	0,0034	0,0030

Plote os dados. Avalie um valor que melhor ajusta-se para $d\bar{u}/dy$ usando o método dos mínimos quadrados. Compare a tensão de cisalhamento na parede avaliada de $\tau_w = \mu d\bar{u}/dy$ com aquela calculada a partir de um fator de atrito tirado do diagrama de Moody (Fig. 8.13).

8.80 Um tubo liso com diâmetro de 3 pol. transporta água (150°F) horizontalmente a uma vazão em massa de 0,006 slug/s. A queda de pressão observada é de 0,065 lbf/pé² para cada 100 pés de tubo. Do diagrama de Moody, o fator de atrito poderia ser escolhido como 0,021 ou 0,042. Qual é o valor correto?

8.81 Água escoa em regime permanente através de um tubo liso de 150 mm de diâmetro, com isolamento térmico. A velocidade média é de 5 m/s. Estime o aumento de temperatura da água por quilômetro de comprimento de tubo.

8.82 Um tubo capilar de pequeno diâmetro feito de alumínio trefilado é usado no lugar de uma válvula de expansão num refrigerador doméstico. O diâmetro interno é de 0,5 mm. Calcule a rugosidade relativa correspondente. Comente se esse tubo deve ou não ser considerado "liso" com respeito ao escoamento.

8.83 As curvas traçadas no diagrama de Moody originam-se da correlação empírica dada pela Eq. 8.37a. Conforme observado na Seção 8.7.1, uma estimativa inicial para f_0 calculada da Eq. 8.37b produz resultados com precisão dentro de 1%, com apenas uma iteração [10]. Verifique a validade dessa afirmativa para $Re = 10^4$ e 10^7, para $e/D = 0$ e 0,010.

8.84 O diagrama de Moody dá o fator de atrito de Darcy, f, em termos do número de Reynolds e da rugosidade relativa. O *fator de atrito de Fanning* para escoamento em tubo é definido como

$$f_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho \bar{V}^2}$$

onde τ_w é a tensão de cisalhamento na parede do tubo. Mostre que a relação entre os fatores de atrito de Darcy e de Fanning para escoamento completamente desenvolvido é dada por $f = 4f_F$.

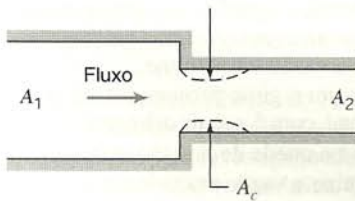
8.85 Água escoa através de um tubo com diâmetro de 1 pol. que subitamente alarga-se para um diâmetro de 2 pol. A vazão através do alargamento é de 20 gpm. Calcule o aumento de pressão no alargamento. Compare com o valor para escoamento sem atrito.

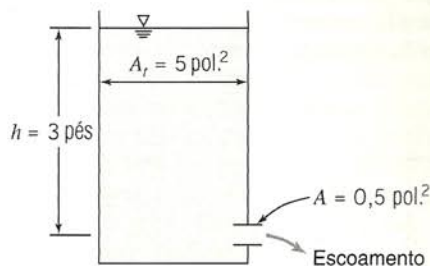
8.86 Ar nas condições padrão escoa através de uma expansão súbita num duto circular. Os diâmetros do duto à montante e à jusante da expansão, são respectivamente 3 e 9 pol. A pressão à jusante é de 0,25 polegada de água mais alta do que aquela à montante. Determine a velocidade média e a vazão volumétrica do ar aproximando-se da expansão.

8.87 Água escoa através de um tubo com 50 mm de diâmetro que subitamente contrai-se para 25 mm. A queda de pressão através da contração é de 3,4 kPa. Determine a vazão em volume.

8.88 O escoamento através de uma contração súbita é mostrado. A área mínima de escoamento na vena contracta é dada pelo coeficiente de contração [30], em termos da razão entre áreas,

$$C_c = \frac{A_c}{A_2} = 0{,}62 + 0{,}38\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^3$$

Como o escoamento acelera-se de A_1 para A_c, as perdas são muito pequenas. Entretanto, elas não são desprezíveis para a expansão "súbita" de A_c para A_2. Use essas suposições para avaliar (a) o coeficiente de contração e (b) o coeficiente de perda localizada, para uma contração súbita com $AR = A_2/A_1 = 0{,}5$. Compare com os dados da Fig. 8.15.

P8.88

8.89 Água escoa do tanque mostrado através de um tubo muito curto. Admita que o escoamento é quase permanente. Estime a vazão em volume no instante mostrado. Como você poderia melhorar o sistema de escoamento se uma vazão maior fosse desejada?

P8.89

8.90 Ar escoa para fora de uma câmara de teste de uma sala limpa através de um duto com 150 mm de diâmetro de comprimento L. O duto original tinha uma entrada de bordas vivas, mas foi substituído por outro com entrada bem arredondada. A pressão na câmara é de 2,5 mm de água acima da ambiente. As perdas devidas ao atrito são desprezíveis comparadas com as perdas da entrada e da saída. Estime o aumento de vazão em volume que resulta da mudança no contorno da entrada.

8.91 Considere novamente o escoamento através do cotovelo analisado no Problema-Exemplo 4.7. Usando as condições dadas, calcule o coeficiente de perda localizada para o bocal. Supondo que a pressão de entrada permaneça constante e que o coeficiente de perda no bocal não varie, como variaria a força vertical quando o diâmetro de saída do bocal fosse variado? Plote seus resultados.

8.92 Água a 45°C penetra em um chuveiro através de um tubo circular com 15,8 mm de diâmetro interno. A água sai em 24 correntes, cada uma com 1,05 mm de diâmetro. A vazão volumétrica é de 5,67 l/min. Estime a pressão mínima de água necessária na entrada do chuveiro. Avalie a força necessária para manter o chuveiro fixo na extremidade do tubo circular. Indique claramente se é uma tensão de compressão ou de tração.

8.93 Analise o escoamento através de uma expansão súbita num sistema de tubo. Aplique as equações básicas para um volume de controle adequado. Desenvolva uma expressão para a perda de carga localizada na expansão súbita e plote-a como uma função da razão de áreas. Compare seus resultados analíticos com os dados da Fig. 8.15.

8.94 Para as condições do Problema 8.86, a vazão predita seria maior ou menor se o atrito fosse desprezado? O aumento de pressão para a mesma vazão seria maior ou menor do que o aumento de pressão dado, se o atrito fosse desprezado? Justifique sua resposta.

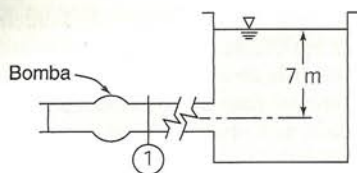
8.95 Água descarrega para a atmosfera a partir de um grande reservatório através de um bocal horizontal de 25 mm de diâmetro, moderadamente arredondado. A superfície livre está 1,5 m acima do plano da saída do bocal. Calcule a variação na vazão quando um trecho curto de tubo de 50 mm de diâmetro é instalado na extremidade do bocal para formar uma expansão súbita. Determine a localização e estime a magnitude da pressão mínima com a expansão súbita no lugar. Se o escoamento fosse sem atrito (com a expansão súbita instalada), a pressão mínima seria mais alta, mais baixa, ou a mesma? Seria a vazão maior, menor, ou a mesma?

8.96 Encontrou-se espaço para a instalação de um difusor cônico, com comprimento de 0,45 m no sistema limpo de ventilação da sala descrito no Problema 8.90. O melhor difusor com esse tamanho deve ser empregado. Admita que os dados da Fig. 8.16 podem ser usados. Determine o ângulo apropriado do difusor e a razão de áreas para essa instalação e estime a vazão em volume que será fornecida após a instalação do difusor.

8.97 Água é descarregada para a atmosfera em regime permanente a partir de um grande tanque, através de um comprimento de tubo de plástico liso. O diâmetro interno do tubo é de 3,18 mm e seu comprimento é de 15,3 m. Calcule a vazão máxima em volume para a qual o escoamento no tubo permanece laminar. Estime o nível de água no tanque abaixo do qual o escoamento será laminar (para escoamento laminar, $\alpha = 2$ e $K_{ent} = 1{,}4$).

8.98 Um experimento de laboratório é organizado para medir queda de pressão em escoamento de água através de um tubo liso. O diâmetro do tubo é de 15,9 mm e seu comprimento é de 3,56 m. Escoamento desenvolve-se no tubo a partir de um reservatório por uma entrada de bordas vivas. Calcule a vazão volumétrica necessária para obter escoamento turbulento no tubo. Avalie a altura diferencial do reservatório requerida para obter escoamento turbulento no tubo.

8.99 Um sistema de água é usado em um laboratório para estudar escoamento em um tubo liso. Para atender uma faixa razoável, o número de Reynolds máximo no tubo deve ser 100.000. O sistema é suprido a partir de um tanque elevado de carga constante. O sistema consiste de uma entrada de bordas vivas, dois cotovelos padrões de 45°, dois cotovelos padrões de 90° e uma válvula gaveta totalmente aberta. O diâmetro interno do tubo é de 15,9 mm e o seu comprimento total é de 9,8 m. Calcule a altura mínima do nível do tanque alimentador acima da descarga do sistema de tubo necessária para alcançar o número de Reynolds desejado.

8.100 Água flui de uma bomba através de um tubo comercial de aço carbono de 0,25 m de diâmetro, por uma distância de 5 km a partir da descarga da bomba, para um reservatório aberto para a atmosfera. O nível da água no reservatório está 7 m acima da descarga da bomba e a velocidade média da água no tubo é de 3 m/s. Calcular a pressão na descarga da bomba.

P8.100

8.101 Água deve escoar por gravidade de um reservatório para outro mais baixo através de um tubo de aço galvanizado retilíneo inclinado. A vazão requerida é de 0,007 m^3/s, o diâmetro interno do tubo é de 50 mm e o comprimento total é de 250 m. Os dois reservatórios são abertos para a atmosfera. Calcule a diferença de nível requerida para manter essa vazão. Trace um gráfico da diferença de elevação Δz como uma função da vazão. Estime a fração de Δz que é devida a perdas localizadas.

8.102 Numa certa instalação de ar-condicionado, é requerida uma vazão de 35 m^3/min de ar nas condições padrão. Um duto quadrado fabricado em chapa de aço fina e lisa, com 0,3 m de lado, deve ser usado. Determine a queda de pressão para um trecho de 30 m de duto horizontal.

8.103 Um experimento de atrito de tubo usando água deve ser projetado para alcançar número de Reynolds de 100.000. O sistema usará tubo liso de PVC de 2 pol. de um tanque de nível constante até a bancada de teste e 40 pés de tubo liso de PVC de 1 pol. montado horizontalmente para a seção de teste. O nível de água no tanque de carga constante é 1,5 pé acima da entrada para a linha de PVC de 2 pol. Determine a velocidade média da água requerida no tubo de 1 pol. Estime a exeqüibilidade do uso de um tanque de carga constante. Calcule a diferença de pressão esperada entre tomadas distanciadas de 15 pés na seção horizontal de teste.

8.104 Considere o escoamento de ar padrão a 35 m^3/min. Compare a queda de pressão por unidade de comprimento para um duto redondo com aquela para dutos retangulares de razão de aspecto 1, 2 e 3. Admita que todos os dutos são lisos, com áreas de seção transversal de 0,1 m^2.

8.105 Dois reservatórios são ligados por meio de três tubos limpos de ferro fundido, em série, $L_1 = 600$ m, $D_1 = 0{,}3$ m, $L_2 = 900$ m, $D_2 = 0{,}4$ m, $L_3 = 1500$ m e $D_3 = 0{,}45$ m. Quando a vazão for de 0,11 m^3/s de água a 15°C, determine a diferença de elevação entre os reservatórios.

8.106 Água, à vazão volumétrica $Q = 300$ gpm, é fornecida por um conjunto de mangueira de incêndio e bocal. A mangueira ($L =$ 200 pés de comprimento total, $D = 3$ pol. e $e/D = 0{,}004$) é constituída por quatro trechos de 50 pés cada acoplados por engates. A entrada é de bordas vivas; o coeficiente de perda localizada para cada engate é $K_c = 0{,}5$, baseado na velocidade média da mangueira. O coeficiente de perda localizada do bocal é $K_n = 0{,}02$, baseado na velocidade do jato de saída, cujo diâmetro é $D_2 = 1{,}0$ pol. Estime a pressão de suprimento requerida para essa vazão.

8.107 Dados foram obtidos por medições num trecho vertical de tubo de ferro galvanizado velho e corroído com diâmetro interno de 1 pol. Numa seção, a pressão era $p_1 = 100$ psig.; numa segunda, 20 pés mais baixa, a pressão era $p_2 = 75{,}5$ psig. A vazão de água era de 0,110 pés^3/s. Estime a rugosidade relativa do tubo. Que porcentagem de economia de potência de bombeamento resultaria se o tubo fosse restaurado ao seu estado de novo, limpo?

8.108 Uma piscina pequena é drenada usando-se uma mangueira de jardim. A mangueira tem 20 mm de diâmetro interno, uma altura de rugosidade de 0,2 mm e 30 m de comprimento. A extremidade livre da mangueira está localizada 3 m abaixo do nível do fundo da piscina. A velocidade média na descarga da mangueira é de 1,2 m/s. Estimar a profundidade da água na piscina para os casos de escoamento com atrito e sem atrito. Use o resultado para explicar por que os efeitos de atrito devem estar presentes.

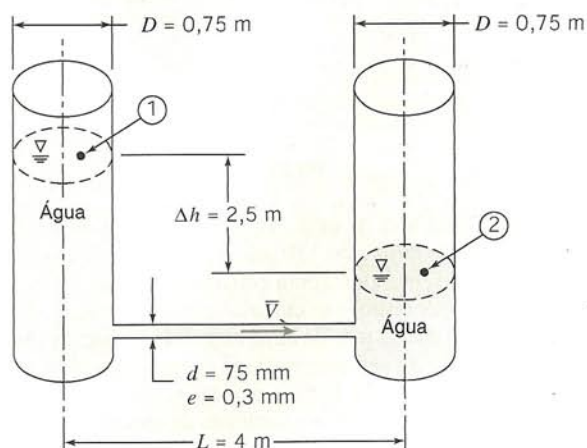
8.109 Em uma certa faixa de número de Reynolds, o escoamento num tubo circular pode ser laminar ou turbulento. O fator de atrito é muito diferente para os dois regimes de escoamento. Tem sido sugerido que isso pode ser demonstrado em laboratório usando escoamento de água partindo de um tanque através de um tubo horizontal e descarregando como um jato livre. Mostre que esse escoamento pode alternar entre os regimes laminar e turbulento. Projete um dispositivo adequado de laboratório, em escala, para demonstrar o fenômeno de escoamento alternante.

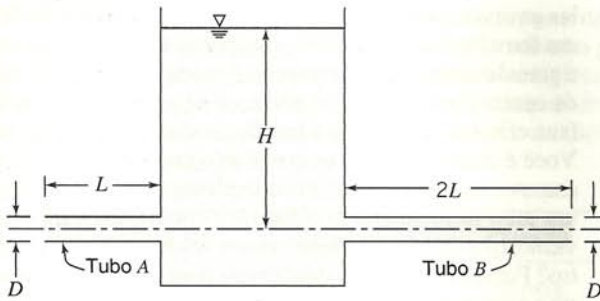
8.110 Uma perfuratriz a ar comprimido requer 0,25 kg/s de ar a 650 kPa (manométrica) na broca. A mangueira que conduz ar do compressor até a perfuratriz tem 40 mm de diâmetro interno. A pressão manométrica máxima na descarga do compressor é de 690 kPa; o ar deixa o compressor a 40°C. Despreze variações na massa específica e quaisquer efeitos devidos à curvatura da mangueira. Calcule o comprimento máximo de mangueira que pode ser usado.

8.111 Gasolina escoa numa linha longa, subterrânea, a uma temperatura constante de 15°C. Duas estações de bombeamento, à mesma elevação, estão distanciadas 13 km uma da outra. A queda de pressão entre as estações é de 1,4 MPa. A tubulação é feita de tubo com 0,6 m de diâmetro. Embora o tubo seja feito de aço comercial, a idade e a corrosão aumentaram a rugosidade do tubo para aquela do ferro galvanizado, aproximadamente. Calcule a vazão em volume.

8.112 Água escoa em regime permanente em um tubo de ferro fundido, horizontal, com 5 pol. de diâmetro. O tubo tem comprimento de 500 pés e a queda de pressão entre as seções ① e ② é de 23 psi. Determine a vazão em volume através do tubo.

8.113 Água escoa em regime permanente em um tubo de ferro fundido com 5 pol. de diâmetro. O tubo tem comprimento de 500 pés e a queda de pressão entre as seções ① e ② é de 23 psi. A seção ② está 30 pés acima da seção ①. Determine a vazão em volume.

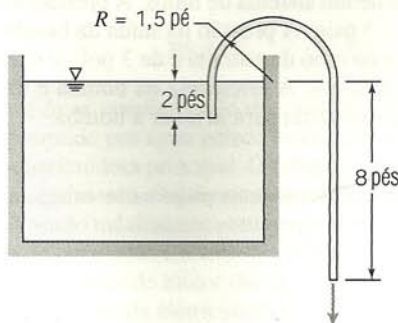
8.114 Dois tubulões verticais de igual diâmetro, abertos para a atmosfera, estão conectados por um tubo reto como mostrado. Água escoa por gravidade de um tubulão para o outro. Para o instante mostrado, estime a taxa de variação do nível de água no tubulão da esquerda.

P8.114

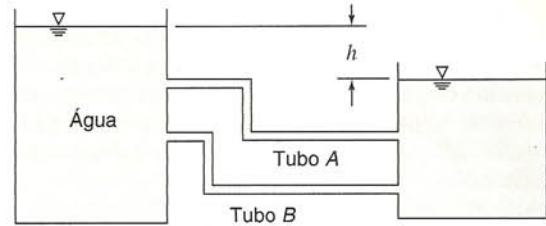
8.115 Dois tubos de ferro galvanizado de diâmetro D estão conectados a um grande reservatório de água como mostrado. O tubo A tem comprimento L e o tubo B tem comprimento $2L$. Ambos os tubos descarregam para a atmosfera. Qual tubo deixará passar a maior vazão? Justifique (sem calcular a vazão em cada tubo). Calcule a maior vazão se $H = 12$ m, $D = 50$ mm e $L = 50$ m.

P8.115

8.116 Um engenheiro de minas planeja fazer mineração hidráulica com um jato d'água de alta velocidade. Um lago está localizado a $H = 300$ m acima do local da mina. A água será fornecida através de $L = 900$ m de uma mangueira de incêndio; a mangueira tem diâmetro interno $D = 75$ mm e rugosidade relativa $e/D = 0{,}01$. Engates, com comprimento equivalente $L_e = 20D$, estão localizados a cada 10 m de mangueira. O diâmetro de saída do bocal é $d = 25$ mm. O seu coeficiente de perda localizada é $K = 0{,}02$ baseado na velocidade de saída. Estime a velocidade de saída máxima que o sistema pode fornecer. Determine a força máxima exercida sobre uma face de rocha por esse jato d'água.

8.117 Use a configuração de escoamento do Problema-Exemplo 8.5 com uma entrada bem arredondada, $d = 10$ m, $D = 26{,}6$ mm e tubo de aço comercial para investigar o efeito do comprimento do tubo horizontal na vazão volumétrica. Qual é a vazão volumétrica para um tubo com 170 m de comprimento? A partir de qual comprimento de tubo o escoamento será laminar? O que acontece à vazão mássica quando o escoamento muda de laminar para turbulento? Que comprimento deve ter o tubo para reduzir a vazão para 1 galão/h?

8.118 Água de um sistema de proteção contra incêndios é suprida de uma torre de água através de um tubo de 6 pol. de ferro fundido. Um manômetro no hidrante indica 90 psig quando não há escoamento de água. O comprimento total da tubulação entre o tanque elevado e o hidrante é de 6000 pés. Determine a altura da torre de água sobre o hidrante. Calcule a vazão volumétrica máxima que pode ser alcançada quando o sistema é acionado pela abertura da válvula do hidrante (suponha que as perdas localizadas são 10% das perdas distribuídas nessa condição). Quando a mangueira é conectada ao hidrante, a vazão volumétrica é de 200 gpm. Determine a leitura da pressão no manômetro nessa condição de escoamento.

8.119 O sifão mostrado é fabricado com tubo de alumínio trefilado de 2 pol. de diâmetro interno. O líquido é água a 60°F. Calcule a vazão em volume através do sifão. Estime a pressão mínima dentro do tubo.

P8.119

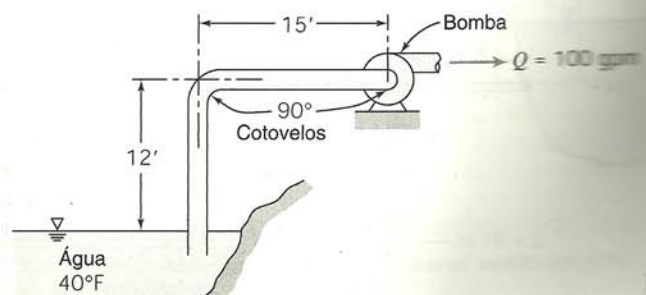
8.120 Dois reservatórios de água estão ligados por tubos de ferro galvanizado, conforme mostrado na figura. Admita $D_A = 75$ mm, $D_B = 50$ mm e $h = 10{,}5$ m. O comprimento de ambos os tubos é de 100 m. Compare as perdas de carga nos tubos A e B. Calcule a vazão volumétrica em cada tubo.

P8.120

8.121 Considere novamente o suprimento de água de Roma do Problema-Exemplo 8.10. Admita que o comprimento de 50 pés de tubo horizontal de diâmetro constante exigido por lei tenha sido instalado. A rugosidade relativa do tubo é de 0,01. Estime a vazão em volume de água fornecida pelo tubo sob as condições de entrada do exemplo. Qual seria o efeito de adicionar o mesmo difusor na extremidade do tubo de 50 pés?

8.122 No Problema-Exemplo 8.10, verificamos que a vazão no distribuidor principal de água seria aumentada pela instalação de um difusor na saída do bocal instalado nesse distribuidor. Vimos que o comissário de águas romano exigia que o tubo conectado ao bocal de cada usuário tivesse o mesmo diâmetro por uma distância mínima de 50 pés medidos a partir do distribuidor principal. Foi o comissário por demais conservativo? Usando os dados do problema, estimar o comprimento do tubo (com $e/D = 0{,}01$) para o qual o sistema de tubo e difusor daria uma vazão igual àquela com o bocal apenas. Plote a vazão volumétrica Q/Q_i como uma função de L/D, onde L é o comprimento do tubo entre o bocal e o difusor, Q_i é a vazão em volume para o bocal apenas e Q é a vazão real com o tubo inserido entre o bocal e o difusor.

8.123 Você está regando o seu gramado com uma mangueira *velha*. Por causa dos depósitos que se formaram ao longo dos anos, a mangueira de 0,75 pol. d.i. tem agora uma altura média da rugosidade de 0,022 pol. Um comprimento de 50 pés da mangueira, ligado ao borrifador, fornece 15 gpm de água (60°F). Calcule a pressão no borrifador, em psi. Estime a vazão se dois comprimentos de 50 pés forem conectados. Admita que a pressão no borrifador varia com a vazão e que a pressão no distribuidor principal de água permanece constante em 50 psig.

8.124 Uma prensa hidráulica é acionada por uma bomba remota de alta pressão. A pressão manométrica na saída da bomba é de 20 MPa, enquanto que a pressão requerida para a prensa é de 19 MPa (manométrica), a uma vazão de 0,032 m^3/min. A prensa e a bomba são interligadas por meio de um tubo liso de aço trefilado com 50 m. O fluido é óleo SAE 10W a 40°C. Determine o diâmetro mínimo de tubo que pode ser utilizado.

8.125 Uma bomba está localizada 15 pés para um lado e 12 pés acima de um reservatório. Ela foi projetada para uma vazão de 100 gpm. Para operação satisfatória, a pressão estática manométrica na aspiração da bomba não deve ser inferior a −20 pés de coluna d'água. Determine o menor tubo de aço comercial que dará o desempenho desejado.

P8.125

8.126 Determine o menor duto retangular, liso, com razão de aspecto 2, que deixará passar 80 m³/min de ar padrão com uma perda de carga de 30 mm de água por 30 m de duto.

8.127 Uma nova instalação industrial requer uma vazão de água de 5,7 m³/min. A pressão manométrica na tubulação principal de água, localizada na rua à 50 m da fábrica, é de 800 kPa. A linha de suprimento exigirá a instalação de 4 cotovelos num comprimento total de 65 m. A pressão manométrica requerida na fábrica é de 500 kPa. Que bitola de tubo de ferro galvanizado deve ser instalada?

8.128 A tubulação do sistema de água gelada que provê ar-condicionado para o campus da Universidade de Purdue é descrita no Problema 8.140. O diâmetro do tubo é selecionado de modo a minimizar o custo total (custo de instalação mais custo de operação). Custos anuais atualizados são comparados, pois o custo de instalação ocorre uma só vez enquanto que o custo de operação continua com a vida útil do sistema. O diâmetro ótimo depende tanto de fatores de custo quanto de condições de operação; a análise deve ser repetida quando essas variáveis mudam. Faça a análise de otimização de uma tubulação. Resolva o Problema 8.140 organizando seus cálculos para estudar o efeito do diâmetro do tubo sobre o custo anual de bombeamento. (Suponha que o fator de atrito permaneça constante.) Obtenha uma expressão para o custo total anual por unidade de entrega (por exemplo, reais por metro cúbico), admitindo que o custo de montagem varia com o quadrado do diâmetro do tubo. Obtenha uma relação analítica para o diâmetro do tubo que resulta no custo mínimo total por unidade de entrega. Considere que a presente tubulação de água gelada foi otimizada para um período de vida útil de 20 anos com taxa de juros de 5% ao ano. Repita a otimização no projeto de um sistema com vazão 30% maior. Plote o custo anual para energia elétrica de bombeamento e custo de instalação, usando as condições de escoamento do Problema 8.140, com diâmetros de tubo entre 300 e 900 mm. Mostre como o diâmetro deve ser escolhido para minimizar o custo total. Quão sensíveis são os resultados às variações na taxa de juros?

8.129 Um experimento de atrito de ar consiste em um tubo de latão liso de 63,5 mm de diâmetro interno; a distância entre tomadas de pressão é de 1,52 m. A queda de pressão é indicada por um manômetro de tubo U com óleo Meridian vermelho. A velocidade na linha de centro U é medida com um pitot. Numa condição de escoamento, $U = 23{,}1$ m/s e a queda de pressão é de 12,3 mm de óleo. Para essa condição, avalie o número de Reynolds baseado na velocidade média do escoamento. Calcule o fator de atrito e compare com o valor obtido do diagrama de Moody (Fig. 8.13).

8.130 Um grande reservatório fornece água para a comunidade. Uma parte do sistema de suprimento de água é mostrado. Água é bombeada de um reservatório para um grande tanque de armazenagem antes de ser enviado para a planta de tratamento de água. O sistema é projetado para fornecer 1310 l/s de água a 20°C. De B para C o sistema consiste de uma entrada de bordas vivas, 760 m de tubo, três válvulas gaveta, quatro cotovelos de 45° e dois cotovelos de 90°. A pressão manométrica em C é 197 kPa. O sistema entre F e G contém 760 m de tubo, duas válvulas gaveta e quatro cotovelos de 90°. Todo o tubo é de 508 mm em ferro fundido. Calcule a velocidade média da água no tubo, a pressão manométrica na seção F, a tensão cisalhante na linha de centro do tubo em C, a potência de acionamento da bomba (sua eficiência é 80%) e a tensão cisalhante na parede em G.

8.131 Você é chamado para comparar os comportamentos dos escoamentos laminar e turbulento completamente desenvolvidos em um tubo horizontal sob diferentes condições. Para a mesma vazão, que escoamento terá a maior velocidade na linha de centro? Por quê? Se o tubo descarrega para a atmosfera, como seria o aspecto esperado da trajetória da corrente de descarga (para a mesma vazão)? Esquematize suas expectativas para cada caso. Para a mesma vazão, qual escoamento daria a maior tensão cisalhante na parede? Por quê? Esboce a distribuição da tensão de cisalhamento τ/τ_w como uma função do raio para cada escoamento. Para o mesmo número de Reynolds, qual escoamento teria a maior queda de pressão por unidade de comprimento? Por quê? Para um diferencial de pressão dado, imposto, qual escoamento teria a maior vazão? Por quê?

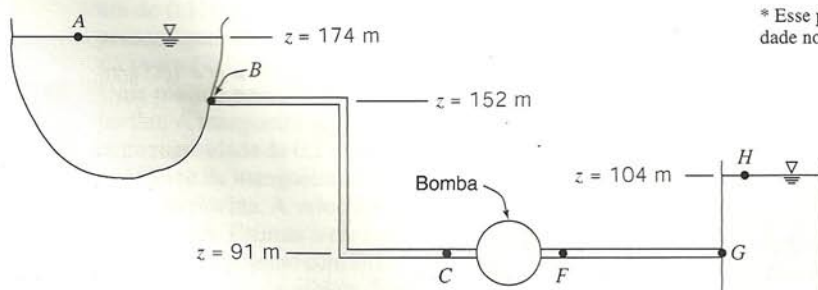
***8.132** Petróleo está fluindo de um grande tanque numa colina para um petroleiro no cais. O compartimento de carga do navio está quase cheio e um operador inicia o processo de interromper o fluxo. Uma válvula no cais é fechada a uma taxa tal que a pressão de 150 psig é mantida na linha imediatamente à montante dela. Admita:

Comprimento da linha do tanque para a válvula	10.000 pés
Diâmetro interno da linha	8,0 pol.
Elevação da superfície do óleo no tanque	200 pés
Elevação da válvula no cais	20 pés
Vazão instantânea	1,5 pé³/s
Perda de carga na linha (exclusiva do fechamento da válvula) para essa vazão	75 pés de óleo
Densidade relativa do óleo	0,88

Calcule a taxa instantânea inicial de variação da vazão.

***8.133** O Problema 8.132 descreve uma situação na qual o fluxo em uma longa tubulação partindo de um tanque elevado é lentamente reduzido para evitar um aumento grande de pressão. Estenda essa análise para predizer e plotar a programação de fechamento (coeficiente de perda da válvula *versus* tempo) necessária para manter a pressão máxima na válvula igual ou abaixo de um dado valor durante o processo de parada de escoamento do tanque.

8.134 O aumento de pressão através de uma bomba d'água é de 9,5 psi quando a vazão volumétrica é de 300 gpm. Se a eficiência da bomba é de 80%, determine a potência fornecida para a bomba.

8.135 Uma bomba impulsiona água a uma vazão constante de 20 lbm/s através de um sistema de tubos. A pressão na sucção da bomba é de −3 psig. A pressão na saída da bomba é de 46 psig. O diâmetro do tubo de entrada é de 3 pol.; o diâmetro do tubo de saída é de 2 pol. A eficiência da bomba é de 70%. Calcule a potência requerida para acionar a bomba.

* Esse problema requer material de seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

A
z = 174 m
B
z = 152 m
Bomba
z = 104 m
H
z = 91 m
C
F
G

P8.130

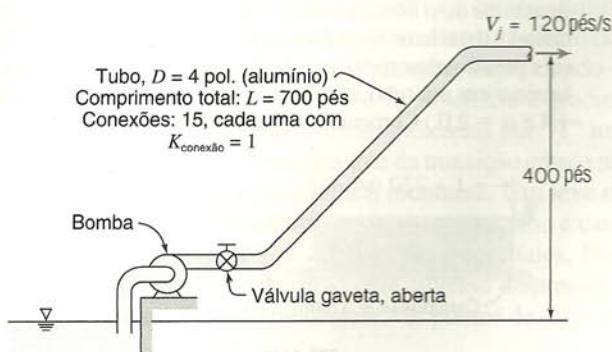
8.136 Uma tubulação de 2,5 pol. (nominal) de transporte de água contém 290 pés de tubo galvanizado reto, duas válvulas gaveta completamente abertas, uma válvula angular completamente aberta, sete cotovelos padrão de 90°, uma entrada de reservatório de bordas vivas e uma descarga livre. As condições de entrada e de saída são:

Localização	Elevação	Pressão
Entrada	50,0 pés	20 psig
Descarga	94,0 pés	0 psig

Uma bomba centrífuga é instalada na linha para mover a água. Que aumento de pressão a bomba deve prover para que a vazão volumétrica seja $Q = 0{,}439$ pé³/s?

8.137 Você é chamado para especificar uma instalação de bomba para suprimento de água da Sears Tower em Chicago. O sistema requer 100 gpm de água bombeada para um reservatório no topo da torre situada a 340 m acima do nível da cidade. A pressão da água na entrada da bomba no nível da rua é de 400 kPa (manométrica). A tubulação deve ser de aço comercial. Determine o diâmetro mínimo requerido para manter a velocidade média da água abaixo de 3,5 m/s na tubulação. Calcule o aumento de pressão requerido através da bomba. Estime a potência mínima necessária para acionar a bomba.

8.138 Óleo cru leve (SG = 0,855 com viscosidade similar à do óleo SAE 30) é bombeado horizontalmente através de um tubo de 12 pol. com 1 milha de comprimento. A altura média de rugosidade é 0,01 pol. A vazão é de 4500 gpm. Calcule a potência requerida para acionar a bomba, se sua eficiência é de 75%.

8.139 Água para resfriamento de perfuratrizes é bombeada de um reservatório para um canteiro de obras usando o sistema de tubo mostrado. A vazão deve ser de 600 gpm e a água deve deixar o bocal borrifador a 120 pés/s. Calcule a mínima pressão necessária na saída da bomba. Estime a potência de acionamento requerida se a eficiência da bomba é de 70%.

P8.139

8.140 O sistema de ar condicionado do campus da Universidade de Purdue é suprido por água gelada bombeada através de uma tubulação distribuidora principal. O tubo faz uma volta com 3 milhas de comprimento. O diâmetro do tubo é de 2 pés e o material é o aço. A vazão máxima em volume de projeto é de 11.200 gpm. A bomba de circulação é acionada por um motor elétrico. As eficiências da bomba e do motor são $\eta_p = 0{,}80$ e $\eta_m = 0{,}90$, respectivamente. O custo da eletricidade é \$0,067/(kW·h). Determine (a) a queda de pressão, (b) a taxa de adição de energia à água e (c) o custo diário de energia elétrica para bombeamento.

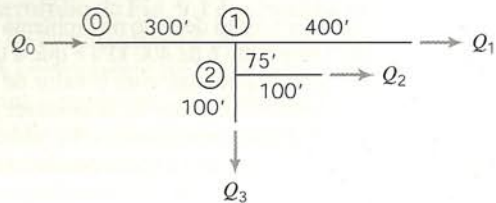
8.141 Óleo cru pesado (SG = 0,925 e $\nu = 1{,}1 \times 10^{-3}$ pé²/s) é bombeado através de uma tubulação colocada sobre piso plano. Essa linha é feita de tubos de aço de 24 pol. d.i. e com espessura de parede de 1/2 pol. A tensão admissível na parede do tubo é limitada em 40.000 psi por considerações de corrosão. É importante manter o óleo a uma pressão na qual os gases permaneçam em solução. A menor pressão recomendada é de 75 psia. A tubulação transporta 400.000 barris por dia (na indústria de petróleo, um barril vale 42 galões). Determine o espaçamento máximo entre estações de bombeamento. Calcule a potência adicionada ao óleo em cada estação de bombeamento.

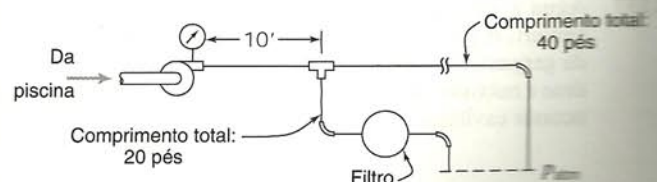
8.142 Um bocal é conectado a uma mangueira de incêndio lisa, revestida de borracha, com 300 pés de comprimento e 1,5 pol. de diâmetro. Água de um hidrante é suprida a 50 psig para uma bomba auxiliar instalada no carro dos bombeiros. Nas condições de projeto, a pressão na entrada do bocal é de 100 psig e a queda de pressão ao longo da mangueira é de 33 psi por 100 pés de comprimento. Determine (a) a vazão de projeto, (b) a velocidade na saída do bocal e (c) a potência requerida para acionar a bomba auxiliar, se sua eficiência é de 70%.

8.143 De acordo com um jornal estudantil de Purdue, a vazão volumétrica através de uma fonte no prédio da engenharia é de 550 gpm. Cada jato d'água pode subir à altura de 10 m. Estime o custo diário de funcionamento da fonte.

8.144 Derivados de petróleo são transportados sobre longas distâncias por uma tubulação como, por exemplo, a tubulação do Alasca (veja o Problema-Exemplo 8.6). Estime a energia necessária para bombear um derivado de petróleo típico, expressa como uma fração da energia transportada através de toda a tubulação. Estabeleça e critique suas hipóteses claramente.

8.145 A curva de altura de carga em função da capacidade para um certo ventilador pode ser aproximada pela equação $H = 30 - 10^7 Q^2$, onde H é a altura de carga estática na saída em polegadas de água e Q é a vazão volumétrica de ar em pé³/min. As dimensões da saída do ventilador são 8 × 16 pol. Determine a vazão de ar liberada pelo ventilador em um duto retangular de 8 × 16 pol. com 200 pés de comprimento.

8.146 O sistema tubular mostrado foi construído com tubos de aço galvanizados de 3 pol. Todas as vazões são grandes o suficiente para que o escoamento seja considerado completamente rugoso. Perdas menores devem ser desprezadas. Determine a pressão na seção ②, em termos de Q_2. Encontre as vazões desconhecidas como frações da vazão de entrada, Q_0. O fluido é água.

P8.146

***8.147** Uma piscina tem um sistema de filtragem de fluxo parcial. Água a 75°F é bombeada da piscina através do sistema mostrado. A bomba entrega 30 gpm. O tubo é de PVC com diâmetro nominal de 3/4 pol. (d.i. = 0,824 pol.). A perda de pressão através do filtro é aproximadamente $\Delta p = 0{,}6Q^2$, onde Δp é dada em psi e Q em gpm. Determine a pressão na bomba e a vazão através de cada ramal do sistema.

P8.147

* Esse problema requer material de seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

8.148 Por que a temperatura da água do chuveiro muda quando a descarga do vaso sanitário é acionada? Esboce as curvas de pressão para os sistemas de suprimento de água quente e de água fria para explicar o que acontece.

8.149 Água a 150°F escoa através de um orifício com diâmetro de 3 pol. instalado num tubo com 6 pol. de diâmetro interno. A vazão em volume é de 300 gpm. Determine a diferença de pressão entre as tomadas de canto.

8.150 Um orifício de bordas vivas com tomadas de canto e um manômetro de coluna d'água são utilizados para medir vazão de ar comprimido. Os seguintes dados são disponíveis:

Diâmetro interno da linha de ar	6 pol.
Diâmetro da placa de orifício	4 pol.
Pressão à montante	90,0 psig
Temperatura do ar	80°F
Deflexão do manômetro	30 pol. de H_2O

Calcule a vazão em volume na linha, expressa em pés cúbicos por minuto de ar padrão (SCFM).

8.151 Um medidor venturi com 75 mm de diâmetro na garganta é instalado numa linha de 150 mm de diâmetro que transporta água a 25°C. A queda de pressão entre a tomada de montante e a garganta do venturi é de 300 mm de mercúrio. Calcule a vazão.

8.152 Gasolina escoa através de um medidor venturi de 2 × 1 pol. A pressão diferencial é de 380 mm de mercúrio. Determine a vazão em volume.

8.153 Considere um venturi horizontal de 2 × 1 pol. com escoamento de água. Para uma pressão diferencial de 20 psi, calcule a vazão em volume.

8.154 A vazão de ar num teste de um motor de combustão interna deve ser medida usando-se um bocal medidor instalado numa câmara pressurizada. O deslocamento do motor é de 1,6 litro e a sua velocidade máxima de operação é de 6000 rpm. Para evitar o carregamento do motor, a queda de pressão máxima no bocal não deve exceder 0,25 m de água. O manômetro pode ser lido com precisão de até ±0,5 mm de água. Determine o diâmetro do bocal que deve ser especificado. Determine a vazão de ar mínima que pode ser medida com precisão de ±2% usando esse dispositivo.

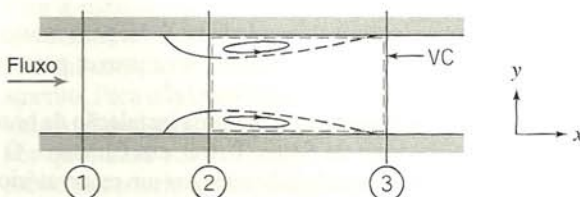
8.155 Ar escoa através do medidor venturi descrito no Problema 8.151. Admita que a pressão à montante é de 400 kPa e que a temperatura é constante em todos os pontos, com o valor de 20°C. Determine a vazão em volume máxima de ar possível para a qual a suposição de escoamento incompressível é válida para aproximações de engenharia. Calcule a correspondente leitura de pressão diferencial num manômetro de mercúrio.

8.156 Querosene a 40°C escoa através de uma linha de 0,3 m de diâmetro numa refinaria. Espera-se que a vazão em massa não ultrapasse 120 kg/s. Um manômetro com uma faixa de 1 m de água está disponível para uso com um medidor de orifício. Especifique um diâmetro adequado do orifício para emprego com esse sistema. Que vazão mínima poderia ser medida, dentro de uma precisão de 10%, se a leitura mínima do manômetro é 1 mm de água?

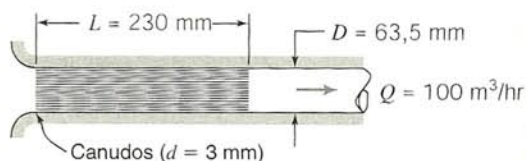
8.157 Água a 70°F escoa em regime permanente através de um venturi. A pressão à montante da garganta é de 5 psig. A área da garganta é de 0,025 pé²; a área à montante é de 0,1 pé². Estime a máxima vazão que pode passar por esse dispositivo sem ocorrer cavitação.

8.158 Considere uma instalação de bocal em um tubo. Aplique as equações básicas ao volume de controle indicado para mostrar que uma perda de carga permanente através do medidor pode ser expressa na forma adimensional como o coeficiente de perda de carga,

$$C_l = \frac{p_1 - p_3}{p_1 - p_2} = \frac{1 - A_2/A_1}{1 + A_2/A_1}$$

Trace um gráfico de C_l como uma função da razão de diâmetros, D_2/D_1.

P8.158

8.159 Em alguns estados do oeste, água para mineração e irrigação era vendida por "polegada de mineiro", a taxa à qual água escoa através de uma abertura de 1 pol.² de área em uma tábua vertical, com altura de até 4 pol., com queda de pressão de 6 a 9 pol. de água. Desenvolva uma equação para prever a vazão mássica através de tal orifício. Especifique claramente a razão de aspecto da abertura, a espessura da tábua e o nível de referência para medida de altura de carga (topo, fundo ou meio da abertura). Mostre que a unidade de medida varia de 38,4 (no Colorado) até 50 (no Arizona, Idaho, Nevada e Utah) polegadas de mineiro para igualar 1 pé³/s.

8.160 Canudos de refrigerante devem ser usados para melhorar o fluxo de ar numa experiência. O preenchimento de um trecho do tubo com os canudos, para formar um "elemento de escoamento laminar", pode permitir a medição direta da vazão e, ao mesmo tempo, atuaria como um retificador de fluxo. Para avaliar essa idéia, determine (a) o número de Reynolds para o escoamento em cada canudo, (b) o fator de atrito para o escoamento em cada canudo e (c) a pressão manométrica na saída dos canudos. (Para escoamento laminar em um tubo, o coeficiente de perda localizada é $K_{ent} \approx 1{,}4$ e $\alpha = 2{,}0$.) Comente sobre a utilidade dessa idéia.

P8.160

8.161 A vazão volumétrica em um duto circular pode ser medida por um tubo de "pitot transverso", isto é, pela medida da velocidade em vários segmentos de área através do duto, seguida do somatório das vazões segmentais. Comente sobre o modo de realização das medidas. Quantifique e plote o erro esperado na medida da vazão como uma função do número de localizações fundamentais usadas no transverso.

Capítulo 9

ESCOAMENTO EXTERNO VISCOSO INCOMPRESSÍVEL

Escoamentos externos são escoamentos sobre corpos imersos em um fluido sem fronteiras. Os escoamentos sobre uma placa plana semi-infinita (Fig. 2.11) e sobre um cilindro (Fig. 2.12*a*) são exemplos de escoamentos externos, que foram discutidos qualitativamente no Cap. 2. Nosso objetivo neste capítulo é quantificar o comportamento dos fluidos viscosos e incompressíveis em escoamentos externos.

Diversos fenômenos que ocorrem no escoamento externo sobre um corpo são ilustrados no esboço do escoamento viscoso com alto número de Reynolds sobre um aerofólio (Fig. 9.1). O escoamento de corrente livre divide-se no ponto de estagnação e circunda o corpo. O fluido em contato com a superfície adquire a velocidade do corpo como resultado da condição de não deslizamento. Camadas limites formam-se tanto na superfície superior quanto na superfície inferior do corpo. (Na Fig. 9.1, as espessuras das camadas limites em ambas as superfícies estão exageradamente ampliadas por motivo de clareza.) O escoamento na camada limite é inicialmente laminar. A transição para escoamento turbulento ocorre a alguma distância do ponto de estagnação, dependendo das condições da corrente livre, rugosidade da superfície e gradiente de pressão. Os pontos de transição estão indicados por "T" na figura. A camada limite turbulenta a jusante da transição cresce mais rapidamente do que a camada laminar a montante. Um leve deslocamento das linhas de corrente do escoamento externo é causado pelo crescimento das camadas limites nas superfícies. Numa região de pressão crescente (um gradiente adverso de pressão), a separação do escoamento poderá ocorrer. Os pontos de separação estão indicados por "S" na figura. O fluido que estava nas camadas limites na superfície do corpo forma a esteira viscosa atrás dos pontos de separação.

A Parte A deste capítulo é devotada aos escoamentos de camada limite. Após uma discussão sobre conceito de camada limite, a solução exata para escoamento de camada limite laminar sobre uma placa plana (gradiente de pressão nulo) é apresentada. Como não existem soluções exatas para camadas limites turbulentas, soluções aproximadas devem ser usadas. A equação integral da quantidade de movimento para gradiente de pressão diferente de zero é deduzida a partir de princípios fundamentais como a base para as soluções aproximadas; essas soluções são consideradas tanto para escoamento laminar quanto para escoamento turbulento sobre placas planas. Embora as soluções aproximadas para escoamentos de camada limite com gradientes de pressão estejam além do escopo deste livro, o efeito de gradientes de pressão sobre escoamentos de camada limite é discutido.

O aerofólio da Fig. 9.1 é submetido a uma força resultante das forças de cisalhamento e de pressão que atuam nas suas superfícies. A componente da força resultante paralela ao escoamento uniforme a montante, U_∞, é chamada de força de arrasto; a componente da força resultante perpendicular a U_∞ é chamada de sustentação. A presença de separação do escoamento impede a determinação analítica de sustentação e arrasto. Na Parte B deste capítulo são apresentadas análises aproximadas e correlações oriundas de dados experimentais para a sustentação e o arrasto sobre diversos corpos de interesse.

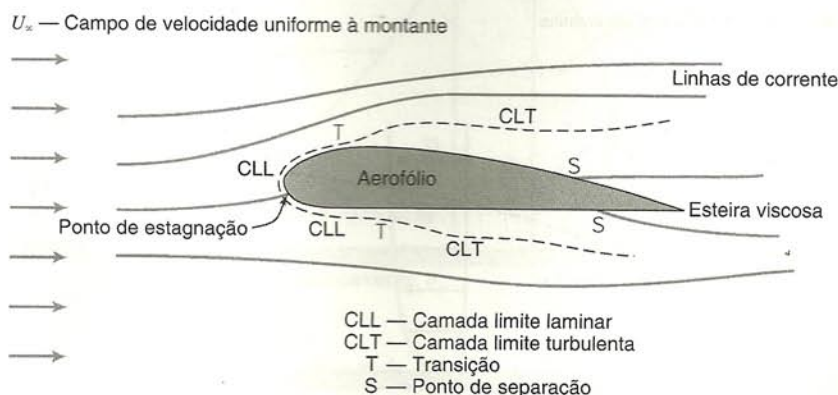



Fig. 9.1 Detalhes de escoamento viscoso em torno de um aerofólio.

PARTE A
CAMADAS LIMITES

9.1 O CONCEITO DE CAMADA LIMITE

O conceito de uma camada limite foi introduzido primeiro por Ludwig Prandtl [1], um alemão estudioso de aerodinâmica, em 1904.

Antes da histórica contribuição de Prandtl, a ciência da mecânica dos fluidos desenvolveu-se em duas direções distintas. A hidrodinâmica teórica evoluiu das equações do movimento de Euler (Eq. 6.2, publicada por Leonhard Euler em 1755) para um fluido não viscoso. Como os resultados da hidrodinâmica contradiziam muitas observações experimentais, engenheiros práticos desenvolveram suas próprias artes empíricas de hidráulica. Elas eram fundamentadas em dados experimentais e diferiam significativamente do enfoque puramente matemático da hidrodinâmica teórica.

Embora as equações completas que descrevem o movimento de um fluido viscoso (as equações de Navier-Stokes, Eqs. 5.26, desenvolvidas por Navier, 1827, e independentemente por Stokes, 1845) fossem conhecidas anteriormente a Prandtl, as dificuldades matemáticas na resolução dessas equações (exceto para alguns casos simples) proibiam um tratamento teórico de escoamentos viscosos. Prandtl mostrou [1] que muitos escoamentos viscosos podem ser analisados dividindo-os em duas regiões, uma perto das fronteiras sólidas, a outra cobrindo o restante do escoamento. Apenas na delgada região adjacente a uma fronteira sólida (a camada limite), o efeito da viscosidade é importante. Na região fora da camada limite, o efeito da viscosidade é desprezível e o fluido pode ser tratado como invíscido.

O conceito de camada limite forneceu o elo que faltava entre a teoria e a prática. Além disso, esse conceito permitiu a resolução de problemas de escoamentos viscosos que seriam impossíveis de resolver pela aplicação das equações de Navier-Stokes ao campo de escoamento completo.[1] Dessa forma, a introdução do conceito de camada limite marcou o começo da era moderna da mecânica dos fluidos.

O desenvolvimento de uma camada limite sobre uma superfície sólida foi discutido na Seção 2.5.1. O desenvolvimento de uma camada limite laminar sobre uma placa plana foi ilustrado na Fig. 2.11. Na camada limite, tanto as forças viscosas quanto as de inércia são importantes. Por isso, não é surpreendente que o número de Reynolds (que representa a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas) seja significativo na caracterização dos escoamentos de camada limite. O comprimento característico usado no número de Reynolds é o comprimento, no sentido do escoamento, sobre o qual a camada limite desenvolveu-se, ou alguma medida da sua espessura.

Da mesma forma que em um duto, o escoamento em uma camada limite pode ser laminar ou turbulento. Não há valor singular do número de Reynolds no qual ocorre a transição de regime laminar para turbulento na camada limite. Entre os fatores que afetam a transição em uma camada limite estão gradiente de pressão, rugosidade superficial, transferência de calor, forças de campo e perturbações de corrente livre. Considerações detalhadas desses efeitos estão além dos objetivos deste livro.

Em muitas situações reais, uma camada limite desenvolve-se sobre uma superfície longa essencialmente plana. Os exemplos incluem escoamentos sobre cascos de navios e de submarinos, asas de aviões e movimentos atmosféricos sobre terreno plano. Como as características básicas de todos esses escoamentos são ilustradas no caso mais simples de escoamento sobre uma placa plana, consideraremos este em primeiro lugar.

Um painel qualitativo do crescimento da camada limite sobre uma placa plana é mostrado na Fig. 9.2. A camada limite é laminar por uma curta distância a jusante da borda de ataque; a transição ocorre sobre uma região da placa em vez de em uma linha única transversal à placa. A região de transição estende-se para jusante até o local onde o escoamento de camada limite torna-se completamente turbulento.

Para escoamento incompressível sobre uma placa plana lisa (gradiente de pressão zero), na ausência de transferência de calor, a transição de escoamento laminar para turbulento na camada limite pode ser retardada para um número de Reynolds, $Re_x = \rho U x/\mu$, maior que um milhão, se as perturbações externas forem minimizadas. (O comprimento x é medido a partir da borda de ataque da placa.) Para fins de cálculo, sob condições típicas de escoamento, considera-se que a transição geralmente ocorre em um comprimento correspondente ao número de Reynolds de 500.000. Para ar na condição padrão, com velocidade de corrente livre $U = 30$ m/s, isso corresponde ao comprimento $x \approx 0{,}24$ m ao longo da placa. No painel qualitativo da Fig. 9.2, mostramos a camada limite turbulenta crescendo mais depressa que a laminar. Em seções posteriores deste capítulo, mostraremos que isso é mesmo verdadeiro.

[1] Hoje, soluções computacionais das equações de Navier-Stokes são comuns.

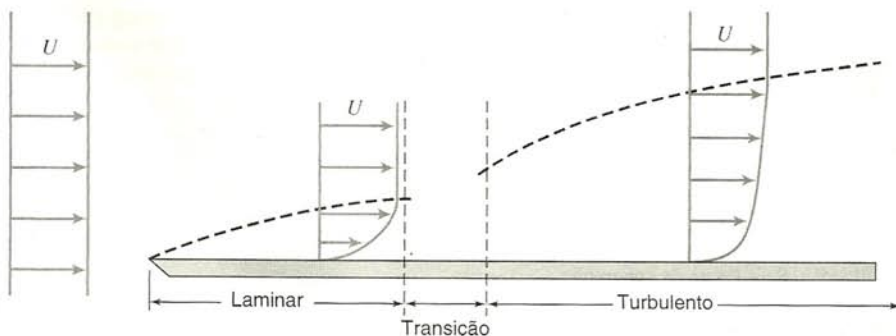



Fig. 9.2 Camada limite sobre uma placa plana (espessura vertical exageradamente ampliada).

9.2 ESPESSURAS DE CAMADA LIMITE

A camada limite é a região adjacente a uma superfície sólida na qual as forças viscosas são importantes. A *espessura de perturbação* ou simplesmente *espessura*, δ, da camada limite é usualmente definida como a distância da superfície ao ponto em que a velocidade é 99% da velocidade de corrente livre. Como o perfil de velocidade na camada limite une-se suave e assintoticamente com a velocidade de corrente livre, a espessura de camada limite, δ, é difícil de medir.

O efeito das forças viscosas na camada limite é retardar o escoamento. A vazão em massa adjacente a uma superfície sólida é inferior àquela que passaria pela mesma região na ausência de uma camada limite. O decréscimo de vazão em massa devido à influência das forças viscosas é $\int_0^\infty \rho(U-u)w\,dy$, onde w é a largura da superfície na direção perpendicular ao escoamento. Se as forças viscosas estivessem ausentes, a velocidade numa seção seria U. A *espessura de deslocamento*, δ^*, é a distância pela qual a fronteira sólida teria que ser deslocada num escoamento sem atrito para dar o mesmo déficit de vazão em massa que existe na camada limite. Deslocar a fronteira de uma distância δ^* resultaria numa deficiência de vazão em massa de $\rho U\delta^* w$. Dessa forma, como ilustrado na Fig. 9.3a,

$$\rho U\delta^* w = \int_0^\infty \rho(U-u)w\,dy$$

Para escoamento incompressível, ρ = constante, e

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)dy \approx \int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U}\right)dy \qquad (9.1)$$

Como $u \approx U$ para $y = \delta$, o integrando é essencialmente zero para $y \geq \delta$. A aplicação do conceito de espessura de deslocamento é ilustrado no Problema-Exemplo 9.1.

A diminuição de fluxo dentro da camada limite também acarreta uma redução em fluxo de quantidade de movimento (comparado com o escoamento não viscoso) numa seção. A deficiência de quantidade de movimento da vazão mássica real, $\int_0^\infty \rho uw\,dy$, através da camada limite é $\int_0^\infty \rho u(U-u)w\,dy$. Na ausência de forças viscosas, seria necessário mover a fronteira sólida para dentro do escoamento a fim de obter uma deficiência de quantidade de movimento; com essa distância (a espessura de quantidade de movimento) denotada por θ, para ρ constante a deficiência de quantidade de movimento seria $\rho U^2\theta w$. A *espessura de quantidade de movimento*, θ, é definida como a espessura de uma camada de fluido, com velocidade U, para a qual o fluxo de quantidade de movimento é igual ao déficit do fluxo de quantidade de movimento através da camada limite. Dessa forma, como ilustrado na Fig. 9.3*b*, para ρ = constante

$$\rho U^2\theta = \int_0^\infty \rho u(U-u)\,dy$$

e

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \approx \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \qquad (9.2)$$

Novamente, o integrando é essencialmente zero para $y \geq \delta$.

As espessuras de deslocamento e de quantidade de movimento, δ^* e θ, são *espessuras integrais* porque as suas definições, Eqs. 9.1 e 9.2, estão em termos de integrais através da camada limite. Como elas são definidas em termos de integrais cujos integrandos desaparecem na corrente livre, elas são apreciavelmente mais fáceis de avaliar, com precisão, a partir de dados experimentais do que a espessura de perturbação, δ, da camada limite. Esse fato, juntamente com os seus significados físicos, é responsável pelo uso comum dessas espessuras de camada limite.

Vimos que o perfil de velocidade na camada limite une-se assintoticamente com a velocidade de corrente livre local. Um pequeno erro é introduzido se a leve diferença entre as velocidades na borda da camada limite for ignorada em uma análise aproximada. Hipóteses simplificadoras usualmente feitas em análises de engenharia para o desenvolvimento da camada limite são:

(*a*) Espessura de deslocamento, δ^*:

$U\delta^* = \int_0^\infty (U-u)\,dy$

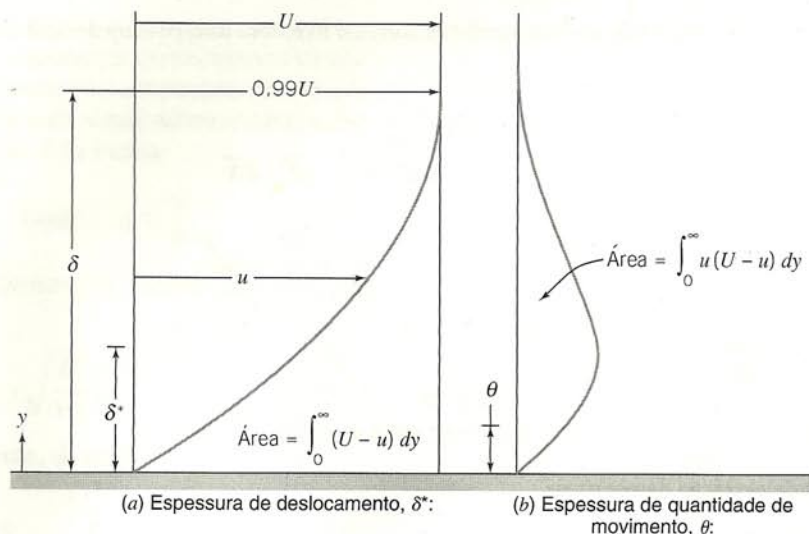
(*b*) Espessura de quantidade de movimento, θ:

$U^2\theta = \int_0^\infty u(U-u)\,dy$

Fig. 9.3 Definições de espessura de camada limite.

1. $u \to U$ para $y = \delta$
2. $\partial u/\partial y \to 0$ para $y = \delta$
3. $v \ll U$ dentro da camada limite

Os resultados das análises desenvolvidas nas duas próximas seções mostram que a camada limite é muito fina comparada com o seu comprimento de desenvolvimento ao longo da superfície. Então, é também razoável supor:

4. A variação de pressão através da camada limite fina é desprezível. A distribuição de pressão da corrente livre é *impressa* na camada limite.

EXEMPLO 9.1 — Camada Limite em Escoamento em Canal

Um túnel de vento de laboratório tem uma seção de teste quadrada, com 305 mm de lado. Perfis de velocidade de camada limite são medidos em duas seções, e as espessuras de deslocamento são avaliadas a partir dos perfis medidos. Na seção ①, onde a velocidade livre é $U_1 = 26$ m/s, a espessura de deslocamento é $\delta_1^* = 1{,}5$ mm. Na seção ②, localizada a jusante da seção ①, $\delta_2^* = 2{,}1$ mm. Calcule a variação de pressão estática entre as seções ① e ②. Expresse o resultado como uma fração da pressão dinâmica de corrente livre na seção ①. Admita condições de atmosfera padrão.

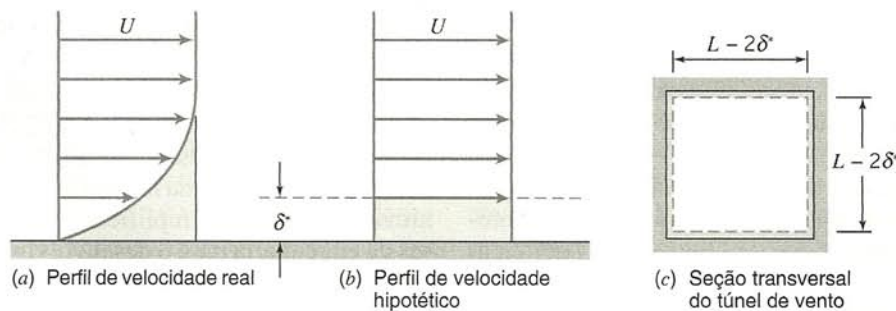
PROBLEMA-EXEMPLO 9.1

DADOS: Escoamento de ar padrão num túnel de vento de laboratório. A seção de teste é quadrada com $L = 305$ mm. As espessuras de deslocamento são $\delta_1^* = 1{,}5$ mm e $\delta_2^* = 2{,}1$ mm. A velocidade de corrente livre é $U_1 = 26$ m/s.

DETERMINAR: A variação na pressão estática entre as seções ① e ②. (Expresse o resultado como uma fração da pressão dinâmica de corrente livre na seção ①.)

SOLUÇÃO:

Use o conceito de espessura de deslocamento para determinar a área efetiva de escoamento para o fluxo de corrente livre, fora das camadas limites delgadas. Substitua os perfis reais de velocidade de camada limite por perfis uniformes, como esboçado nas figuras.

(*a*) Perfil de velocidade real (*b*) Perfil de velocidade hipotético (*c*) Seção transversal do túnel de vento

Aplique as equações da continuidade e de Bernoulli ao escoamento de corrente livre fora da espessura de deslocamento de camada limite, onde os efeitos viscosos são desprezíveis.

Equações básicas:

$$0 = \cancelto{0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + \cancel{gz_1} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{gz_2}$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento uniforme em cada seção fora de δ^*
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente entre as seções ① e ②
(5) Não há efeitos de atrito na corrente livre
(6) Variações de elevação desprezíveis

Da equação de Bernoulli, obtemos

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(U_2^2 - U_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho U_1^2\left[\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 - 1\right]$$

ou

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 - 1$$

Da continuidade, $V_1A_1 = U_1A_1 = V_2A_2 = U_2A_2$, logo $\frac{U_2}{U_1} = \frac{A_1}{A_2}$, onde $A = (L - 2\delta^*)^2$ é a área efetiva de escoamento. Substituindo dá

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1 = \left[\frac{(L - 2\delta_1^*)^2}{(L - 2\delta_2^*)^2}\right]^2 - 1$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2} = \left[\frac{305 - 2(1{,}5)}{305 - 2(2{,}1)}\right]^4 - 1 = 0{,}0161 \quad \text{ou} \quad 1{,}61\% \qquad \frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2}$$

Esse problema ilustra a aplicação do conceito de espessura de deslocamento. O escoamento real, viscoso, com camadas limites é modelado como um escoamento uniforme, não viscoso, deslocado das fronteiras de uma distância δ^*.

*9.3 CAMADA LIMITE LAMINAR DE PLACA PLANA: SOLUÇÃO EXATA

A solução para a camada limite laminar numa placa plana horizontal foi obtida por H. Blasius [2], aluno de Prandtl, em 1908. Para escoamento bidimensional, permanente, incompressível, com gradiente de pressão nulo, as equações que governam o movimento reduzem-se a [3]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{9.3}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{9.4}$$

com condições de fronteira

$$\begin{aligned} &\text{para } y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \\ &\text{para } y = \infty, \quad u = U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Blasius argumentou que o perfil de velocidade, u/U, deveria ser *similar* para todos os valores de x quando traçado contra uma distância adimensional em relação à parede; a espessura de camada limite, δ, era uma escolha natural para tornar adimensional a distância da parede. Então a solução é da forma

$$\frac{u}{U} = g(\eta) \quad \text{onde} \quad \eta \propto \frac{y}{\delta} \tag{9.6}$$

Fundamentado na solução de Stokes [4], Blasius concluiu que $\delta \propto \sqrt{\nu x/U}$ e estabeleceu

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \tag{9.7}$$

Introduzindo a função de corrente, ψ, onde

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.4}$$

satisfazem a equação de continuidade (Eq. 9.3) identicamente; substituindo u e v na Eq. 9.4, obtemos uma equação em que ψ é a única variável dependente. A definição de uma função de corrente adimensional como

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U}} \tag{9.8}$$

faz $f(\eta)$ a variável dependente e η a variável independente na Eq. 9.4. Com ψ definido pela Eq. 9.8 e η definido pela Eq. 9.7, podemos avaliar cada um dos termos da Eq. 9.4.

As componentes de velocidade são dadas por

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x U}\frac{df}{d\eta}\sqrt{\frac{U}{\nu x}} = U\frac{df}{d\eta} \tag{9.9}$$

e

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left[\sqrt{\nu x U}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}f\right] =$$

$$= -\left[\sqrt{\nu x U}\frac{df}{d\eta}\left(-\frac{1}{2}\eta\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}f\right]$$

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\left[\eta\frac{df}{d\eta} - f\right] \tag{9.10}$$

Derivando as componentes da velocidade, também pode ser mostrado que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U}{2x}\eta\frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U\sqrt{U/\nu x}\frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\nu x}\frac{d^3 f}{d\eta^3}$$

*Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

Substituindo essas expressões na Eq. 9.4, obtemos

$$2\frac{d^3f}{d\eta^3} + f\frac{d^2f}{d\eta^2} = 0 \tag{9.11}$$

com condições de fronteira:

$$\text{para } \eta = 0, \quad f = \frac{df}{d\eta} = 0$$

$$\text{para } \eta \to \infty, \quad \frac{df}{d\eta} = 1 \tag{9.12}$$

As equações diferenciais parciais de segunda ordem que governam o crescimento da camada limite numa placa plana (Eqs. 9.3 e 9.4) foram transformadas numa equação diferencial não linear de terceira ordem (Eq. 9.11) com condições de fronteira dadas pela Eq. 9.12. Não é possível resolver a Eq. 9.11 em forma fechada; Blasius resolveu-a usando uma expansão em série exponencial em torno de $\eta = 0$, combinada com uma expansão assintótica para $\eta \to \infty$. A mesma equação foi mais tarde resolvida com maior precisão — novamente usando métodos numéricos — por Howarth [5], que divulgou resultados com cinco casas decimais. Os valores numéricos de f, $df/d\eta$, e $d^2f/d\eta^2$ na Tabela 9.1 foram calculados com um microcomputador, usando integração numérica de Runge-Kutta de quarta ordem.

Tabela 9.1 A Função $f(\eta)$ para a Camada Limite Laminar ao longo de uma Placa Plana em Ângulo de Incidência Zero

$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U}$	f''
0	0	0	0,3321
0,5	0,0415	0,1659	0,3309
1,0	0,1656	0,3298	0,3230
1,5	0,3701	0,4868	0,3026
2,0	0,6500	0,6298	0,2668
2,5	0,9963	0,7513	0,2174
3,0	1,3968	0,8460	0,1614
3,5	1,8377	0,9130	0,1078
4,0	2,3057	0,9555	0,0642
4,5	2,7901	0,9795	0,0340
5,0	3,2833	0,9915	0,0159
5,5	3,7806	0,9969	0,0066
6,0	4,2796	0,9990	0,0024
6,5	4,7793	0,9997	0,0008
7,0	5,2792	0,9999	0,0002
7,5	5,7792	1,0000	0,0001
8,0	6,2792	1,0000	0,0000

O perfil de velocidade é obtido na forma adimensional plotando-se u/U *versus* η, com os valores da Tabela 9.1. O perfil resultante é apresentado na Fig. 9.3*a*. Perfis de velocidade medidos experimentalmente mostram excelente concordância com a solução analítica. Os perfis de todos os locais, numa placa plana, são similares; eles caem num só perfil quando traçados em coordenadas adimensionais.

Da Tabela 9.1, verificamos que para $\eta = 5{,}0$, $u/U = 0{,}992$. Com a espessura de camada limite, δ, definida como o valor de y para o qual $u/U = 0{,}99$, a Eq. 9.7 dá

$$\delta \approx \frac{5{,}0}{\sqrt{U/\nu x}} = \frac{5{,}0x}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.13}$$

A espessura de camada limite, δ, é indicada sobre o perfil de velocidade da Fig. 9.3*a*.

A tensão de cisalhamento na parede pode ser expressa como

$$\tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y}\bigg]_{y=0} = \mu U\sqrt{U/\nu x}\frac{d^2f}{d\eta^2}\bigg]_{\eta=0}$$

Então

$$\tau_w = 0{,}332U\sqrt{\rho\mu U/x} = \frac{0{,}332\rho U^2}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.14}$$

e o coeficiente de tensão de cisalhamento na parede, C_f, é dado por

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.15}$$

Cada um dos resultados para a espessura de camada limite, δ, para a tensão de cisalhamento na parede, τ_w, e para o coeficiente de atrito superficial, C_f, Eqs. 9.13 a 9.15, depende do número de Reynolds, Re_x, elevado à potência 1/2. A espessura de camada limite aumenta segundo $x^{1/2}$, e a tensão de cisalhamento na parede e o coeficiente de atrito superficial variam de acordo com $1/x^{1/2}$. Esses resultados caracterizam o comportamento da camada limite laminar sobre uma placa plana.

EXEMPLO 9.2 — Camada Limite Laminar sobre uma Placa Plana: Solução Exata

Utilize os resultados numéricos apresentados na Tabela 9.1 a fim de avaliar as seguintes quantidades para escoamento laminar de camada limite sobre uma placa plana:

(a) δ^*/δ (para $\eta = 5$ e quando $\eta \to \infty$).
(b) v/U na borda da camada limite.
(c) A razão entre a inclinação de uma linha de corrente na borda da camada limite e a inclinação de δ *versus* x.

PROBLEMA-EXEMPLO 9.2

DADOS: Solução numérica para camada limite laminar de placa plana, Tabela 9.1.

DETERMINAR: **(a)** δ^*/δ (para $\eta = 5$ e quando $\eta \to \infty$).
(b) v/U na borda da camada limite.
(c) A razão entre a inclinação de uma linha de corrente na borda da camada limite e a inclinação de δ *versus* x.

SOLUÇÃO:

A espessura de deslocamento é definida pela Eq. 9.1 como

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Da Eq. 9.7, $\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$, logo $y = \eta\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ e $dy = d\eta\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$.

Assim

$$\delta^* = \int_0^{\eta_{\text{máx}}} \left(1 - \frac{u}{U}\right)\sqrt{\frac{\nu x}{U}} d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^{\eta_{\text{máx}}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

Nota: Correspondendo ao limite superior de y na Eq. 9.1, $\eta_{\text{máx}} = \infty$, ou $\eta_{\text{máx}} \approx 5$.

Da Eq. 9.13,

$$\delta \approx \frac{5}{\sqrt{U/\nu x}}$$

ou

$$\sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{\delta}{5}$$

Dessa forma

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5}\int_0^{\eta_{\text{máx}}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

Substituindo da Eq. 9.9, obtemos

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5}\int_0^{\eta_{\text{máx}}} \left(1 - \frac{df}{d\eta}\right) d\eta$$

Integrando dá

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5}\Big[\eta - f(\eta)\Big]_0^{\eta_{\text{máx}}}$$

Avaliando para $\eta_{\text{máx}} = 5$, obtemos

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5}(5{,}0 - 3{,}2833) = 0{,}343 \qquad \frac{\delta^*}{\delta}(\eta = 5)$$

A quantidade $\eta - f(\eta)$ torna-se constante para $\eta > 7$. Avaliando para $\eta_{\text{máx}} = 8$, resulta

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5}(8{,}0 - 6{,}2792) = 0{,}344 \qquad \frac{\delta^*}{\delta}(\eta \to \infty)$$

Assim, $\delta^*_{\eta \to \infty}$ é 0,24% maior que $\delta^*_{\eta = 5}$.
Da Eq. 9.10,

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\left(\eta\frac{df}{d\eta} - f\right), \text{ logo } \frac{v}{U} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}\left(\eta\frac{df}{d\eta} - f\right) = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}}\left(\eta\frac{df}{d\eta} - f\right)$$

Avaliando na borda da camada limite ($\eta = 5$), obtemos

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}}[5(0{,}9915) - 3{,}2833] = \frac{0{,}837}{\sqrt{Re_x}} \approx \frac{0{,}84}{\sqrt{Re_x}} \qquad \frac{v}{U}(\eta = 5)$$

Dessa forma, v é apenas 0,84% de U para $Re_x = 10^4$, e apenas cerca de 0,12% de U para $Re_x = 5 \times 10^5$.

A inclinação de uma linha de corrente na borda da camada limite é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{linha de corrente}} = \frac{v}{u} = \frac{v}{U} \approx \frac{0{,}84}{\sqrt{Re_x}}$$

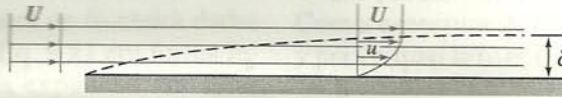
A inclinação da borda da camada limite pode ser obtida da Eq. 9.13 .

$$\delta \approx \frac{5}{\sqrt{U/\nu x}} = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

de modo que

$$\frac{d\delta}{dx} = 5\sqrt{\frac{\nu}{U}}\frac{1}{2}x^{-1/2} = 2{,}5\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{2{,}5}{\sqrt{Re_x}}$$

Assim $\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{linha de corrente}} = \frac{0{,}84}{2{,}5}\frac{d\delta}{dx} = 0{,}336\frac{d\delta}{dx}$ ← $\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{linha de corrente}}$

Esse resultado mostra que as linhas de corrente atravessam a borda da camada limite, como esboçado:

{Esse problema ilustra a aplicação de resultados da solução numérica da camada limite laminar sobre uma placa plana.}

9.4 A EQUAÇÃO INTEGRAL DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A solução exata de Blasius forneceu uma expressão para a espessura de camada limite, $\delta(x)$, e para a tensão de cisalhamento na parede, $\tau_w(x)$. Verificou-se que os perfis de velocidade eram similares quando plotados na forma adimensional de u/U *versus* y/δ. Uma solução analítica fechada para o perfil de velocidade não era possível; uma solução numérica foi necessária.

Métodos aproximados podem ser empregados para obter soluções para o escoamento de camada limite laminar. Os mesmos métodos aproximados podem ser usados para determinar características do desenvolvimento de camada limite turbulenta. Como soluções exatas para camadas limites turbulentas não existem, técnicas de soluções aproximadas são necessárias nesse caso. Nesta seção, desenvolveremos uma análise que nos possibilitará obter, com razoável precisão, a espessura de uma camada limite laminar ou turbulenta, como uma função da distância ao longo de um corpo. Aplicaremos de novo as equações básicas para um volume de controle diferencial. Nosso objetivo é desenvolver uma equação que nos capacite a prever (pelo menos aproximadamente) a maneira pela qual a camada limite cresce como uma função da distância ao longo do corpo. Deduziremos uma relação que pode ser aplicada tanto ao escoamento laminar quanto ao turbulento; a relação não é restrita aos escoamentos com gradientes de pressão nulos.

Considere um escoamento permanente, incompressível, bidimensional, sobre uma superfície sólida. A espessura de camada limite, δ, cresce de algum modo com o aumento da distância, x. Para nossa análise, escolhemos um volume de controle diferencial, de comprimento dx, largura w e altura $\delta(x)$, conforme mostrado na Fig. 9.4. A velocidade da corrente livre é $U(x)$.

Desejamos determinar a espessura de camada limite, δ, como uma função de x. Haverá fluxo de massa através das superfícies *ab* e *cd* do volume de controle diferencial *abcd*. E quanto a *bc*? Haverá fluxo de massa através dessa superfície? Na nossa discussão anterior a respeito de camadas limites (Cap. 2), e no Problema-Exemplo 9.2, verificamos que a borda da camada limite não é uma linha de corrente. Assim, haverá fluxo de massa através da superfície *bc*. Como a superfície de controle *ad* é adjacente a uma fronteira sólida, não haverá fluxo de massa através de *ad*. Antes de considerarmos as forças que atuam sobre o volume de controle e os fluxos de quantidade de movimento através da superfície de controle, apliquemos a equação da continuidade a fim de determinar o fluxo de massa através de cada porção da superfície de controle.

Fig. 9.4 Volume de controle diferencial em uma camada limite.

a. Equação da Continuidade

Equação básica:

$$0 = \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{\text{VC}} \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento bidimensional

Portanto

$$0 = \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$0 = \dot{m}_{ab} + \dot{m}_{bc} + \dot{m}_{cd}$$

ou

$$\dot{m}_{bc} = -\dot{m}_{ab} - \dot{m}_{cd}$$

Avaliemos agora esses termos para o volume de controle de largura w:

Superfície	*Fluxo de Massa*
ab	A superfície *ab* está localizada em x. Como o escoamento é bidimensional (não há variação com z), o fluxo de massa através de *ab* é $$\dot{m}_{ab} = -\left\{\int_0^\delta \rho u\,dy\right\} w$$
cd	A superfície *cd* está localizada em $x + dx$. Expandindo $\dot{m}$ numa série de Taylor em torno da localização x, obtemos $$\dot{m}_{x+dx} = \dot{m}_x + \left.\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}\right]_x dx$$ e, por conseguinte, $$\dot{m}_{cd} = \left\{\int_0^\delta \rho u\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta \rho u\,dy\right] dx\right\} w$$
bc	Deste modo, para a superfície *bc* obtemos $$\dot{m}_{bc} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta \rho u\,dy\right] dx\right\} w$$

Consideremos agora os fluxos de quantidade de movimento e as forças associadas com o volume de controle *abcd*. Essas quantidades são relacionadas pela equação da quantidade de movimento.

b. Equação da Quantidade de Movimento

Apliquemos a componente x da equação da quantidade de movimento ao volume de controle *abcd*:

Equação básica:

$$= 0(3) = 0(1)$$

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{VC} u\rho\, d\forall + \int_{SC} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Suposição: (3) $F_{B_x} = 0$

Então

$$F_{S_x} = \text{mf}_{ab} + \text{mf}_{bc} + \text{mf}_{cd}$$

onde mf representa a componente x do fluxo de quantidade de movimento.

Para aplicar essa equação ao volume de controle diferencial *abcd*, devemos obter expressões para o fluxo da quantidade de movimento na direção x, através da superfície de controle, e também das forças superficiais que atuam sobre o volume de controle na direção x. Vamos considerar o fluxo de quantidade de movimento em primeiro lugar e, de novo, consideraremos cada segmento da superfície de controle.

Superfície	*Fluxo de Quantidade de Movimento* (mf)
ab	A superfície *ab* está localizada em x. Como o escoamento é bidimensional, o fluxo de quantidade de movimento segundo x, através de *ab*, é $$\text{mf}_{ab} = -\left\{\int_0^\delta u\rho u\,dy\right\} w$$
cd	A superfície *cd* está localizada em $x + dx$. Expandindo o fluxo de quantidade de movimento segundo x (mf) numa série de Taylor em torno de x, obtemos $$\text{mf}_{x+dx} = \text{mf}_x + \left.\frac{\partial \text{mf}}{\partial x}\right]_x dx$$ ou $$\text{mf}_{cd} = \left\{\int_0^\delta u\rho u\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta u\rho u\,dy\right] dx\right\} w$$
bc	Como a massa atravessando a superfície *bc* tem componente de velocidade U na direção x, o fluxo de quantidade de movimento segundo x, através de *bc*, é dado por $$\text{mf}_{bc} = U\dot{m}_{bc}$$ $$\text{mf}_{bc} = -U\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta \rho u\,dy\right] dx\right\} w$$

Do que foi exposto, podemos avaliar o fluxo resultante de quantidade de movimento segundo x, através da superfície de controle, como

$$\int_{SC} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\left\{\int_0^\delta u\rho u\,dy\right\} w + \left\{\int_0^\delta u\rho u\,dy\right\} w + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta u\rho u\,dy\right] dx\right\} w - U\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta \rho u\,dy\right] dx\right\} w$$

Agrupando termos, verificamos que

$$\int_{SC} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta u\rho u dy\right] dx - U\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta \rho u dy\right] dx\right\} w$$

Agora que temos uma expressão adequada para o fluxo de quantidade de movimento segundo x, através da superfície de controle, consideremos as forças superficiais que atuam sobre o volume de controle na direção x. (Por conveniência, o volume de controle diferencial foi redesenhado na Fig. 9.5.) Reconhecemos que as forças normais com componentes não nulas na direção x atuam sobre três superfícies do volume de controle. Além disso, uma força cisalhante atua sobre a superfície *ad*. Como o gradi-

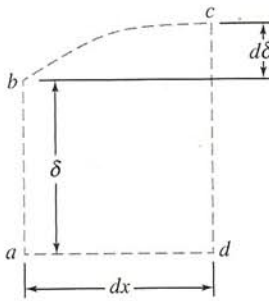



Fig. 9.5 Volume de controle diferencial.

ente de velocidade vai a zero na borda da camada limite, a força de cisalhamento atuando ao longo de bc é desprezível.

Superfície	*Força*
ab	Se a pressão em x for p, então a força atuando na superfície ab é dada por $$F_{ab} = pw\delta$$ (A camada limite é muito fina; a sua espessura foi exageradamente ampliada em todas as figuras que fizemos. Por ser delgada, as variações de pressão no sentido y podem ser desprezadas, e admitimos que dentro da camada limite, $p = p(x)$.)
cd	Expandindo numa série de Taylor, a pressão em $x + dx$ é dada por $$p_{x+dx} = p + \left.\frac{dp}{dx}\right]_x dx$$ A força sobre a superfície cd é dada então por $$F_{cd} = -\left(p + \left.\frac{dp}{dx}\right]_x dx\right) w(\delta + d\delta)$$
bc	A pressão média atuando sobre a superfície bc é $$p + \left.\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\right]_x dx$$ Então a componente x da força normal atuando sobre bc é dada por $$F_{bc} = \left(p + \left.\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\right]_x dx\right) w\, d\delta$$
ad	A força de cisalhamento atuando sobre ad é dada por $$F_{ad} = -(\tau_w + \tfrac{1}{2}d\tau_w)\, w\, dx$$

Somando as componentes na direção x de todas as forças atuando sobre o volume de controle, obtemos

$$F_{S_x} = \left\{ -\frac{dp}{dx}\delta\, dx - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}dx\, d\delta}_{\simeq 0} - \tau_w\, dx - \underbrace{\frac{1}{2}d\tau_w\, dx}_{\simeq 0} \right\} w$$

onde notamos que $dx d\delta \ll \delta dx$ e $d\tau_w \ll \tau_w$, e por isso desprezamos o segundo e o quarto termos.

Substituindo as expressões para $\int_{SC} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ e F_{S_x} na equação da quantidade de movimento segundo x, obtemos

$$\left\{ -\frac{dp}{dx}\delta\, dx - \tau_w\, dx \right\} w = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta u\rho u\, dy\right] dx - U\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta \rho u\, dy\right] dx \right\} w$$

Dividindo essa equação por wdx, resulta

$$-\delta\frac{dp}{dx} - \tau_w = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u\rho u\, dy - U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u\, dy \qquad (9.16)$$

A Eq. 9.16 é uma equação *integral de quantidade de movimento*, que dá uma relação entre as componentes x das forças atuando numa camada limite e o fluxo de quantidade de movimento segundo x.

O gradiente de pressão, dp/dx, pode ser determinado pela aplicação da equação de Bernoulli ao escoamento não viscoso fora da camada limite; $dp/dx = -\rho U dU/dx$. Se reconhecermos que $\delta = \int_0^\delta dy$, então a Eq. 9.16 pode ser escrita como

$$\tau_w = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u\rho u\, dy + U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u\, dy + \frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho U\, dy$$

Visto que

$$U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u\, dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u U\, dy - \frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho u\, dy$$

temos

$$\tau_w = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u(U - u)\, dy + \frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho(U - u)\, dy$$

e

$$\tau_w = \frac{\partial}{\partial x}U^2\int_0^\delta \rho\frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy + U\frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Usando as definições de espessura de deslocamento, δ^*,(Eq. 9.1), e espessura de quantidade de movimento, θ,(Eq. 9.2), obtemos

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}(U^2\theta) + \delta^* U\frac{dU}{dx} \qquad (9.17)$$

A Eq. 9.17 é a equação integral da quantidade de movimento; essa equação resultará numa equação diferencial ordinária para a espessura de camada limite, desde que seja admitida uma forma adequada para o perfil de velocidade e que a tensão de cisalhamento na parede possa ser relacionada com outras variáveis. Uma vez determinada a espessura de camada limite, as espessuras de quantidade de movimento e de deslocamento, e a tensão de cisalhamento na parede podem ser calculadas.

A Eq. 9.17 foi obtida pela aplicação das equações básicas (continuidade e quantidade de movimento segundo x) a um vo-

lume de controle diferencial. Revendo as suposições que fizemos na dedução, verificamos que a equação fica restrita a escoamento permanente, incompressível e bidimensional, sem a presença de forças de campo paralelas à superfície.

Não fizemos qualquer hipótese específica relacionando a tensão de cisalhamento na parede, τ_w, com o campo de velocidade. Assim, a Eq. 9.17 é válida para escoamento de camada limite tanto laminar quanto turbulento. Para fazer uso dessa equação para estimar a espessura de camada limite como uma função de x, devemos:

1. Obter uma primeira aproximação para a distribuição de velocidade de corrente livre, $U(x)$. Isso pode ser feito a partir da teoria de escoamento não viscoso (a velocidade que existiria na ausência de uma camada limite). A pressão na camada limite é relacionada com a velocidade de corrente livre, $U(x)$, usando a equação de Bernoulli.
2. Admitir uma forma razoável para o perfil de velocidade dentro da camada limite.
3. Relacionar a tensão de cisalhamento na parede com o campo de velocidade.

Com o intuito de ilustrar a aplicação da Eq. 9.17 aos escoamentos de camada limite, consideraremos em primeiro lugar o caso de escoamento com gradiente de pressão nulo sobre uma placa plana (Seção 9.5). Os efeitos dos gradientes de pressão no escoamento de camada limite serão discutidos em seguida na Seção 9.6.

9.5 USO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO PARA ESCOAMENTO COM GRADIENTE DE PRESSÃO NULO

Para o caso especial do escoamento sobre uma placa plana, U = constante. Da equação de Bernoulli, vemos que para este caso, p = constante, e assim, $dp/dx = 0$.

A equação integral da quantidade de movimento reduz-se então a

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad (9.18)$$

A distribuição de velocidade, u/U, na camada limite é suposta ser similar para todos os valores de x e normalmente é especificada como uma função de y/δ. (Note que u/U é adimensional e δ é uma função de x apenas.) Conseqüentemente, é conveniente mudar a variável de integração de y para y/δ. Definindo

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

temos

$$dy = \delta\, d\eta$$

e a equação integral da quantidade de movimento para gradiente de pressão zero é escrita

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \qquad (9.19)$$

Desejamos resolver essa equação para a espessura de camada limite como uma função de x. Para fazer isso, devemos:

1. Admitir uma distribuição de velocidade na camada limite — uma relação funcional da forma

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

(a) A distribuição de velocidade admitida precisaria satisfazer certas condições físicas de contorno:

$$\text{para } y = 0, \qquad u = 0$$
$$\text{para } y = \delta, \qquad u = U$$
$$\text{para } y = \delta, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(b) Note que, uma vez admitida a distribuição de velocidade, o valor numérico da integral na Eq. 9.19 é simplesmente

$$\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \frac{\theta}{\delta} = \text{constante} = \beta$$

e a equação integral da quantidade de movimento torna-se

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \beta$$

2. Obter uma expressão para τ_w em termos de δ. Isso permitirá então resolver para $\delta(x)$, como ilustrado a seguir.

9.5.1 Escoamento Laminar

Para escoamento laminar sobre uma placa plana, uma suposição razoável para o perfil de velocidade é um polinômio em y:

$$u = a + by + cy^2$$

As condições físicas de contorno são:

$$\text{para } y = 0, \qquad u = 0$$
$$\text{para } y = \delta, \qquad u = U$$
$$\text{para } y = \delta, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Avaliando as constantes a, b e c, resulta

$$\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\eta - \eta^2 \qquad (9.20)$$

A tensão de cisalhamento na parede é dada por

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

Substituindo o perfil de velocidade admitido, Eq. 9.20, na expressão para τ_w, dá

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = \mu \left.\frac{U\partial(u/U)}{\delta\partial(y/\delta)}\right]_{y/\delta=0} = \left.\frac{\mu U}{\delta}\frac{d(u/U)}{d\eta}\right]_{\eta=0}$$

ou

$$\tau_w = \left.\frac{\mu U}{\delta}\frac{d}{d\eta}(2\eta - \eta^2)\right]_{\eta=0} = \left.\frac{\mu U}{\delta}(2 - 2\eta)\right]_{\eta=0}$$

$$= \frac{2\mu U}{\delta}$$

Estamos agora em condições de aplicar a equação integral da quantidade de movimento

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \qquad (9.19)$$

Substituindo τ_w e u/U, obtemos

$$\frac{2\mu U}{\delta} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (2\eta - \eta^2)(1 - 2\eta + \eta^2)\, d\eta$$

ou

$$\frac{2\mu U}{\delta \rho U^2} = \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (2\eta - 5\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4)\, d\eta$$

Integrando e substituindo os limites resulta

$$\frac{2\mu}{\delta \rho U} = \frac{2}{15}\frac{d\delta}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \delta\, d\delta = \frac{15\mu}{\rho U} dx$$

que é uma equação diferencial para δ. Integrando novamente dá

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{15\mu}{\rho U} x + c$$

Se for admitido que $\delta = 0$ para $x = 0$, então $c = 0$, e assim

$$\delta = \sqrt{\frac{30\mu x}{\rho U}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\mu}{\rho U x}} = \frac{5{,}48}{\sqrt{Re_x}} \qquad (9.21)$$

A Eq. 9.21 mostra que a razão entre a espessura de camada limite laminar e a distância ao longo de uma placa plana varia inversamente com a raiz quadrada do número de Reynolds. Ela tem a mesma forma que a solução exata deduzida das equações diferenciais completas do movimento por H. Blasius em 1908. É notável constatar que a Eq. 9.21 erra somente em 10% (a constante é grande demais) em comparação com a solução exata (Seção 9.3). A Tabela 9.2 resume resultados correspondentes calculados com o uso dos perfis de velocidade aproximados e lista resultados obtidos da solução exata. As formas dos perfis aproximados podem ser prontamente comparadas plotando u/U *versus* y/δ (veja o Problema 9.7).

Uma vez conhecida a espessura de camada limite, todos os detalhes do escoamento podem ser determinados. O coeficiente de tensão de cisalhamento na parede, ou de "atrito superficial", é definido como

$$C_f \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \qquad (9.22)$$

Substituindo as expressões do perfil de velocidade e a Eq. 9.21, vem

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2\mu(U/\delta)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{4\mu}{\rho U \delta} =$$

$$= 4\frac{\mu}{\rho U x}\frac{x}{\delta} = 4\frac{1}{Re_x}\frac{\sqrt{Re_x}}{5{,}48}$$

Finalmente,

$$C_f = \frac{0{,}730}{\sqrt{Re_x}} \qquad (9.23)$$

Como a variação de τ_w é conhecida, o arrasto viscoso sobre a superfície pode ser avaliado por integração sobre a área da placa plana, conforme ilustrado no Problema-Exemplo 9.3.

A Eq. 9.21 pode ser usada para calcular a espessura da camada limite laminar na transição. Para $Re_x = 5 \times 10^5$, com $U = 30$ m/s, $x = 0{,}24$ m para o ar na condição padrão. Então

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5{,}48}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5{,}48}{\sqrt{5 \times 10^5}} = 0{,}00775$$

e a espessura da camada limite é

$$\delta = 0{,}00775x = 0{,}00775(0{,}24\text{m}) = 1{,}86 \text{ m}$$

A espessura de camada limite na transição é menor que 1% do comprimento de desenvolvimento, x. Esses cálculos confirmam que os efeitos viscosos estão confinados a uma camada muito delgada próxima da superfície do corpo.

Os dados na Tabela 9.2 indicam que resultados razoáveis podem ser obtidos com uma variedade de perfis de velocidade aproximados.

Tabela 9.2 Resultados do Cálculo do Escoamento de Camada Limite Laminar sobre uma Placa Plana em Ângulo de Incidência Zero Fundamentado em Perfis de Velocidade Aproximados

Distribuição de velocidade $\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta)$	$\frac{\theta}{\delta}$	$\frac{\delta^*}{\delta}$	$H = \frac{\delta^*}{\theta}$	$a = \frac{\delta}{x}\sqrt{Re_x}$	$b = C_f\sqrt{Re_x}$
$f(\eta) = \eta$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	3,00	3,46	0,577
$f(\eta) = 2\eta - \eta^2$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	2,50	5,48	0,730
$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	$\frac{39}{280}$	$\frac{3}{8}$	2,69	4,64	0,647
$f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	$\frac{37}{315}$	$\frac{3}{10}$	2,55	5,84	0,685
$f(\eta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	2,66	4,80	0,654
Exata	0,133	0,344	2,59	5,00	0,664

EXEMPLO 9.3 — Camada Limite Laminar sobre uma Placa Plana: Solução Aproximada Usando Perfil de Velocidade Senoidal

Considere o escoamento de camada limite laminar, bidimensional, ao longo de uma placa plana. Admita que o perfil de velocidade na camada limite é senoidal,

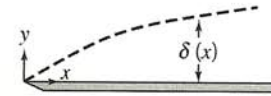
$$\frac{u}{U} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$$

Determine expressões para:

(a) a taxa de crescimento de δ como uma função de x.
(b) a espessura de deslocamento, δ^*, como uma função de x.
(c) a força de atrito total sobre uma placa de comprimento L e largura b.

PROBLEMA-EXEMPLO 9.3

DADOS: Escoamento de camada limite laminar, bidimensional, ao longo de uma placa plana. O perfil de velocidade de camada limite é

$$\frac{u}{U} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{para } 0 \leq y \leq \delta$$

e

$$\frac{u}{U} = 1 \quad \text{para } y > \delta$$

DETERMINAR: **(a)** $\delta(x)$. **(b)** $\delta^*(x)$.
(c) A força de atrito total sobre uma placa de comprimento L e largura b.

SOLUÇÃO:

Para o escoamento em placa plana, U = constante, $dp/dx = 0$, e

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \tag{9.19}$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível

Substituindo $u/U = \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\eta$ na Eq. 9.19, obtemos:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\eta\left(1 - \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\eta\right) d\eta = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\eta - \text{sen}^2\,\frac{\pi}{2}\eta\right) d\eta$$

$$= \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\frac{2}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi}{2}\eta - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\eta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,\pi\eta\right]_0^1 = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\frac{2}{\pi}\left[0 + 1 - \frac{\pi}{4} + 0 + 0 - 0\right]$$

$$\tau_w = 0{,}137\rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = \beta\rho U^2 \frac{d\delta}{dx}; \quad \beta = 0{,}137$$

Mas

$$\tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y}\bigg]_{y=0} = \mu\frac{U}{\delta}\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)}\bigg]_{y=0} = \mu\frac{U}{\delta}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\eta\bigg]_{\eta=0} = \frac{\pi\mu U}{2\delta}$$

Portanto,

$$\tau_w = \frac{\pi\mu U}{2\delta} = 0{,}137\rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Separando as variáveis, vem

$$\delta\, d\delta = 11{,}5 \frac{\mu}{\rho U}\, dx$$

Integrando, obtemos

$$\frac{\delta^2}{2} = 11{,}5 \frac{\mu}{\rho U} x + c$$

Mas $c = 0$, pois $\delta = 0$ em $x = 0$, logo

$$\delta = \sqrt{23{,}0 \frac{x\mu}{\rho U}}$$

ou

$$\frac{\delta}{x} = 4{,}80 \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}} = \frac{4{,}80}{\sqrt{Re_x}} \qquad \delta(x)$$

A espessura de deslocamento, δ^*, é dada por

$$\delta^* = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

$$= \delta \int_0^1 \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\eta\right) d\eta = \delta \left[\eta + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}\eta\right]_0^1$$

$$\delta^* = \delta \left[1 - 0 + 0 - \frac{2}{\pi}\right] = \delta \left[1 - \frac{2}{\pi}\right]$$

Uma vez que, da parte (a),

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}80}{\sqrt{Re_x}}$$

então

$$\frac{\delta^*}{x} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{4{,}80}{\sqrt{Re_x}} = \frac{1{,}74}{\sqrt{Re_x}} \qquad \delta^*(x)$$

A força de atrito total sobre um lado da placa é dada por

$$F = \int_{A_p} \tau_w\, dA$$

Como $dA = b\,dx$ e $0 \leq x \leq L$, então

$$F = \int_0^L \tau_w b\, dx = \int_0^L \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} b\, dx = \rho U^2 b \int_0^{\theta_L} d\theta = \rho U^2 b \theta_L$$

$$\theta_L = \int_0^{\delta_L} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta_L \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \beta \delta_L$$

Da parte (a), $\beta = 0{,}137$ e $\delta_L = \dfrac{4{,}80\, L}{\sqrt{Re_L}}$, logo

$$F = \frac{0{,}658 \rho U^2 b L}{\sqrt{Re_L}} \qquad F$$

{ Esse problema ilustra a aplicação da equação integral da quantidade de movimento a um escoamento de camada limite laminar sobre uma placa plana. }

9.5.2 Escoamento Turbulento

Detalhes do perfil de velocidade turbulento para camadas limites com gradiente nulo de pressão são muito semelhantes àqueles para escoamento turbulento em tubos e canais. Dados para camadas limites turbulentas são plotados sobre o perfil de velocidade universal usando coordenadas de $\bar{u}/u_*$ *versus* yu_*/ν, conforme mostrado na Fig. 8.9. Contudo, a complexidade matemática desse perfil dificulta seu uso com a equação integral da quantidade de movimento. A equação integral da quantidade de movimento é aproximada; um perfil de velocidade adequado para camadas limites turbulentas sobre placas planas lisas é o perfil empírico de lei de potência. Um expoente de 1/7 é tipicamente usado para modelar o perfil de velocidade turbulento

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7} \qquad (9.24)$$

Entretanto, esse perfil não prevalece nas vizinhanças imediatas da parede, uma vez que nesta ele prevê $du/dy = \infty$. Conseqüentemente, não podemos usá-lo na definição de τ_w para obter uma expressão para τ_w em termos de δ, como fizemos para o escoamento laminar de camada limite. Para escoamento turbulento de camada limite, adaptamos a expressão desenvolvida para o escoamento em tubos

$$\tau_w = 0{,}0332\rho\bar{V}^2\left[\frac{\nu}{R\bar{V}}\right]^{0{,}25} \qquad (8.39)$$

Para um perfil de potência 1/7 num tubo, a Eq. 8.24 dá $\bar{V}/U = 0{,}817$. Substituindo $\bar{V} = 0{,}817U$ e $R = \delta$ na Eq. 8.39, obtemos

$$\tau_w = 0{,}0233\rho U^2\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \qquad (9.25)$$

Estamos agora em posição de aplicar a equação integral da quantidade de movimento

$$\tau_w = \rho U^2\frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)d\eta \qquad (9.19)$$

Substituindo para τ_w e u/U e integrando, obtemos

$$0{,}0233\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} = \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \eta^{1/7}(1-\eta^{1/7})\,d\eta = \frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx}$$

Desse modo, obtemos uma equação diferencial para δ:

$$\delta^{1/4}d\delta = 0{,}240\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4}dx$$

Integrando dá

$$\frac{4}{5}\delta^{5/4} = 0{,}240\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4}x + c$$

Se for admitido que $\delta \approx 0$ para $x = 0$ (isso é equivalente a admitir escoamento turbulento a partir da borda de ataque), então $c = 0$ e

$$\delta = 0{,}382\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5}x^{4/5}$$

ou

$$\frac{\delta}{x} = 0{,}382\left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5} = \frac{0{,}382}{Re_x^{1/5}} \qquad (9.26)$$

Usando a Eq. 9.25, obtemos o coeficiente de atrito superficial em termos de δ:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0{,}0466\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4}$$

Substituindo para δ, obtemos

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0{,}0594}{Re_x^{1/5}} \qquad (9.27)$$

Experimentos mostram que a Eq. 9.27 prediz muito bem o atrito superficial turbulento numa placa plana para $5\times10^5 < Re_x < 10^7$. Essa concordância é notável tendo em vista a natureza aproximada de nossa análise.

A aplicação da equação integral da quantidade de movimento para escoamento turbulento de camada limite é ilustrada no Problema-Exemplo 9.4.

O uso da equação integral da quantidade de movimento é uma técnica aproximada para predizer o desenvolvimento de camada limite; a equação prediz as tendências corretamente. Os parâmetros da camada limite laminar variam com $Re_x^{-1/2}$; aqueles para a camada limite turbulenta variam com $Re_x^{-1/5}$. A camada limite turbulenta desenvolve-se mais rapidamente que a camada limite laminar.

Camadas limites turbulenta e laminar são comparadas no Problema-Exemplo 9.4. A tensão de cisalhamento na parede é muito maior na camada limite turbulenta que na camada limite laminar. Essa é a razão primária para o desenvolvimento mais rápido das camadas limites turbulentas.

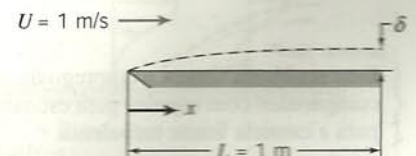
A concordância que obtivemos com resultados experimentais mostra que o uso da equação integral de quantidade de movimento é um método aproximado eficaz que nos dá informações consideráveis sobre o comportamento geral das camadas limites.

EXEMPLO 9.4 — Camada Limite Turbulenta sobre uma Placa Plana: Solução Aproximada Usando Perfil de Velocidade de Potência 1/7

Água escoa a $U = 1$ m/s sobre uma placa plana com $L = 1$ m no sentido do escoamento. A camada limite é provocada de modo a se tornar turbulenta na borda de ataque. Avalie a espessura de perturbação, δ, a espessura de deslocamento, δ^*, e a tensão de cisalhamento na parede, para $x = L$. Compare com o escoamento laminar mantido à mesma posição. Admita um perfil de velocidade turbulento de potência 1/7.

PROBLEMA-EXEMPLO 9.4

DADOS: Escoamento de camada limite sobre placa plana; escoamento turbulento a partir da borda de ataque. Admita perfil de velocidade de potência 1/7.

DETERMINAR: (a) A espessura de perturbação, δ_L.
(b) A espessura de deslocamento, δ_L^*.
(c) A tensão de cisalhamento na parede, $\tau_w(L)$.
(d) Comparação com resultados para escoamento laminar a partir da borda de ataque.

SOLUÇÃO:

Apliquemos os resultados da equação integral da quantidade de movimento.

Equações de cálculo:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}382}{Re_x^{1/5}} \tag{9.26}$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{9.1}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0{,}0594}{Re_x^{1/5}} \tag{9.27}$$

Em $x = L$, com $\nu = 1{,}00 \times 10^{-6}$ m²/s para a água ($T = 20$°C),

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 1\ \text{m} \times \frac{\text{s}}{10^{-6}\ \text{m}^2} = 10^6$$

Da Eq. 9.26,

$$\delta_L = \frac{0{,}382}{Re_L^{1/5}} L = \frac{0{,}382}{(10^6)^{1/5}}\ 1\ \text{m} = 0{,}0241\ \text{m} \quad \text{ou} \quad \delta_L = 24{,}1\ \text{mm} \longleftarrow \delta_L$$

Usando a Eq. 9.1, com $u/U = (y/\delta)^{1/7} = \eta^{1/7}$, obtemos

$$\delta_L^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta_L \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta_L \int_0^1 (1 - \eta^{1/7})\, d\eta = \delta_L \left[\eta - \frac{7}{8}\eta^{8/7}\right]_0^1$$

$$\delta_L^* = \frac{\delta_L}{8} = \frac{24{,}1\ \text{mm}}{8} = 3{,}01\ \text{mm} \longleftarrow \delta_L^*$$

Da Eq. 9.27,

$$C_f = \frac{0{,}0594}{(10^6)^{1/5}} = 0{,}00375$$

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2}\rho U^2 = 0{,}00375 \times \frac{1}{2} \times 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (1)^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$\tau_w = 1{,}87\ \text{N/m}^2 \longleftarrow \tau_w(L)$$

Para escoamento laminar, usamos valores da solução de Blasius. Da Eq. 9.13,

$$\delta_L = \frac{5{,}0}{\sqrt{Re_L}} L = \frac{5{,}0}{(10^6)^{1/2}} \times 1\ \text{m} = 0{,}005\ \text{m} \quad \text{ou} \quad 5{,}00\ \text{mm}$$

Do Exemplo 9.2, $\delta^*/\delta = 0{,}344$, logo

$$\delta^* = 0{,}344\,\delta = 0{,}344 \times 5{,}0\ \text{mm} = 1{,}72\ \text{mm}$$

Da Eq. 9.15, $C_f = \dfrac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}}$, então

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2}\rho U^2 = \frac{0{,}664}{\sqrt{10^6}} \times \frac{1}{2} \times 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (1)^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 0{,}332\ \text{N/m}^2$$

Comparando valores para $x = L$, obtemos

$$\text{Espessura de perturbação,} \quad \frac{\delta_{\text{turbulento}}}{\delta_{\text{laminar}}} = \frac{24{,}1\ \text{mm}}{5{,}00\ \text{mm}} = 4{,}82$$

$$\text{Espessura de deslocamento,} \quad \frac{\delta^*_{\text{turbulento}}}{\delta^*_{\text{laminar}}} = \frac{3{,}01\ \text{mm}}{1{,}72\ \text{mm}} = 1{,}75$$

$$\text{Tensão cisalhante na parede,} \quad \frac{\tau_{w,\ \text{turbulento}}}{\delta_{w,\ \text{laminar}}} = \frac{1{,}87\ \text{N/m}^2}{0{,}332\ \text{N/m}^2} = 5{,}63$$

Esse problema ilustra o emprego da equação integral de quantidade de movimento para camadas limites turbulentas. Os resultados, quando comparados com aqueles para escoamento laminar, indicam crescimento muito mais rápido por causa da maior tensão cisalhante na parede para a camada limite turbulenta.

9.6 GRADIENTES DE PRESSÃO NO ESCOAMENTO DE CAMADA LIMITE

Restringimos nossas análises de escoamentos de camada limite a escoamento sobre uma placa plana, para o qual o gradiente de pressão é zero. A equação integral da quantidade de movimento para esse caso foi dada como

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad (9.18)$$

Lembre-se que na dedução dessa equação, nenhuma hipótese foi feita com respeito ao regime de escoamento de camada limite; a equação é válida para ambas as camadas laminar e turbulenta. A Eq. 9.18 indica que a tensão de cisalhamento na parede é equilibrada por um decréscimo na quantidade de movimento do fluido. Dessa forma, os perfis de velocidade mudam à medida que se move ao longo da placa. A espessura de camada limite continua a crescer e o fluido perto da parede fica sendo continuamente retardado (perdendo quantidade de movimento). Uma questão interessante é, "Será o fluido próximo à parede eventualmente levado ao repouso?" Reformulando a questão, "Para o caso em que $dp/dx = 0$, é possível que $\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$?"[2]

Ao considerarmos as distribuições de tensão de cisalhamento para placas planas, verificamos que para escoamento laminar

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho U^2} = \frac{\text{constante}}{\sqrt{Re_x}}$$

e para escoamento turbulento

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho U^2} = \frac{\text{constante}}{Re_x^{1/5}}$$

Lembrando que $\tau_w = \mu \partial u/\partial y)_{y=0}$, podemos então dizer que para qualquer comprimento finito de placa $\partial u/\partial y)_{y=0}$ nunca será zero.

[2] Note que, se $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$, então a camada de fluido próxima à parede terá velocidade zero, posto que

$$u_{0+dy} = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} dy$$

e $u_0 = 0$ da condição de não deslizamento.

O ponto numa fronteira sólida em que $\partial u/\partial y)_{y=0}$ é definido como o ponto de *separação*. Conseqüentemente, concluímos que, para $dp/dx = 0$, nunca ocorrerá separação do escoamento; a camada de fluido na vizinhança de uma superfície sólida não pode ser trazida à velocidade zero.

O gradiente de pressão é dito ser adverso se a pressão aumenta no sentido de escoamento (se $\partial p/\partial x > 0$). Quando $\partial p/\partial x < 0$ (quando a pressão diminui no sentido de escoamento), o gradiente de pressão é dito ser favorável.

Considere o escoamento através de um canal de seção transversal variável, mostrado na Fig. 9.6. Para simplificar a discussão, considere o escoamento ao longo da parede retilínea.

Se considerarmos as forças atuando sobre uma partícula fluida perto da fronteira sólida, verificamos que há uma força de cisalhamento resultante, retardadora, sobre a partícula, não importando qual seja o sinal do gradiente de pressão. Para $\partial p/\partial x = 0$, o resultado é um decréscimo em quantidade de movimento, mas como já mostramos, ele não é suficiente para levar a partícula ao repouso. Como $\partial p/\partial x < 0$ na região 1, a pressão atrás da partícula (ajudando o seu movimento) é maior do que aquela opondo-se ao movimento; a partícula está "deslizando para baixo numa colina de pressão", sem risco de ser trazida à velocidade zero. Entretanto, ao tentar o escoamento pela região 3, a partícula encontra um gradiente de pressão adverso, $\partial p/\partial x > 0$, e deve "escalar a colina de pressão". A partícula fluida poderia ser levada ao repouso, causando então a deflexão para longe da fronteira sólida do fluido vizinho; quando isso ocorre, diz-se que o escoamento separou-se da superfície. Logo a jusante do ponto de separação, o sentido do escoamento na região separada é oposto ao sentido do escoamento principal. O fluido de baixa energia na região separada é forçado de volta para montante pela pressão a jusante aumentada.

Dessa forma, verificamos que um gradiente de pressão adverso, $\partial p/\partial x > 0$, é uma condição necessária para a separação. Isso significa que, se $\partial p/\partial x > 0$, haverá separação? Não, não significa. Não mostramos que $\partial p/\partial x > 0$ levará sempre à separação, mas sim que a separação não pode ocorrer a menos que $\partial p/\partial x > 0$. Essa conclusão pode ser rigorosamente mostrada usando-se as equações diferenciais completas do movimento para escoamento de camada-limite ([3], p. 132).

Os perfis de velocidade adimensionais para escoamentos laminar e turbulento de camada limite sobre uma placa plana são mostrados na Fig. 9.7*a*. O perfil turbulento é muito mais obtuso (mais arredondado) do que o laminar. Para a mesma velocidade de corrente livre, o fluxo de quantidade de movimento dentro da

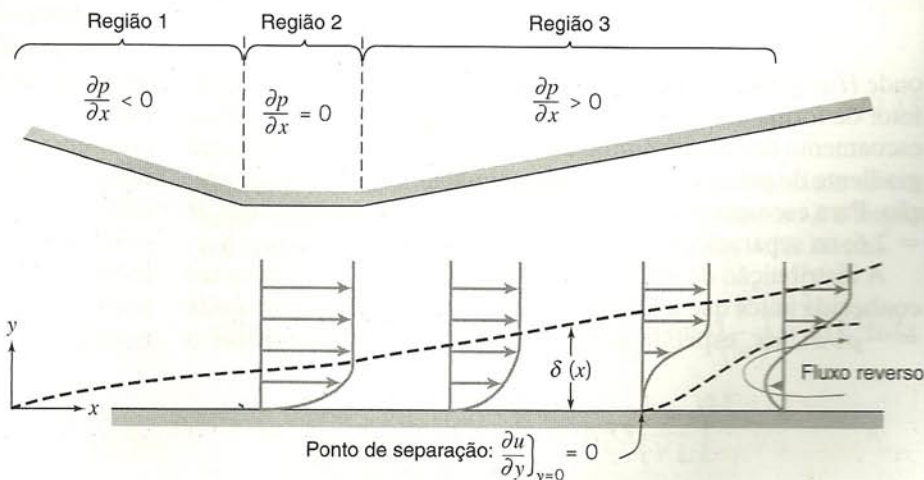



Fig. 9.6 Escoamento de camada limite com gradiente de pressão (espessura de camada limite exagerada para maior clareza).

(*a*) Perfis de velocidade

(*b*) Perfis de fluxo de quantidade de movimento

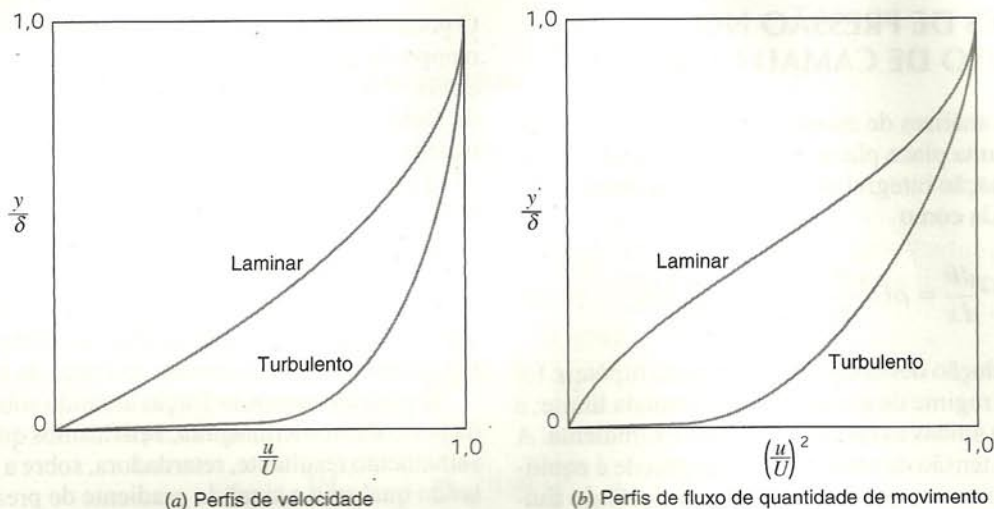



Fig. 9.7 Perfis adimensionais para escoamento de camada limite sobre placa plana.

camada limite turbulenta é maior do que dentro da camada limite laminar (Fig. 9.7*b*). A separação ocorre quando a quantidade de movimento de camadas de fluido adjacentes perto da superfície é reduzida a zero pela ação combinada de forças viscosas e de pressão. Conforme mostrado na Fig. 9.7*b*, a quantidade de movimento do fluido próximo da superfície é significativamente maior para o perfil turbulento. Conseqüentemente, a camada turbulenta é mais capaz de resistir à separação num gradiente de pressão adverso. Discutiremos algumas conseqüências desse comportamento na Seção 9.7.3.

Os gradientes de pressão adversos causam importantes mudanças nos perfis de velocidade para ambos os escoamentos de camada limite, turbulento e laminar. Soluções aproximadas para escoamento com gradiente de pressão diferente de zero podem ser obtidas da equação integral de quantidade de movimento

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}(U^2\theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx} \tag{9.17}$$

Expandindo o primeiro termo, podemos escrever

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U^2\frac{d\theta}{dx} + (\delta^* + 2\theta)U\frac{dU}{dx}$$

ou

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (H+2)\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx} \tag{9.28}$$

onde $H = \delta^*/\theta$ é um "fator de forma" do perfil de velocidade. O fator de forma aumenta num gradiente de pressão adverso. Para escoamento de camada limite turbulento, H aumenta de 1,3 para gradiente de pressão zero para aproximadamente 2,5 na separação. Para escoamento laminar com gradiente de pressão zero, $H = 2{,}6$; na separação $H = 3{,}5$.

A distribuição de velocidade de corrente livre, $U(x)$, deve ser conhecida antes que a Eq. 9.28 possa ser aplicada. Como $dp/dx = -\rho U dU/dx$, especificar $U(x)$ é equivalente a especificar o gradiente de pressão. Podemos obter uma primeira aproximação de $U(x)$ da teoria do escoamento ideal para o escoamento não viscoso nas mesmas condições. Como assinalado no Cap. 6, para escoamento irrotacional sem atrito (escoamento potencial), a função de corrente, ψ, e o potencial de velocidade, ϕ, satisfazem a equação de Laplace. Essas funções podem ser usadas para determinar $U(x)$ sobre a superfície do corpo.

Muito esforço tem sido dedicado ao cálculo das distribuições de velocidade sobre corpos de formas conhecidas (o problema "direto") e à determinação de formas de corpos para produzir uma distribuição de pressão desejada (o problema "inverso"). Smith e colaboradores [6] desenvolveram métodos de cálculo que utilizam singularidades distribuídas sobre a superfície do corpo para solucionar o problema direto para formas bidimensionais ou axissimétricas. Um tipo de método de elementos-finitos que usa singularidades definidas sobre painéis superficiais discretos (o método do "painel" [7]) tem ganho recentemente popularidade na aplicação a escoamentos tridimensionais.

Uma vez que a distribuição de velocidade, $U(x)$, seja conhecida, a Eq. 9.28 pode ser integrada para determinar $\theta(x)$, se H e C_f puderem ser correlacionados com θ. Uma discussão detalhada de vários métodos de cálculo para escoamentos com gradiente de pressão diferente de zero está além dos objetivos deste livro. Numerosas soluções para escoamentos laminares são dadas em [8]. Métodos de cálculo para escoamentos turbulentos de camada limite, baseados na equação integral da quantidade de movimento, são revistos em [9].

Por causa da importância das camadas limites turbulentas nas situações de engenharia, o estado da arte dos esquemas de cálculo está avançando rapidamente. Numerosos esquemas de cálculo têm sido propostos [10, 11]; a maioria desses esquemas para escoamentos turbulentos usa modelos para prever tensão de cisalhamento e em seguida resolver as equações de camada limite numericamente [12, 13]. A contínua melhoria em tamanho e velocidade de computadores digitais está começando a tornar possível a solução das equações de Navier-Stokes usando métodos numéricos.

PARTE B
ESCOAMENTO DE FLUIDOS AO REDOR DE CORPOS SUBMERSOS

Sempre que há movimento relativo entre um corpo sólido e o fluido no qual está imerso, o corpo é submetido a uma força resultante, $\vec{F}$, devida à ação do fluido. Em geral, a força infinitesimal, $d\vec{F}$, atuando sobre um elemento de área não será normal nem paralela ao elemento. Isso pode ser visto claramente quando se considera a natureza das forças superficiais que contribuem para a força resultante, $\vec{F}$. Se o corpo estiver se movendo através de um fluido viscoso, tanto forças de cisalhamento quanto de pressão agem sobre ele,

$$\vec{F} = \int_{\text{superfície do corpo}} d\vec{F} = \int_{\text{superfície do corpo}} d\vec{F}_{\text{cisalhamento}} + \int_{\text{superfície do corpo}} d\vec{F}_{\text{pressão}}$$

A força resultante, $\vec{F}$, pode ser decomposta em componentes paralela e perpendicular à direção do movimento. A componente de força paralela à direção do movimento é a força de arrasto, F_D, e a componente de força perpendicular à direção do movimento é a força de sustentação, F_L.

Reconhecendo que

$$d\vec{F}_{\text{cisalhamento}} = \vec{\tau}_w \, dA$$

e

$$d\vec{F}_{\text{pressão}} = -p d\vec{A}$$

poder-se-ia pensar que arrasto e sustentação poderiam ser avaliados analiticamente. Prova-se que não é assim; existem muito poucos casos em que a sustentação e o arrasto podem ser determinados sem se recorrer a resultados experimentais. Como já vimos, a presença de um gradiente de pressão adverso leva freqüentemente à separação; a separação de escoamento impede a determinação analítica da força atuando sobre um corpo. Por isso, para a maioria das formas de interesse, temos que recorrer ao uso de coeficientes medidos experimentalmente a fim de computar a sustentação e o arrasto.

9.7 ARRASTO

O arrasto é a componente da força sobre um corpo agindo paralelamente à direção do movimento. Ao discutirmos a necessidade de resultados experimentais na mecânica dos fluidos (Cap. 7), consideramos o problema de determinar a força de arrasto, F_D, sobre uma esfera lisa de diâmetro d, movendo-se através de um fluido viscoso, incompressível, com velocidade V; a massa específica e a viscosidade eram ρ e μ, respectivamente. A força de arrasto, F_D, foi escrita na forma funcional

$$F_D = f_1(d, V, \mu, \rho)$$

A aplicação do teorema dos Pi de Buckingham resultou em dois parâmetros Π adimensionais que foram escritos em forma funcional como

$$\frac{F_D}{\rho V^2 d^2} = f_2\left(\frac{\rho V d}{\mu}\right)$$

Note que d^2 é proporcional à área de seção transversal ($A = \pi d^2/4$) e, portanto, podemos escrever

$$\frac{F_D}{\rho V^2 A} = f_3\left(\frac{\rho V d}{\mu}\right) = f_3(Re) \tag{9.29}$$

Embora a Eq. 9.29 tenha sido obtida para uma esfera, a forma da equação é válida para escoamento incompressível sobre qualquer corpo; o comprimento característico usado no número de Reynolds depende da forma do corpo.

O *coeficiente de arrasto*, C_D, é definido como

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{9.30}$$

O número 1/2 foi introduzido (como foi feito na equação de definição do fator de atrito) a fim de formar a conhecida pressão dinâmica. Então a Eq. 9.29 pode ser escrita como

$$C_D = f(Re) \tag{9.31}$$

Não consideramos compressibilidade ou efeitos de superfície livre nessa discussão da força de arrasto. Tivessem eles sido incluídos, teríamos obtido a forma funcional

$$C_D = f(Re, Fr, M)$$

Neste ponto, consideraremos a força de arrasto sobre diversos corpos para os quais a Eq. 9.31 é válida. A força de arrasto total é a soma do arrasto de atrito e do arrasto de pressão. Contudo, o coeficiente de arrasto é uma função apenas do número de Reynolds.

9.7.1 Escoamento sobre uma Placa Plana Paralela ao Fluxo: Arrasto de Atrito

Esta situação foi considerada em detalhe na Seção 9.5. Como o gradiente de pressão é nulo, o arrasto total é igual ao arrasto de atrito. Logo

$$F_D = \int_{\text{superfície da placa}} \tau_w dA$$

e

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = \frac{\int_{SP} \tau_w \, dA}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{9.32}$$

onde A é a área total de superfície em contato com o fluido (i. e., a *área molhada*). O coeficiente de arrasto para uma placa plana paralela ao fluxo depende da distribuição de tensão de cisalhamento ao longo da mesma.

Para escoamento laminar sobre uma placa plana, o coeficiente de tensão de cisalhamento foi dado por

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.15}$$

O coeficiente de arrasto para escoamento com velocidade de corrente livre, V, sobre uma placa plana de comprimento L e largura b é obtido substituindo-se τ_w da Eq. 9.15 na Eq. 9.32. Assim

$$C_D = \frac{1}{A}\int_A 0{,}664\, Re_x^{-0{,}5}\, dA = \frac{1}{bL}\int_0^L 0{,}664\left(\frac{V}{\nu}\right)^{-0{,}5} x^{-0{,}5} b\, dx$$

$$= \frac{0{,}664}{L}\left(\frac{\nu}{V}\right)^{0{,}5}\left[\frac{x^{0{,}5}}{0{,}5}\right]_0^L = 1{,}33\left(\frac{\nu}{VL}\right)^{0{,}5}$$

$$C_D = \frac{1,33}{\sqrt{Re_L}} \tag{9.33}$$

Admitindo que a camada limite é turbulenta a partir da borda de ataque, o coeficiente de tensão de cisalhamento, baseado na análise aproximada da Seção 9.5.2, é dado por

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0,0594}{Re_x^{1/5}} \tag{9.27}$$

Substituindo τ_w da Eq. 9.27 na Eq. 9.32, obtemos

$$C_D = \frac{1}{A}\int_A 0,0594\, Re_x^{-0,2} dA = \frac{1}{bL}\int_0^L 0,0594\left(\frac{V}{\nu}\right)^{-0,2} x^{-0,2} b\,dx$$

$$= \frac{0,0594}{L}\left(\frac{\nu}{V}\right)^{0,2}\left[\frac{x^{0,8}}{0,8}\right]_0^L = 0,0742\left(\frac{\nu}{VL}\right)^{0,2}$$

$$C_D = \frac{0,0742}{Re_L^{1/5}} \tag{9.34}$$

A Eq. 9.34 é válida para $5 \times 10^5 < Re_L < 10^7$.

Para $Re_L < 10^9$ a equação empírica dada por Schlichting [3]

$$C_D = \frac{0,455}{(\log Re_L)^{2,58}} \tag{9.35}$$

ajusta-se perfeitamente aos dados experimentais.

Para uma camada limite que é inicialmente laminar e passa por transição em algum local sobre a placa, o coeficiente de arrasto turbulento deve ser ajustado para levar em conta o escoamento laminar no comprimento inicial. O ajuste é feito pela subtração da quantidade B/Re_L do C_D determinado para escoamento inteiramente turbulento. O valor de B depende do número de Reynolds na transição; B é dado por

$$B = Re_{tr}(C_{D_{\text{turbulento}}} - C_{D_{\text{laminar}}}) \tag{9.36}$$

Para um número de Reynolds de transição de 5×10^5, o coeficiente de arrasto pode ser calculado fazendo-se o ajuste da Eq. 9.34, caso em que

$$C_D = \frac{0,0742}{Re_L^{1/5}} - \frac{1740}{Re_L} \quad (5\times10^5 < Re_L < 10^7) \tag{9.37a}$$

ou da Eq. 9.35, caso em que

$$C_D = \frac{0,455}{(\log Re_L)^{2,58}} - \frac{1610}{Re_L} \quad (5\times10^5 < Re_L < 10^9) \tag{9.37b}$$

A variação de coeficiente de arrasto para uma placa plana paralela ao escoamento é mostrada na Fig. 9.8.

No traçado da Fig. 9.8, a transição foi admitida como ocorrendo em $Re_x = 5 \times 10^5$ para escoamentos nos quais a camada limite era inicialmente laminar. O número de Reynolds real para o qual a transição ocorre depende de uma combinação de fatores, tais como rugosidade superficial e perturbações de corrente livre. A transição tende a ocorrer mais cedo (com números de Reynolds mais baixos) quando a rugosidade superficial ou a turbulência da corrente livre é aumentada. Para transição em valor de Re_x diferente de 5×10^5, a constante no segundo termo da Eq. 9.37 é modificada usando-se a Eq. 9.36. A Fig. 9.8 mostra que o coeficiente de arrasto é menor, para um dado comprimento de placa, quando escoamento laminar é mantido sobre a distância mais longa possível. No entanto, para grandes Re_L (> 10^7) a contribuição do arrasto laminar é desprezível.

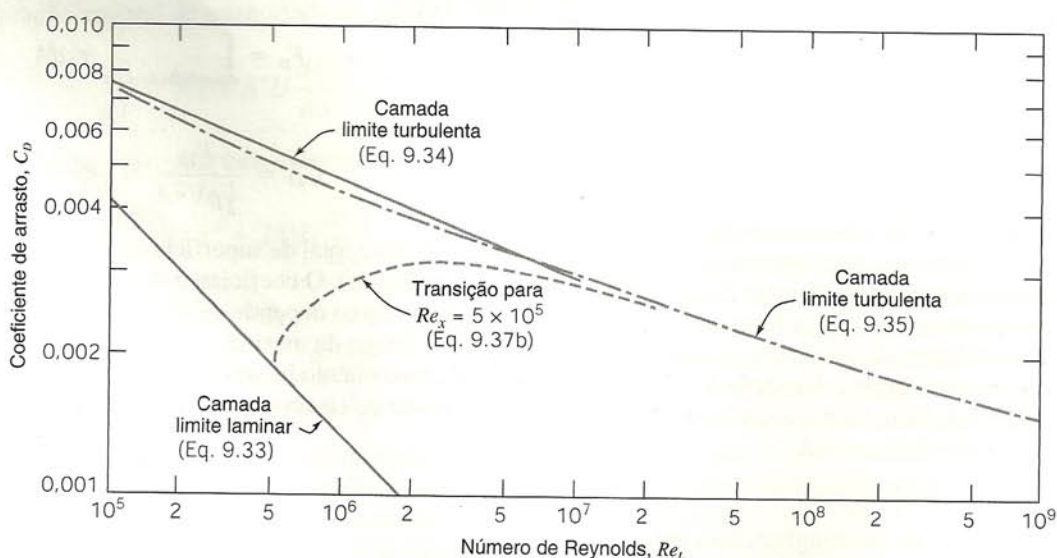



Fig. 9.8 Variação do coeficiente de arrasto com o número de Reynolds para uma placa plana lisa paralela ao fluxo.

EXEMPLO 9.5 — Arrasto Devido ao Atrito Superficial num Superpetroleiro

Um superpetroleiro com 360 m de comprimento tem um través de 70 m e um calado de 25 m. Estime a força e a potência requeridas para vencer o arrasto devido ao atrito superficial, a uma velocidade de cruzeiro de 13 nós, em água do mar a 10°C.

PROBLEMA-EXEMPLO 9.5

DADOS: Superpetroleiro navegando a $U = 13$ nós.

DETERMINAR: (a) Força, e
(b) Potência requerida para vencer o arrasto devido ao atrito superficial.

SOLUÇÃO:

Modele o casco do navio como uma placa plana, de comprimento L e largura $b = B + 2D$, em contato com água. Estime o arrasto devido ao atrito superficial a partir do coeficiente de arrasto.

Equações de cálculos:
$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \qquad (9.32)$$

$$C_D = \frac{0{,}455}{(\log Re_L)^{2{,}58}} - \frac{1610}{Re_L} \qquad (9.37b)$$

A velocidade do navio é 13 nós (milhas náuticas por hora), logo

$$U = \frac{13 \text{ nm}}{\text{h}} \times \frac{6076 \text{ pé}}{\text{nm}} \times \frac{0{,}305 \text{ m}}{\text{pé}} \times \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} = 6{,}69 \text{ m/s}$$

Do Apêndice A, a 10°C, $\nu = 1{,}37 \times 10^{-6}$ m²/s para água do mar. Daí

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{6{,}69 \text{ m}}{\text{s}} \times 360 \text{ m} \times \frac{\text{s}}{1{,}37 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 1{,}76 \times 10^9$$

Admitindo que a Eq. 9.37b seja válida,

$$C_D = \frac{0{,}455}{(\log 1{,}76 \times 10^9)^{2{,}58}} - \frac{1610}{1{,}76 \times 10^9} = 0{,}00147$$

e da Eq. 9.32,

$$F_D = C_D A \frac{1}{2}\rho U^2$$

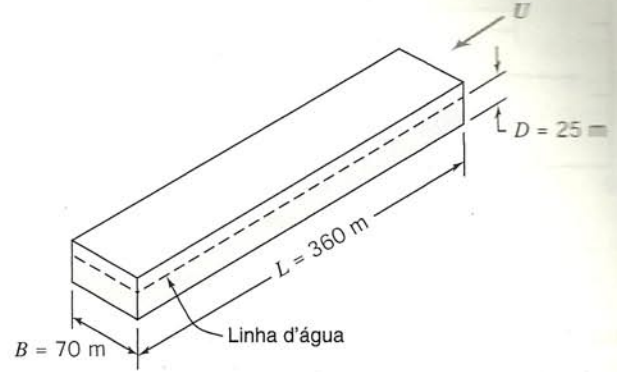
$$= 0{,}00147 \times (360 \text{ m})(70 + 50) \text{ m} \times \frac{1}{2} \times \frac{1020 \text{ kg}}{\text{m}^3} \times \frac{(6{,}69)^2 \text{ m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$F_D = 1{,}45 \text{ MN} \qquad F_D$$

A potência correspondente é

$$\mathcal{P} = F_D U = 1{,}45 \times 10^6 \text{ N} \times \frac{6{,}69 \text{ m}}{\text{s}} \times \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{N} \cdot \text{m}}$$

$$\mathcal{P} = 9{,}70 \text{ MW} \qquad \mathcal{P}$$

{ Esse requisito de potência (~ 13.000 HP) é substancial. Embora o coeficiente de arrasto seja muito baixo, a superfície molhada é muito grande (~ 10,7 acres). Por causa do grande número de Reynolds, o efeito do escoamento laminar é desprezível; a transição ocorre em $x \approx 0{,}1$ m. }

9.7.2 Escoamento sobre uma Placa Plana Normal ao Fluxo: Arrasto de Pressão

Num escoamento sobre uma placa plana normal ao fluxo (Fig. 9.9), a tensão de cisalhamento na parede não contribui para a força de arrasto. O arrasto é dado por

$$F_D = \int_{\text{superfície}} p dA$$

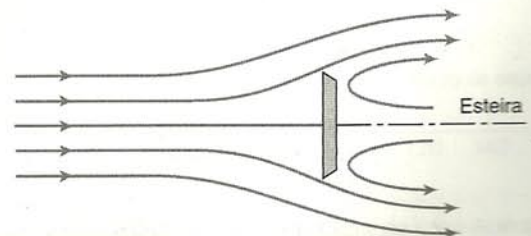



Fig. 9.9 Escoamento sobre uma placa plana normal ao fluxo.

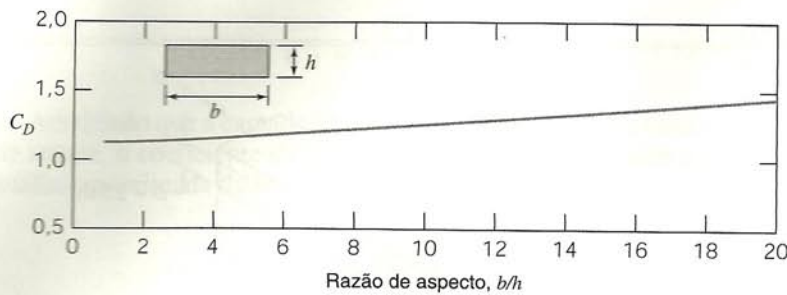



Fig. 9.10 Variação do coeficiente de arrasto com a razão de aspecto para uma placa plana de largura finita normal ao fluxo com $Re_h > 1000$ [14].

Para essa geometria, o escoamento separa-se a partir das bordas da placa; há contrafluxo na esteira de baixa energia da placa. Embora a pressão sobre a superfície posterior da placa seja essencialmente constante, a sua magnitude não pode ser determinada analiticamente. Em conseqüência, devemos nos apoiar em experimentos para determinar a força de arrasto.

O coeficiente de arrasto para o escoamento sobre um objeto imerso baseia-se usualmente na área frontal (ou área projetada) do objeto. (Para aerofólios e asas, a área planiforme é utilizada; veja a Seção 9.8.)

O coeficiente de arrasto para uma placa finita normal ao escoamento depende da razão entre a largura e a altura da placa e do número de Reynolds. Para *Re* (baseado na altura) maior que cerca de 1000, o coeficiente de arrasto é essencialmente independente do número de Reynolds. A variação de C_D com a razão entre a largura e a altura da placa (*b/h*) é mostrada na Fig. 9.10. (A razão *b/h* é definida como a *razão de aspecto* da placa.) Para $b/h = 1{,}0$, o coeficiente de arrasto é um mínimo com $C_D = 1{,}18$; esse valor é ligeiramente mais alto que aquele para um disco circular ($C_D = 1{,}17$) a grandes números de Reynolds.

O coeficiente de arrasto para todos os objetos com bordas agudas é essencialmente independente do número de Reynolds (para $Re \gtrsim 1000$) porque os pontos de separação são fixados pela geometria do objeto. Coeficientes de arrasto para uns poucos objetos selecionados são apresentados na Tabela 9.3.

9.7.3 Escoamento sobre uma Esfera e sobre um Cilindro: Arrastos de Atrito e de Pressão

Focalizamos dois casos especiais de escoamento em que ou o arrasto de atrito ou o de pressão era a única forma de arrasto presen-

Tabela 9.3 Dados de Coeficiente de Arrasto para Objetos Selecionados ($R_e \gtrsim 10^3$)[a]

Objeto	Diagrama	C_D ($Re \gtrsim 10^3$)	
Prisma quadrado		$b/h = \infty$	2,05
		$b/h = 1$	1,05
Disco			1,17
Anel			1,20[b]
Hemisfério (extremidade aberta de face para o fluxo)			1,42
Hemisfério (extremidade aberta faceando a jusante)			0,38
Seção-C (lado aberto de face para o fluxo)			2,30
Seção-C (lado aberto faceando a jusante)			1,20

[a] Dados de [14].
[b] Baseado na área do anel.

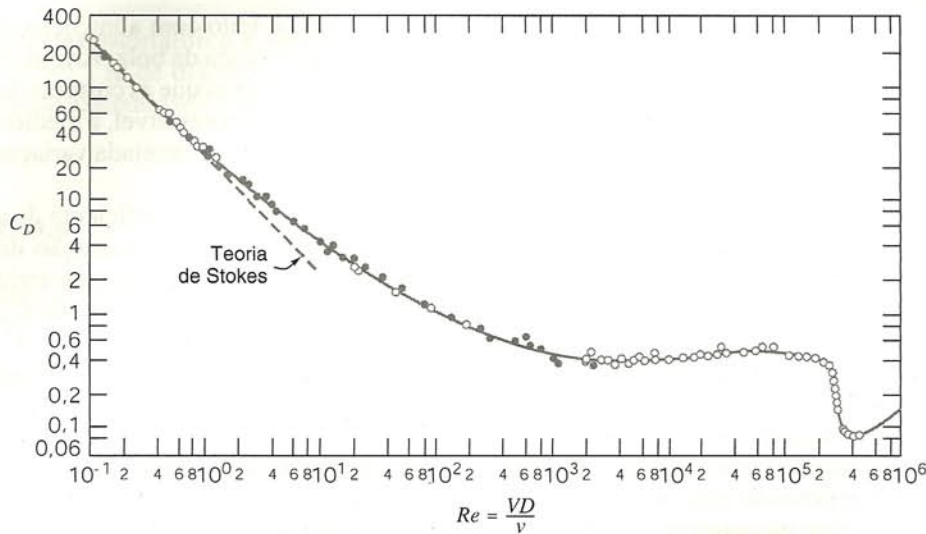



Fig. 9.11 Coeficiente de arrasto de uma esfera lisa como uma função do número de Reynolds [3].

te. No primeiro caso, o coeficiente de arrasto era uma forte função do número de Reynolds, enquanto no segundo, C_D era essencialmente independente do número de Reynolds para $Re \gtrsim 1000$.

No caso de escoamento sobre uma esfera, tanto o arrasto de atrito quanto o de pressão contribuem para o arrasto total. O coeficiente de arrasto para escoamento sobre uma esfera lisa é mostrado na Fig. 9.11 como uma função do número de Reynolds.[3]

Para números de Reynolds muito baixos,[4] $Re \leq 1$, não há separação do escoamento sobre uma esfera; a esteira é laminar e o arrasto é predominantemente arrasto de atrito. Stokes mostrou analiticamente, para escoamentos com números de Reynolds muito baixos onde as forças de inércia podem ser desprezadas, que a força de arrasto sobre uma esfera de diâmetro d, movendo-se com velocidade V através de um fluido de viscosidade μ, é dada por

$$F_D = 3\pi\mu V d$$

O coeficiente de arrasto, C_D, definido pela Eq. 9.30, é então

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

Conforme mostrado na Fig. 9.11, essa expressão concorda com valores experimentais para baixos números de Reynolds, mas começa a desviar-se significativamente dos dados experimentais para $Re > 1,0$.

À medida que o número de Reynolds é aumentado até cerca de 1000, o coeficiente de arrasto cai continuamente. Como um resultado da separação do escoamento, o arrasto é uma combinação dos arrastos de atrito e de pressão. A contribuição relativa do arrasto de atrito diminui com o aumento do número de Reynolds; para $Re \approx 1000$, o arrasto de atrito é aproximadamente 5% do arrasto total.

Na faixa $10^3 < Re < 3 \times 10^5$, a curva de coeficiente de arrasto é relativamente achatada. O coeficiente de arrasto passa por uma queda brusca para um número de Reynolds *crítico* de aproximadamente 3×10^5. Experiências mostram que, para $Re < 3 \times 10^5$, a camada limite na parte dianteira da esfera é laminar. A separação da camada limite ocorre logo a jusante da seção média da esfera; uma esteira turbulenta relativamente larga está presente a jusante da esfera. Na região separada atrás da esfera, a pressão é essencialmente constante e menor do que a pressão na porção dianteira da esfera (Fig. 9.12). Esta diferença de pressão é o fator de maior contribuição para o arrasto.

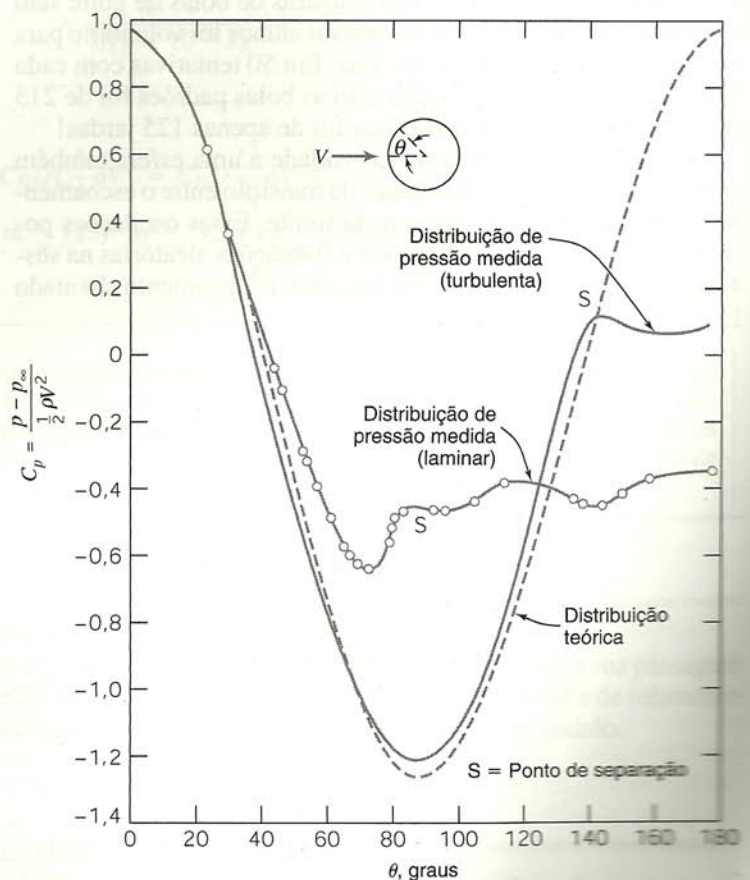



Fig. 9.12 Distribuição de pressão em torno de uma esfera lisa para escoamento de camada limite laminar e turbulento, comparada com escoamento invíscido [16].

[3]Um ajuste de curva aproximado para os dados da Fig. 9.11 é apresentado no Problema 9.104.

[4]Veja o filme da NCFMF *The Fluid Dynamics of Drag* ou [15] para uma boa discussão do arrasto em esferas e outras formas. Um outro excelente filme da NCFMF é *Low Reynolds Number Flows*. Veja também [16].

Para números de Reynolds maiores que 3×10^5, a transição ocorre e a camada limite na porção dianteira da esfera torna-se turbulenta. O ponto de separação move-se então para jusante da seção média da esfera e o tamanho da esteira diminui. A força de pressão resultante sobre a esfera é reduzida (Fig. 9.12) e o coeficiente de arrasto diminui abruptamente.

Uma camada limite turbulenta, uma vez que possui quantidade de movimento maior do que uma laminar, pode resistir melhor a um gradiente de pressão adverso, como discutido na Seção 9.6. Conseqüentemente, escoamento de camada limite turbulento é desejado num corpo rombudo porque ele retarda a separação e, desta forma, reduz o arrasto de pressão.

A transição na camada limite é afetada pela rugosidade da superfície da esfera e pela turbulência na corrente de fluxo. Portanto, a redução de arrasto associada a uma camada limite turbulenta não ocorre para um valor único do número de Reynolds. Experiências com esferas lisas num escoamento com baixo nível de turbulência mostram que a transição pode ser retardada para um número de Reynolds crítico, Re_c, próximo de 4×10^5. Para superfícies rugosas e/ou escoamento de corrente livre altamente turbulento, a transição pode ocorrer a um número de Reynolds crítico tão baixo quanto 50.000.

O coeficiente de arrasto de uma esfera com escoamento de camada limite turbulento é cerca de um quinto daquele para escoamento laminar perto do número de Reynolds crítico. A correspondente redução da força de arrasto pode afetar apreciavelmente a faixa de alcance de uma esfera (p. ex., uma bola de golfe). As "mossas" numa bola de golfe são projetadas para "disparar" ou provocar a camada limite e, assim, garantir escoamento de camada limite turbulento e arrasto mínimo. Para ilustrar esse efeito graficamente, obtivemos amostras de bolas de golfe sem mossas há alguns anos. Um dos nossos alunos foi voluntário para dar algumas tacadas nas bolas lisas. Em 50 tentativas com cada tipo de bola, a distância média com as bolas padrões foi de 215 jardas; a média com as bolas lisas foi de apenas 125 jardas!

A adição de elementos de rugosidade a uma esfera também pode suprimir as oscilações locais da transição entre o escoamento laminar e turbulento na camada limite. Essas oscilações podem levar a variações no arrasto e a flutuações aleatórias na sustentação (veja a Seção 9.8). No beisebol, o lançamento chamado "*knuckle ball*" é feito com a intenção de confundir o rebatedor pela trajetória errática da bola. Arremessando-a quase sem rotação, o lançador espera que as costuras da bola provoquem a transição de maneira imprevisível, à medida que ela se aproxima do rebatedor. Isto causa a desejada variação na trajetória de vôo da bola.

A Fig. 9.13 mostra o coeficiente de arrasto para escoamento sobre um cilindro liso. A variação de C_D com o número de Reynolds apresenta as mesmas características observadas no caso de uma esfera lisa, mas os valores de C_D são cerca de duas vezes maiores.

O escoamento em torno de um cilindro circular liso pode desenvolver uma configuração regular de vórtices alternados a jusante. A *trilha de vórtice*[5] causa uma força de sustentação oscilante sobre o cilindro, perpendicular ao movimento da corrente. A geração de vórtice excita oscilações que causam o "cantar" das linhas telegráficas e as batidas irritantes das adriças nos mastros de bandeiras. Algumas vezes as oscilações estruturais podem atingir magnitude perigosa, acarretando elevadas tensões; elas podem ser reduzidas ou eliminadas pela aplicação de elementos de rugosidade ou de aletas — axiais ou helicoidais — que destroem a simetria do cilindro e estabilizam o escoamento.

Dados experimentais mostram que a geração de vórtices regulares ocorre mais intensamente na faixa de números de Reynolds entre, aproximadamente, 60 e 5000. Para $Re > 1000$, a freqüência adimensional da geração de vórtices, expressa como um número de Strouhal, $St = fD/V$, é aproximadamente igual a 0,21 [3].

A rugosidade afeta o arrasto de cilindros e esferas de modo similar; o número crítico de Reynolds é reduzido pela superfície rugosa e a transição de escoamento laminar para turbulento nas camadas limites ocorre mais cedo. O coeficiente de arrasto é reduzido por um fator de aproximadamente 4, quando a camada limite sobre o cilindro torna-se turbulenta.

[5]A forma regular de vórtices na esteira de um cilindro algumas vezes é chamada de *caminho de vórtice de Karman*, em homenagem ao proeminente estudioso da mecânica dos fluidos, Theodore Von Kármán, que foi o primeiro a predizer o espaçamento estável das trilhas de vórtices sobre bases teóricas em 1911; veja [17].

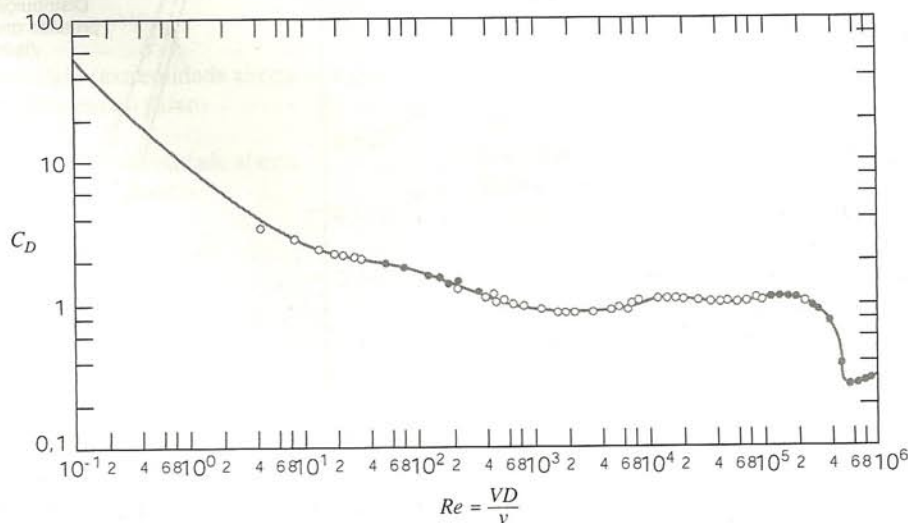



Fig. 9.13 Coeficiente de arrasto para escoamento sobre um cilindro liso como uma função do número de Reynolds [3].

EXEMPLO 9.6 — Arrasto Aerodinâmico e Momento sobre uma Chaminé

Uma chaminé cilíndrica com 1 m de diâmetro e 25 m de altura está exposta a um vento uniforme de 50 km/h nas condições de atmosfera padrão. Efeitos de extremidade e de rajadas podem ser desprezados. Estime o momento fletor na base da chaminé devido às forças do vento.

PROBLEMA-EXEMPLO 9.6

DADOS: Chaminé cilíndrica, $D = 1$ m, $L = 25$ m, em escoamento uniforme com

$$V = 50 \text{ km/h} \qquad p = 101 \text{ kPa (abs)} \qquad T = 15°\text{C}$$

Despreze efeitos de extremidade.

DETERMINAR: O momento fletor na base da chaminé.

SOLUÇÃO:

O coeficiente de arrasto é dado por $C_D = \dfrac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$, e assim $F_D = \frac{1}{2}\rho V^2 A C_D$.

Como a força por unidade de comprimento é uniforme sobre todo o comprimento, a força resultante, F_D, atuará no ponto médio da chaminé. Portanto, o momento em relação à base da chaminé será

$$M_0 = F_D\frac{L}{2} = C_D A\frac{1}{2}\rho V^2\frac{L}{2} = C_D A\frac{L}{4}\rho V^2$$

$$V = \frac{50 \text{ km}}{\text{h}} \times \frac{10^3 \text{ m}}{\text{km}} \times \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} = 13{,}9 \text{ m/s}$$

Para o ar na condição padrão, $\rho = 1{,}23$ kg/m³, e $\mu = 1{,}79 \times 10^{-5}$ kg/(m · s). Por conseguinte,

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = 1{,}23\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 13{,}9\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 1 \text{ m} \times \frac{\text{m}\cdot\text{s}}{1{,}79 \times 10^{-5} \text{ kg}} = 9{,}55 \times 10^5$$

Da Fig. 9.13, $C_D \approx 0{,}35$. Para um cilindro, $A = DL$, logo

$$M_0 = C_D A\frac{L}{4}\rho V^2 = C_D D L\frac{L}{4}\rho V^2 = C_D D\frac{L^2}{4}\rho V^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 0{,}35 \times 1 \text{ m} \times (25)^2 \text{ m}^2 \times 1{,}23\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (13{,}9)^2\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$M_0 = 13{,}0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

M_0

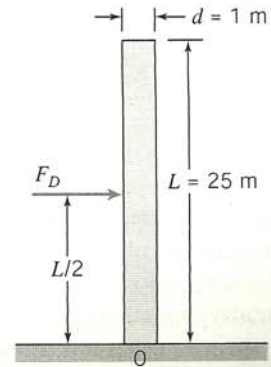
Esse problema ilustra a aplicação de dados de coeficiente de arrasto para calcular o momento devido à força do vento sobre uma estrutura. Na verdade, o perfil de velocidade para o vento sobre o solo não é uniforme. A velocidade do vento na camada limite atmosférica é freqüentemente modelado usando-se o perfil de lei de potência. Pode ser mostrado (veja o Problema 9.112) que o momento devido a um perfil de lei de potência é $n/(n + 1)$ vezes o momento para um escoamento uniforme. Desta forma, um erro pequeno é introduzido quando se admite escoamento uniforme.

EXEMPLO 9.7 — Desaceleração de um Automóvel por um Pára-quedas

Um carro de competição pesando 1600 lbf atinge uma velocidade de 270 mph no quarto de milha. Imediatamente após a sua passagem pelo temporizador luminoso, o motorista abre o pára-quedas de frenagem, com área $A = 25$ pés². As resistências do ar e de rolamento do carro podem ser desprezadas. Determine o tempo necessário para que o veículo desacelere para 100 mph no ar padrão.

PROBLEMA-EXEMPLO 9.7

DADOS: Um carro de competição pesando 1600 lbf, movendo-se com a velocidade $V = 270$ mph, é desacelerado pela força de arrasto de um pára-quedas com área $A = 25$ pés². Despreze as resistências do ar e de rolamento do carro. Admita ar padrão.

DETERMINAR: O tempo requerido para que o veículo desacelere para 100 mph.

SOLUÇÃO:

Considerando o carro como um sistema e escrevendo a segunda lei de Newton no sentido do movimento, temos

$$-F_D = ma = m\frac{dV}{dt}$$

$V_0 = 270$ mph
$V_f = 100$ mph
$\rho = 0{,}00238$ slug/pés³

Como $C_D = \dfrac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$, então $F_D = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A.$

Substituindo na segunda lei de Newton dá

$$-\frac{1}{2}C_D\rho V^2 A = m\frac{dV}{dt}$$

Separando variáveis e integrando, obtemos

$$-\frac{1}{2}C_D\rho\frac{A}{m}\int_0^t dt = \int_{V_0}^{V_f}\frac{dV}{V^2}$$

$$-\frac{1}{2}C_D\rho\frac{A}{m}t = -\frac{1}{V}\Big]_{V_0}^{V_f} = -\frac{1}{V_f}+\frac{1}{V_0} = -\frac{(V_0-V_f)}{V_f V_0}$$

Finalmente,

$$t = \frac{(V_0-V_f)}{V_f V_0}\frac{2m}{C_D\rho A} = \frac{(V_0-V_f)}{V_f V_0}\frac{2W}{C_D\rho A g}$$

Modele o pára-quedas de frenagem como um hemisfério (com o lado aberto voltado para o escoamento). Da Tabela 9.3, $C_D = 1{,}42$ (admitindo $Re > 10^3$). Desse modo, substituindo os valores numéricos, encontramos

$$t = \frac{(270-100)\text{ mph}}{} \times 2 \times 1600\text{ lbf} \times \frac{1}{100\text{ mph}} \times \frac{\text{h}}{270\text{ mi}} \times \frac{1}{1{,}2} \times \frac{\text{pé}^3}{0{,}00238\text{ slug}}$$
$$\times \frac{1}{25\text{pé}^2} \times \frac{\text{s}^2}{32{,}2\text{ pé}} \times \frac{\text{slug}\cdot\text{pé}}{\text{lbf}\cdot\text{s}^2} \times \frac{\text{mi}}{5280\text{ pé}} \times 3600\ \frac{\text{s}}{\text{h}}$$

$$t = 5{,}05\text{ s}$$

Verifiquemos a hipótese sobre o número de Reynolds:

$$Re = \frac{DV}{\nu} = \left[\frac{4A}{\pi}\right]^{1/2}\frac{V}{\nu}$$
$$= \left[\frac{4}{\pi}\times 25\text{pé}^2\right]^{1/2} \times 100\frac{\text{mi}}{\text{h}} \times \frac{\text{h}}{3600\text{ s}} \times 5280\frac{\text{pé}}{\text{mi}} \times \frac{\text{s}}{1{,}57\times 10^{-4}\text{pé}^2}$$
$$Re = 5{,}27\times 10^6$$

Logo, a hipótese é válida.

Todos os dados experimentais apresentados nesta seção são para objetos isolados imersos numa corrente fluida não limitada. O objetivo dos testes em túneis de vento é simular as condições de um escoamento não limitado. Limitações sobre tamanho de equipamento tornam esse objetivo inatingível na prática. Freqüentemente é necessário aplicar correções a dados medidos a fim de obter resultados aplicáveis a condições de escoamento não limitado.

Em numerosos casos de escoamentos reais, ocorrem interações com objetos ou superfícies próximas. O arrasto pode ser reduzido significativamente quando dois ou mais objetos, movendo-se um atrás do outro, interagem. Esse fenômeno é bem conhecido dos ciclistas e daqueles interessados nas corridas de automóvel, onde "seguir no vácuo" é prática comum. Reduções de arrasto de 80% podem ser alcançadas por meio de espaçamento ótimo [18]. O arrasto também pode ser aumentado significativamente quando o espaçamento não é ótimo.

O arrasto também pode ser afetado por objetos adjacentes. Pequenas partículas que caindo sob a ação da gravidade movem-se mais vagarosamente quando têm vizinhos do que quando estão isoladas. Esse fenômeno, que é ilustrado no filme da NCFMF, *Low Reynolds Number Flows*, tem importantes aplicações nos processos de mistura e de sedimentação.

Dados experimentais para coeficientes de arrasto sobre objetos devem ser selecionados e aplicados cuidadosamente. Aten-

ção especial deve ser dada às diferenças entre as condições reais e as condições mais controladas sob as quais as medições foram feitas.

9.7.4 Carenagem

A extensão da região de escoamento separado atrás de muitos dos objetos considerados na seção anterior pode ser reduzida ou eliminada por carenagem, ou seja, pela forma aerodinâmica do corpo. O objetivo da carenagem é reduzir o gradiente de pressão adverso que ocorre atrás do ponto de espessura máxima sobre o corpo. Isso retarda a separação da camada limite e, por conseguinte, reduz o arrasto de pressão. Entretanto, a adição de uma seção posterior carenada aumenta a área superficial do corpo, o que causa o aumento do arrasto por atrito superficial. A forma carenada ótima é, portanto, aquela que dá o arrasto total mínimo. Esses efeitos são discutidos detalhadamente na série de filmes da NCFMF, *The Fluid Dynamics of Drag*.

O gradiente de pressão em volta de uma forma de "lágrima" (um cilindro "carenado") é menos severo do que aquele em volta de um cilindro de seção circular. A troca entre arrasto de pressão e de atrito para esse caso é ilustrada pelos resultados apresentados na Fig. 9.14, para testes com $Re_c = 4 \times 10^5$. (Este número de Reynolds é típico daquele para a estrutura das asas dos primeiros aviões.) Da figura, o mínimo coeficiente de arrasto é $C_D \approx 0,06$, o qual ocorre quando a razão entre a espessura e a corda é $t/c \approx 0,25$. Este valor é aproximadamente 20% do coeficiente mínimo de arrasto de um cilindro circular da mesma espessura! Conseqüentemente, uma estrutura carenada com cerca de cinco vezes a espessura de uma estrutura cilíndrica poderia ser utilizada sem penalizar o arrasto aerodinâmico.

A espessura máxima para as formas mostradas na Fig. 9.14 está localizada aproximadamente a 25% da distância da corda, contada a partir da borda de ataque. A maior parte do arrasto nas seções mais finas é devida ao atrito superficial nas camadas limites turbulentas das seções traseiras afuniladas. O interesse em aerofólios de baixo arrasto cresceu durante os anos 30. A NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) desenvolveu diversas séries de aerofólios de "escoamento laminar" para os quais a transição era postergada para 60 ou 65% do comprimento da corda contado a partir do nariz do aerofólio.

Distribuição de pressão e coeficientes de arrasto[6] para dois aerofólios simétricos de envergadura infinita e 15% de espessura, em ângulo de ataque zero, são apresentados na Fig. 9.15. A transição no aerofólio convencional (NACA 0015) ocorre onde o gradiente de pressão torna-se adverso, em $x/c = 0,13$, perto do ponto de espessura máxima. Desse modo, a maior parte da superfície do aerofólio é coberta com uma camada limite turbulenta; o coeficiente de arrasto é $C_D \approx 0,0061$. O ponto de espessura máxima foi deslocado para trás sobre o aerofólio projetado para escoamento laminar (NACA 66_2-015). A camada limite é mantida no regime laminar pelo gradiente de pressão favorável até $x/c = 0,63$. Assim, a maior parte do escoamento é laminar; $C_D \approx 0,0035$ para esta seção, baseado na área planiforme. O coeficiente de arrasto baseado na área frontal é $C_{D_f} = C_D/0,15 = 0,0233$, ou cerca de 40% daquele para as formas mostradas na Fig. 9.14.

Testes em túneis de vento especiais têm mostrado que o escoamento laminar pode ser mantido até números de Reynolds de comprimento da ordem de 30 milhões por configuração apropriada de perfil. Pelo fato de terem características de arrasto favoráveis, os aerofólios de escoamento laminar são utilizados no projeto da maioria dos modernos aviões subsônicos.

Avanços recentes tornaram possível o desenvolvimento de formas de baixo arrasto ainda melhores do que aquelas da série NACA 60. Experimentos [20] levaram ao desenvolvimento de uma distribuição de pressão que impedia a separação enquanto mantinha a camada limite turbulenta numa condição que produz atrito superficial desprezível. Métodos aperfeiçoados para o cálculo de formas de corpo que produziam uma distribuição de pressão desejada [21, 22] levaram ao desenvolvimento de formas quase ótimas para estruturas espessas com baixo arrasto. A Fig. 9.16 mostra um exemplo dos resultados.

A redução de arrasto aerodinâmico também é importante para aplicações de veículos rodoviários. O interesse em economia de combustível tem dado importante incentivo ao projeto de automóveis que equilibre desempenho aerodinâmico eficiente com forma atraente. A redução de arrasto também tem-se tornado importante para ônibus e caminhões.

[6] Note que os coeficientes de arrasto para aerofólios são baseados na área planiforme, isto é, $C_D = F_D/(\rho V^2 A_p/2)$, onde A_p é a máxima área projetada da asa.

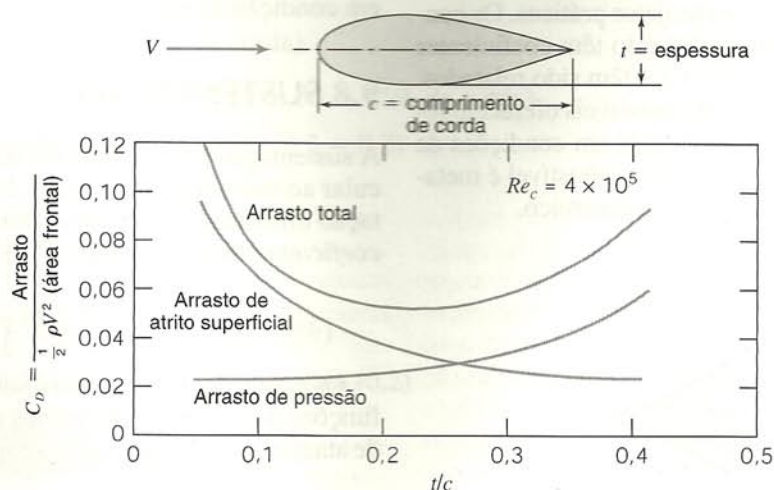



Fig. 9.14 Coeficiente de arrasto sobre uma estrutura carenada como uma função da razão de espessura, mostrando as contribuições de atrito superficial e pressão sobre o arrasto total [17].

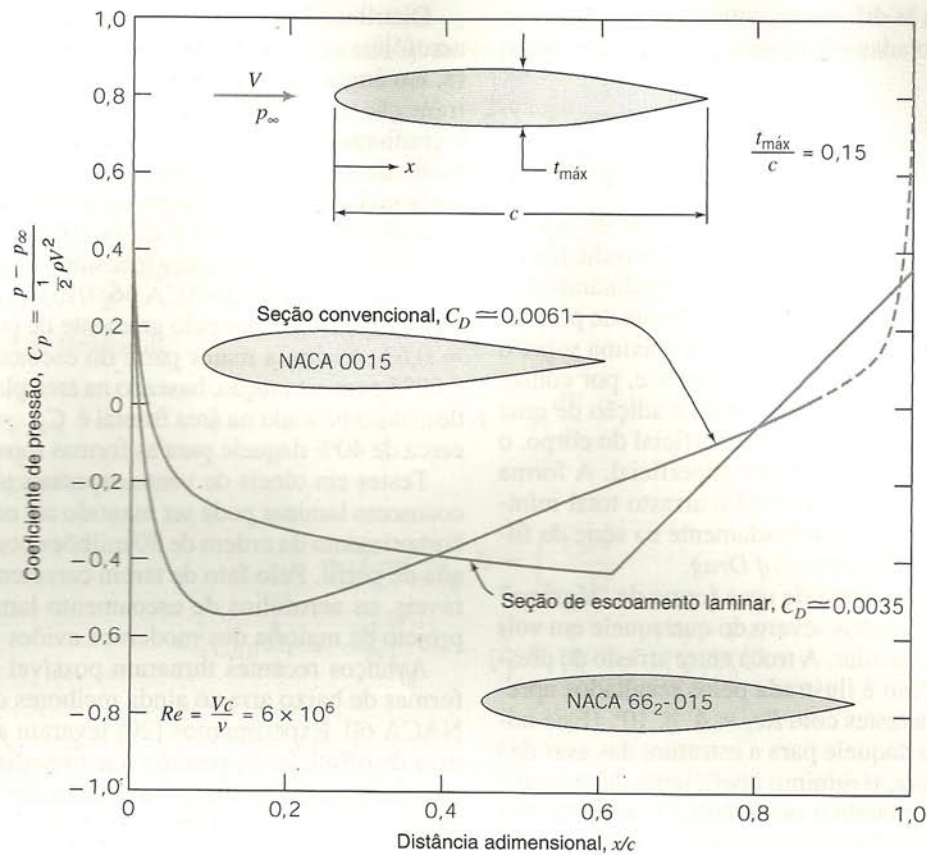



Fig. 9.15 Distribuições teóricas de pressão em ângulo de ataque zero para duas seções de aerofólio simétricas com razão de espessura de 15%. (Dados de [19.])

Considerações práticas limitam o comprimento total de veículos rodoviários. Traseiras inteiramente carenadas não são práticas para todos os veículos, exceto para os de teste e de corrida. Conseqüentemente, não é possível obter resultados comparáveis àqueles para formas ótimas de aerofólios. Contudo, é possível otimizar os contornos dianteiro e traseiro dentro das restrições estabelecidas para o comprimento total [23-25].

Muita atenção tem sido dada aos contornos dianteiros. Estudos sobre ônibus têm mostrado que são possíveis reduções de arrasto da ordem de 30% dando-se especial atenção à dianteira [25]. Dessa forma, é possível reduzir o coeficiente de arrasto de um ônibus de cerca de 0,65 para menos de 0,5 com projetos práticos. Os conjuntos cavalo-reboque de transporte rodoviário têm coeficientes mais elevados — valores de C_D de 0,90 a 1,1 têm sido relatados. Dispositivos adicionais comercialmente disponíveis oferecem reduções de arrasto de até 15%, particularmente em condições de ventos frontais fortes. A economia típica de combustível é metade da porcentagem da redução de arrasto aerodinâmico.

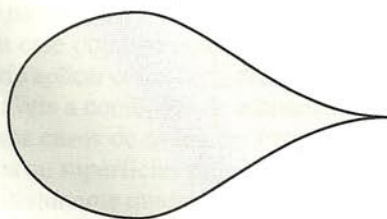



Fig. 9.16 Forma quase ótima para estrutura de baixo arrasto [22].

Os contornos e os detalhes frontais são importantes nos automóveis. Uma frente baixa e contornos suavemente arredondados são as características primárias que promovem baixo arrasto. Os raios da coluna, a moldura do pára-brisa e o escamoteamento de acessórios para reduzir arrastos parasita e de interferência têm recebido atenção crescente. Como resultado, coeficientes de arrasto têm sido reduzidos de cerca de 0,55 para 0,30, ou menos, nos automóveis de produção recente. Avanços recentes em métodos computacionais têm levado ao desenvolvimento de formas ótimas geradas por computador. Diversos projetos foram propostos, com alegações de valores de C_D abaixo de 0,2, para veículos em condição de estrada.

9.8 SUSTENTAÇÃO

A sustentação é a componente da força aerodinâmica perpendicular ao movimento do fluido. Um exemplo comum de sustentação dinâmica ocorre para escoamento sobre um aerofólio.[7] O *coeficiente de sustentação*, C_L, é definido como

$$C_L \equiv \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_p} \tag{9.38}$$

Os coeficientes de arrasto e sustentação para um aerofólio são funções do número de Reynolds e do ângulo de ataque; o ângulo de ataque, α, é o ângulo entre a corda do aerofólio e o vetor veloci-

[7]Escoamento sobre um aerofólio é mostrado no filme da NCFMF *Boundary Layer Control*.

dade de corrente livre. A *corda* de um aerofólio é a linha reta ligando a borda de ataque e a borda de fuga. A forma da seção da asa é obtida pela combinação da *linha média* com a distribuição de espessura (veja [19] para detalhes). Quando o aerofólio tem uma seção simétrica, a linha média e a corda são ambas linhas retas, e elas coincidem. Um aerofólio com linha média curva é chamado de *arqueado* ou *cambado*.

A área perpendicular ao escoamento muda com o ângulo de ataque. Conseqüentemente, a área planiforme A_p (a máxima área projetada da asa) é usada para definir os coeficientes de arrasto e de sustentação para um aerofólio.

O fenômeno de sustentação aerodinâmica é normalmente explicado pelo aumento de velocidade (causando decréscimo de pressão) sobre a superfície superior de um aerofólio e a diminuição de velocidade (causando aumento de pressão) ao longo da superfície inferior de um aerofólio. As distribuições de pressões resultantes são mostradas claramente no filme *Boundary Layer Control*. Por causa das diferenças de pressão relativas à atmosfera, a superfície superior do aerofólio pode ser chamada de *superfície de sucção* e a superfície inferior de *superfície de pressão*.

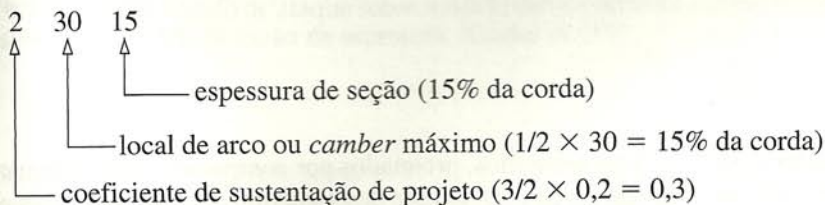
Conforme mostrado no Problema-Exemplo 6.12, sustentação sobre um corpo também pode ser relacionada com a circulação em torno do perfil: para que a sustentação seja gerada, deve haver uma circulação líquida em torno do perfil. Pode-se imaginar que a circulação seja causada por um turbilhão "ligado" no perfil.

Avanços científicos em métodos computacionais e em computadores mais poderosos continuam. Entretanto, a maior parte dos dados disponíveis na literatura sobre aerofólios foram obtidos de testes em túnel de vento. A referência 19 contém resultados de um grande número de testes conduzidos pela NACA (o Comitê Nacional Consultor para Aeronáutica — o antecessor da NASA). Dados para algumas formas de perfis representativos da NACA são descritos nos próximos parágrafos.

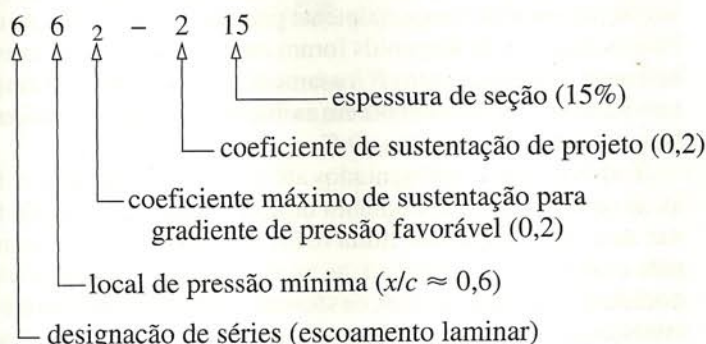
Dados de coeficientes de arrasto e sustentação para perfis típicos convencionais e de escoamento laminar são traçados na Fig. 9.17, para um número de Reynolds de 9×10^6 baseado no comprimento de corda. As formas das seções na Fig. 9.17 são designadas como segue:

Convencional — 23015

2 30 15

- 15 — espessura de seção (15% da corda)
- 30 — local de arco ou *camber* máximo ($1/2 \times 30 = 15\%$ da corda)
- 2 — coeficiente de sustentação de projeto ($3/2 \times 0{,}2 = 0{,}3$)

Escoamento laminar — $66_2 - 215$

6 6 $_2$ - 2 15

- 15 — espessura de seção (15%)
- 2 — coeficiente de sustentação de projeto (0,2)
- $_2$ — coeficiente máximo de sustentação para gradiente de pressão favorável (0,2)
- 6 (segundo) — local de pressão mínima ($x/c \approx 0{,}6$)
- 6 (primeiro) — designação de séries (escoamento laminar)

Ambas as seções são arqueadas para dar sustentação a ângulo de ataque zero. À medida que o ângulo de ataque aumenta, os coeficientes de sustentação aumentam suavemente até que um máximo é atingido. Aumentos adicionais no ângulo de ataque produzem um decréscimo súbito em C_L. Diz-se que o aerofólio *estolou* ou perdeu sustentação quando C_L cai desse modo.

Perda de sustentação do aerofólio resulta quando a separação do escoamento ocorre sobre uma grande porção da sua superfície superior. À medida que o ângulo de ataque aumenta, o ponto de estagnação move-se para trás ao longo da superfície inferior, como mostrado esquematicamente para a seção de escoamento laminar simétrica, na Fig. 9.18*a*. O escoamento na superfície superior deve então acelerar-se bruscamente a fim de contornar o nariz do aerofólio.[8] O efeito de ângulo de ataque sobre a distribuição de pressão teórica na superfície superior é mostrada na Fig. 9.18*b*. A pressão mínima torna-se mais baixa e sua localização move-se para frente na superfície superior. Um severo gradiente adverso de pressão aparece em seguida ao ponto de pressão mínima; finalmente, o gradiente adverso de pressão causa a completa separação do escoamento da superfície superior e o aerofólio "estola".

O movimento do ponto de pressão mínima e a acentuação do gradiente de pressão adverso são responsáveis pelo aumento súbito de C_D para a seção de escoamento laminar, o que é visível na Fig. 9.17. O aumento súbito de C_D é causado pela transição prematura, de laminar para turbulento, do escoamento de camada limite na superfície superior. Aeronaves com seções de escoamento laminar são projetadas para voar na região de baixo arrasto.

Como as seções de escoamento laminar têm bordas de ataque muito agudas, todos os efeitos que descrevemos são ampliados, e elas estolam a ângulos de ataque inferiores aos das seções convencionais, conforme mostrado na Fig. 9.17. O coeficiente de sustentação máximo possível, $C_{L_{máx}}$, também é menor para seções de escoamento laminar.

Gráficos de C_L *versus* C_D (chamados polares de sustentação-arrasto) são empregados com freqüência na apresentação de dados de aerofólios. Um gráfico polar é dado na Fig. 9.19 para as duas seções que discutimos. A razão sustentação/arrasto, C_L/C_D, é mostrada no

[8]Modelos de escoamento e distribuição de pressão para seções de aerofólio são mostrados no filme da NCFMF *Boundary Layer Control*.

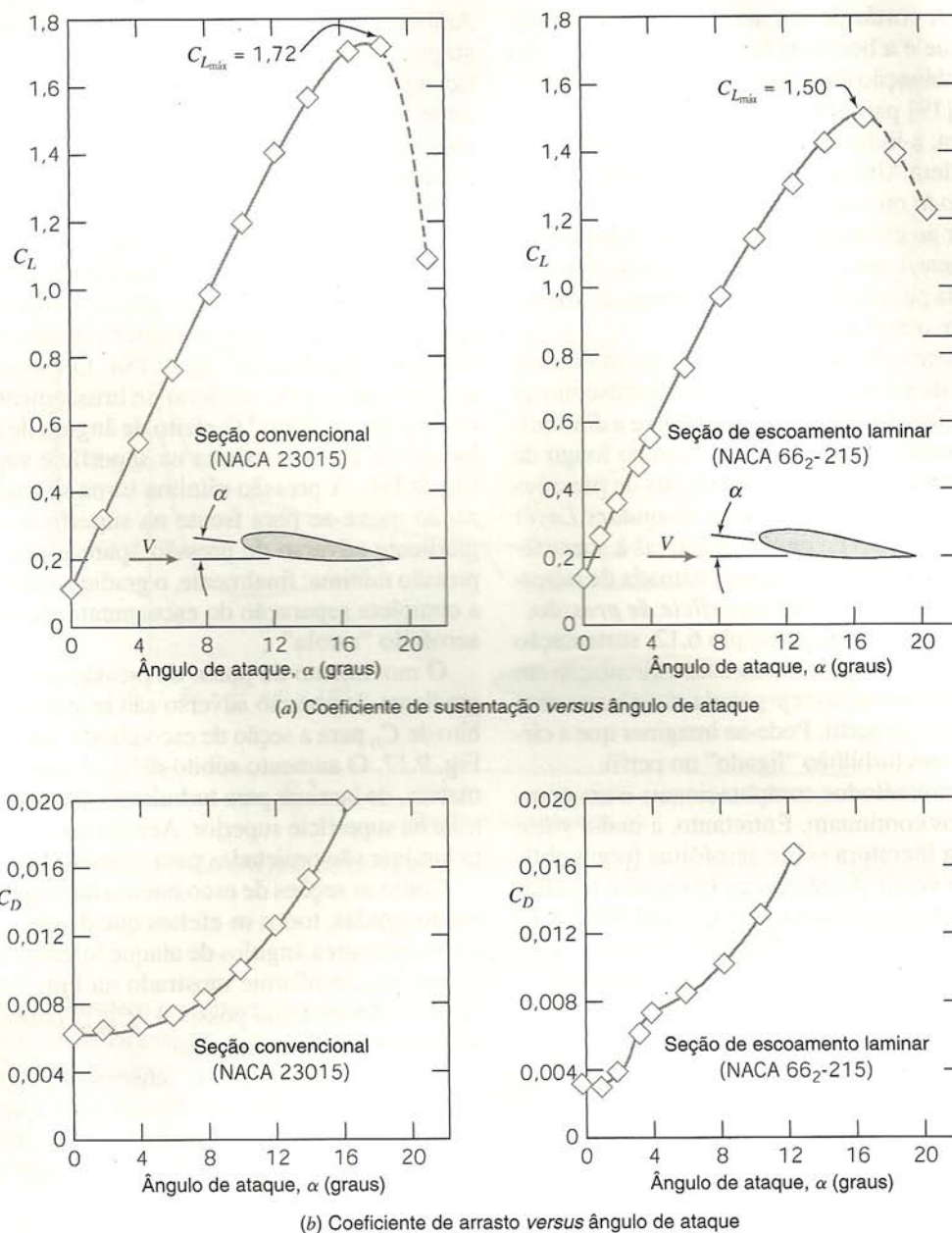



Fig. 9.17 Coeficientes de arrasto e sustentação *versus* ângulo de ataque para duas seções de aerofólio de 15% de razão de espessura para $Re_c = 9 \times 10^6$ (Dados de [19]).

coeficiente de sustentação de projeto para ambas as seções. Para um avião de massa dada e velocidade fixa, a potência requerida para vôo horizontal é inversamente proporcional à razão sustentação/arrasto. A vantagem da seção de escoamento laminar é clara.

Aperfeiçoamentos recentes em capacidades computacionais e de modelagem tornaram possível projetar aerofólios com seções que desenvolvem elevada sustentação enquanto mantêm arrasto muito baixo [21, 22]. Códigos de cálculo de camada limite são empregados com métodos inversos na determinação de escoamento potencial para desenvolver distribuições de pressão e forma geométrica resultante que retardam a transição para o local mais a ré possível no aerofólio. A camada limite turbulenta que se segue à transição é mantida num estado de separação incipiente, com atrito superficial aproximadamente zero, pela configuração adequada da distribuição de pressão.

Tais aerofólios, projetados por computador, têm sido usados em carros de corrida para desenvolver forças de sustentação negativas muito elevadas (para baixo), a fim de melhorar a estabilidade em altas velocidades e o desempenho nas curvas [21]. Seções de aerofólios especialmente projetados para operação com baixos números de Reynolds foram empregados para as asas e a hélice do homem-pássaro "Gossamer Condor", ganhador do prêmio Kremer [26], atualmente em exibição no Museu Aeroespacial Nacional, em Washington, D.C.

Todos os dados apresentados até agora são para *seções*, fatias de aerofólios de envergadura infinita. Efeitos de extremidade nas asas de envergadura finita reduzem a sustentação e aumentam o arrasto. Dessa forma, as razões sustentação/arrasto que podem ser atingidas na prática são inferiores àquelas obtidas nos testes de seções de aerofólios.

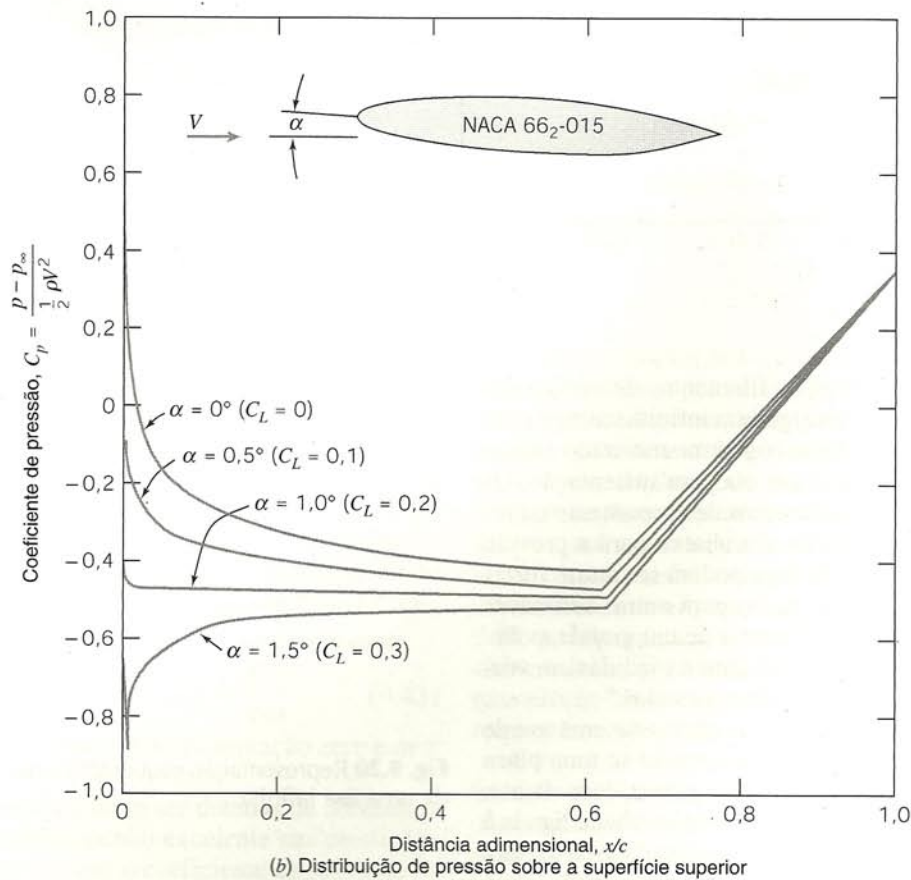
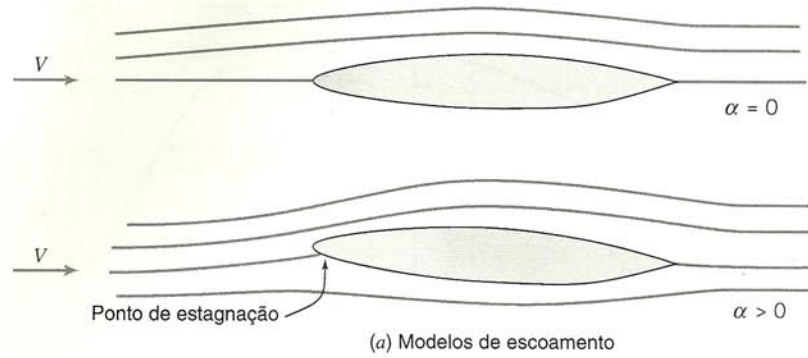



Fig. 9.18 Efeito do ângulo de ataque sobre modelo de escoamento e distribuição de pressão teórica para aerofólio de escoamento laminar simétrico de 15% de razão de espessura. (Dados de [19].)

Os efeitos de envergadura finita podem ser correlacionados usando-se a razão de aspecto, definida como

$$ar \equiv \frac{b^2}{A_p} \tag{9.39}$$

onde A_p é a área planiforme e b é a envergadura da asa. Para uma planiforme retangular de envergadura b, e corda c,

$$ar = \frac{b^2}{A_p} = \frac{b^2}{bc} = \frac{b}{c}$$

A máxima razão sustentação/arrasto ($L/D = C_L/C_D$) para uma moderna seção de baixo arrasto pode ser tão alta quanto 400 para uma razão de aspecto infinita. Um planador de alto desempenho com $ar = 40$ pode ter $L/D = 40$; um avião leve típico ($ar \approx 12$) pode ter $L/D \approx 20$ ou próximo disto. Dois exemplos de formas bastante inferiores são os corpos de sustentação utilizados para reentrada na atmosfera e os esquis aquáticos, que são *hidrofólios* de baixa razão de aspecto. Para ambas essas formas, L/D é tipicamente menor do que a unidade.

Variações na razão de aspecto são encontradas na natureza. As aves planadoras, como os albatrozes ou o condor da Califórnia, têm asas delgadas de longa envergadura. Os pássaros que devem manobrar rapidamente para pegar a sua presa, como as corujas, têm asas de envergadura relativamente curta, porém de grande área, o que lhes confere baixo *carregamento de asa* (razão entre o peso e a área planiforme) e, portanto, alta manobrabilidade.

Circulação é necessária sempre que uma asa está produzindo sustentação (veja Seção 6.6.5). A circulação pode ser vista como

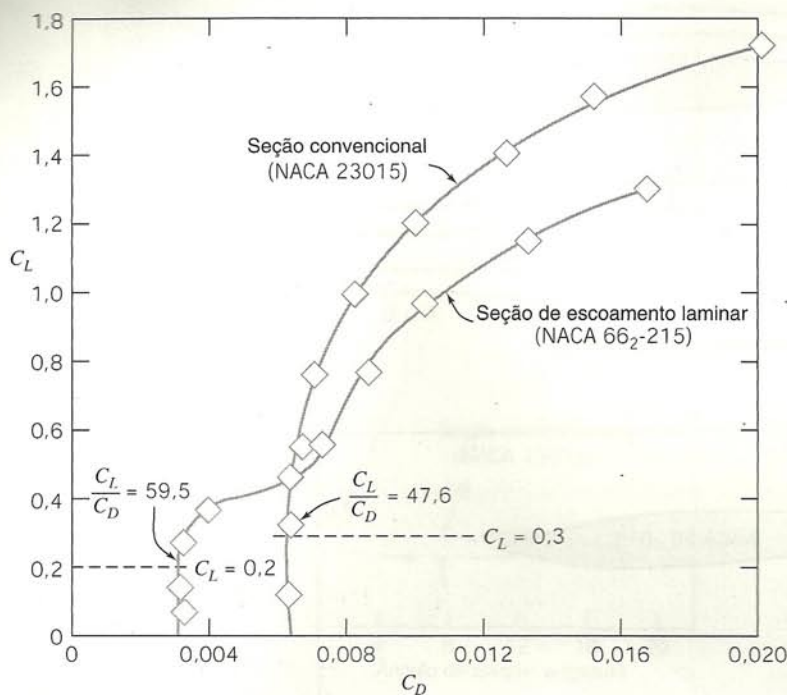



Fig. 9.19 Polares de sustentação-arrasto para duas seções de aerofólio de 15% de razão de espessura. (Dados de [19.])

um vórtice "ligado" na asa. Como os filamentos de vórtice devem ser contínuos, uma asa de envergadura infinita carrega consigo um sistema de vórtices de fuga, conforme mostrado esquematicamente na Fig. 9.20, sempre que ela gera sustentação. Os vórtices de fuga resultam dos vazamentos de escoamento ao redor das pontas das asas, da pressão alta abaixo para a pressão baixa acima da asa. Os vórtices de fuga podem ser muito fortes e persistentes, podendo apresentar riscos para outras aeronaves que se encontrem entre 5 a 10 milhas atrás de um grande avião. Velocidades de ar acima de 200 mph já foram medidas em vórtices de fuga oriundos de aviões grandes e pesados.[9]

É possível aumentar a razão de aspecto *efetiva* de uma asa de razão de aspecto geométrico dada, acrescentando-se uma placa (*endplate*) ou uma pequena asa (*winglet*) na extremidade da asa. Uma placa de extremidade pode ser uma simples chapa ligada à asa, perpendicular à envergadura, como na asa montada na traseira de um carro de corrida mostrada (mais adiante) na Fig. 9.26. Uma placa de extremidade funciona bloqueando o escoamento que tende a migrar da região de alta pressão abaixo da ponta da asa para a de baixa pressão acima da ponta, quando a asa está produzindo sustentação. Quando a placa de extremidade é acrescentada, as intensidades dos vórtices de fuga e do arrasto induzido são reduzidas.

Winglets são asas curtas, de contornos aerodinâmicos, montadas perpendicularmente à asa na sua ponta. Como a placa de extremidade, a *winglet* reduz as intensidades do sistema de vórtice de fuga e do arrasto induzido. A *winglet* também produz uma pequena componente de força no sentido do vôo, que tem o efeito de reduzir ainda mais o arrasto total do avião. O contorno e o ângulo de ataque da *winglet* são ajustados com base em testes de túnel de vento de modo a proporcionarem resultados ótimos.

As velocidades induzidas para baixo numa asa com sustentação reduzem o ângulo de ataque efetivo, diminuindo a sustentação. (Para um ângulo de ataque geométrico fixo, a asa "vê" um

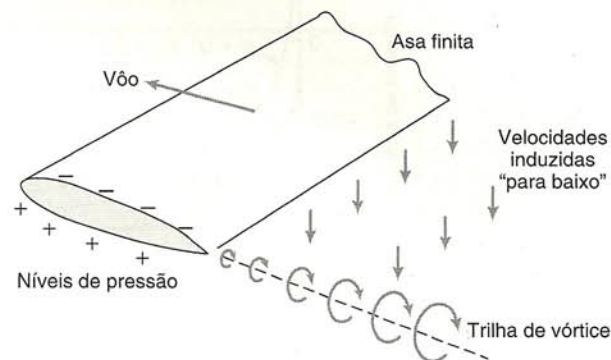



Fig. 9.20 Representação esquemática do sistema de vórtice de fuga de uma asa infinita.

escoamento a aproximadamente meio caminho entre as direções de montante e de jusante do fluxo.) Para manter a mesma força de sustentação, o ângulo geométrico de ataque deve ser aumentado. Isso causa o aumento do arrasto comparado com aquele para uma razão de aspecto infinita. Esses efeitos são ilustrados esquematicamente na Fig. 9.21.

A teoria e a experiência mostram que as velocidades dirigidas para baixo reduzem o ângulo de ataque efetivo em proporção ao coeficiente de sustentação. Comparado com uma seção de aerofólio com $ar = \infty$, o ângulo de ataque geométrico de uma asa deve ser aumentado de

$$\Delta\alpha \approx \frac{C_L}{\pi ar} \tag{9.40}$$

para obter o coeficiente de sustentação da seção. Isso provoca um aumento do coeficiente de arrasto para a asa dado por

$$\Delta C_D \approx C_L\,\Delta\alpha \approx \frac{C_L^2}{\pi ar} \tag{9.41}$$

Esse aumento de arrasto devido à sustentação é denominado *arrasto induzido*.

[9]Sforza, P. M., "Aircraft Vortices: Benign or Baleful?" *Space/Aeronautics*, *53*, 4, April 1970, pp. 42-49. Veja também o filme da Universidade de Iowa *Form Drag, Lift, and Propulsion.*

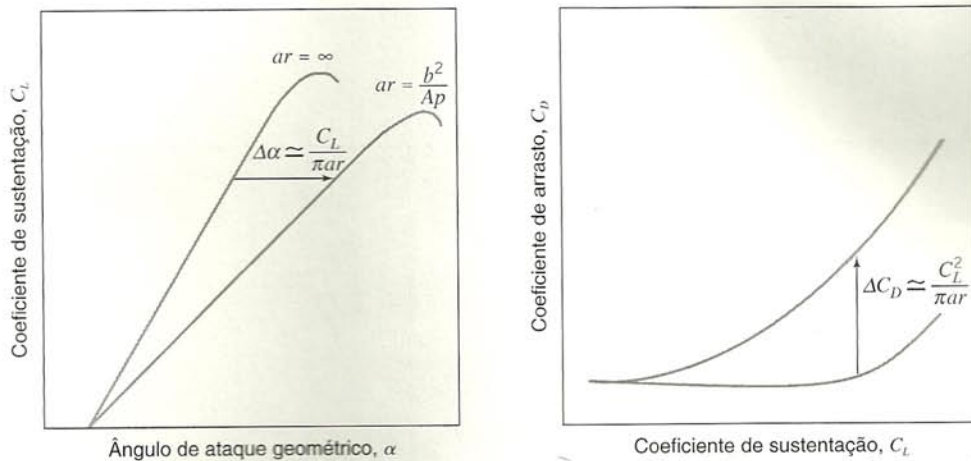



Fig. 9.21 Efeito da razão de aspecto finito sobre coeficientes de sustentação e de arrasto para uma asa.

Quando escrita em termos de razão de aspecto efetiva, o arrasto de uma asa de envergadura finita torna-se [19]

$$C_D = C_{D,\infty} + C_{D,i} = C_{D,\infty} + \frac{C_L^2}{\pi ar} \qquad (9.42)$$

onde $C_{D,\infty}$ é o coeficiente de arrasto da seção para C_L, $C_{D,i}$ é o coeficiente de arrasto induzido para C_L e ar é a razão de aspecto da asa de envergadura finita.

Arrasto em aerofólios surge de forças viscosas e de pressão. O arrasto viscoso varia com o número de Reynolds, mas apenas ligeiramente com o ângulo de ataque. Essas relações e alguma terminologia comumente empregada são ilustradas na Fig. 9.22.

Uma aproximação útil para o polar de arrasto para uma aeronave completa pode ser obtida pela adição do arrasto induzido ao arrasto para sustentação zero. O arrasto para qualquer coeficiente de sustentação é obtido de

$$C_D = C_{D,0} + C_{D,i} = C_{D,0} + \frac{C_L^2}{\pi ar} \qquad (9.43)$$

onde $C_{D,0}$ é o coeficiente de arrasto para sustentação zero e ar é a razão de aspecto.

Como vimos, as aeronaves podem ser dotadas de aerofólios de baixo arrasto para dar desempenho excelente nas condições de cruzeiro. Contudo, uma vez que o coeficiente de sustentação máximo é baixo para aerofólios delgados, um esforço adicional deve ser feito para a obtenção de velocidades de aterrissagem aceitavelmente baixas. Em condições de vôo estável, a sustentação deve igualar o peso da aeronave. Dessa forma,

$$W = F_L = C_L \tfrac{1}{2}\rho V^2 A$$

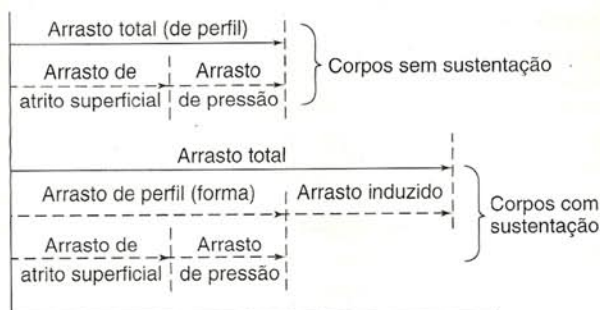



Fig. 9.22 Decomposição de arrasto sobre corpos com e sem sustentação.

A velocidade mínima de vôo é obtida quando $C_L = C_{L_{\text{máx}}}$. Resolvendo para $V_{\text{mín}}$,

$$V_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho C_{L_{\text{máx}}} A}} \qquad (9.44)$$

De acordo com a Eq. 9.44, a velocidade mínima de aterrissagem pode ser reduzida pelo aumento ou de $C_{L_{\text{máx}}}$ ou da área da asa. Duas técnicas básicas são empregadas para controlar essas variáveis: seções de asa de geometria variável (por exemplo, obtidas pelo uso de *flaps*), ou técnicas de controle de camada limite.

Os *flaps* são partes móveis da borda de fuga de uma asa que podem ser prolongadas durante a aterrissagem e a decolagem a fim de aumentar a área efetiva da asa. Os efeitos sobre a sustentação e o arrasto de duas configurações típicas de *flaps* são mostrados na Fig. 9.23, quando aplicadas à seção de aerofólio NACA 23012. O coeficiente máximo de sustentação para essa seção é aumentado de 1,52 na condição "limpa" para 3,48 com *flaps* duplos. Da Eq. 9.44, a correspondente redução na velocidade de aterrissagem seria de 34%.

A Fig. 9.23 mostra que o arrasto de seção é aumentado substancialmente por dispositivos de alta sustentação. Da Fig. 9.23*b*, o arrasto de seção para $C_{L_{\text{máx}}}$ ($C_D \approx 0{,}28$), com *flaps* duplos é cerca de cinco vezes maior do que o arrasto para $C_{L_{\text{máx}}}$ ($C_D \approx 0{,}055$) para o aerofólio limpo. O arrasto induzido decorrente da sustentação deve ser adicionado ao arrasto de seção para se obter o arrasto total. Como o arrasto induzido é proporcional a C_L^2 (Eq. 9.41), o arrasto total cresce abruptamente para baixas velocidades da aeronave. Para velocidades próximas do estol, o arrasto pode crescer o suficiente para exceder o empuxo provido pelos motores. A fim de evitar esta perigosa região de operação instável, a Federal Aviation Administration (FAA) limita a operação de aviões comerciais a velocidades superiores a 1,2 vez a velocidade de estol.

Embora os detalhes das técnicas de controle de camada limite estejam além dos objetivos deste livro, o propósito básico de todas elas é retardar a separação ou reduzir o arrasto pela adição de quantidade de movimento à camada limite através de sopro, ou da remoção de fluido de baixa quantidade de movimento da camada limite por sucção.[10] Muitos exemplos de sistemas práticos de controle de camada limite podem ser vistos em aviões comerciais de transporte no aeroporto da sua cidade. Dois sistemas típicos são mostrados na Fig. 9.24.

[10] Veja o excelente filme *Boundary Layer Control* para uma revisão dessas técnicas.

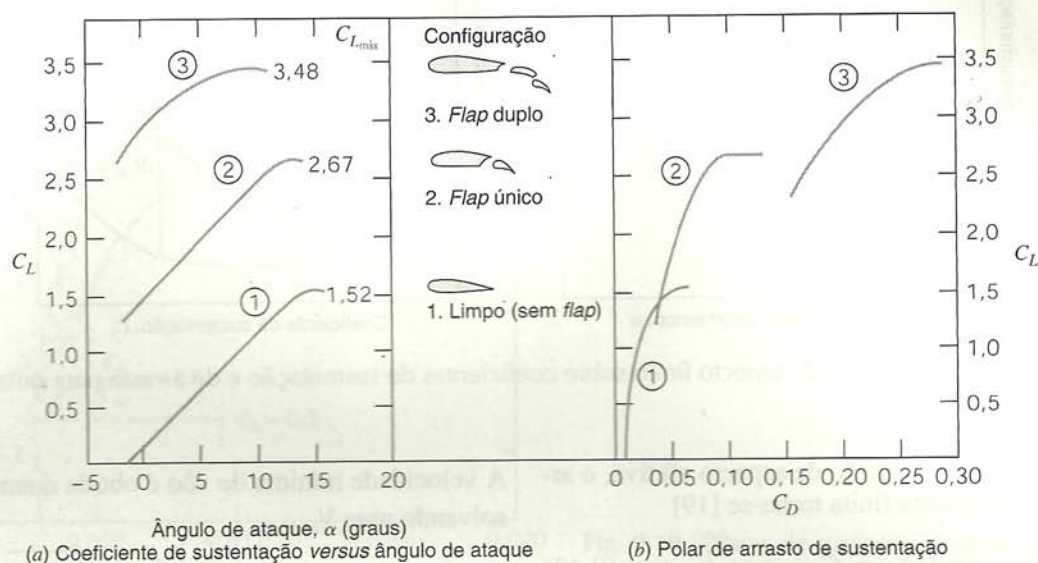



Fig. 9.23 Efeito de *flaps* sobre características aerodinâmicas da seção de aerofólio NACA 23012. (Dados de [19]).

Fig. 9.24 (*a*) Aplicação de dispositivos de controle de camada limite de alta sustentação para reduzir velocidade de aterrissagem de um avião de transporte a jato. A asa do Boeing 777 é altamente mecanizada. Na configuração de aterrissagem, grandes flapes encaixados na borda traseira da asa rolam da parte inferior da asa e defletem para baixo para aumentar a área e o *camber* da asa, aumentando por conseguinte o coeficiente de sustentação. Ripas metálicas na borda de ataque da asa movem-se para frente e para baixo, para aumentar o raio efetivo da borda de ataque e prevenir a separação do escoamento, e para abrir uma ranhura que ajuda a manter o fluxo de ar junto à superfície superior da asa. Após tocar o solo, chapas defletoras (*spoilers*, não mostrados em uso) são levantados em frente de cada *flap* para reduzir a sustentação e assegurar que o avião permaneça no solo, a despeito do uso de dispositivos de aumento de sustentação. (Esta fotografia foi tirada durante um vôo de teste. Cones de fluxo são anexados aos *ailerons* a fim de identificar regiões de escoamento separado sobre essas superfícies.) (Fotografia cortesia de Boeing Airplane Company.)

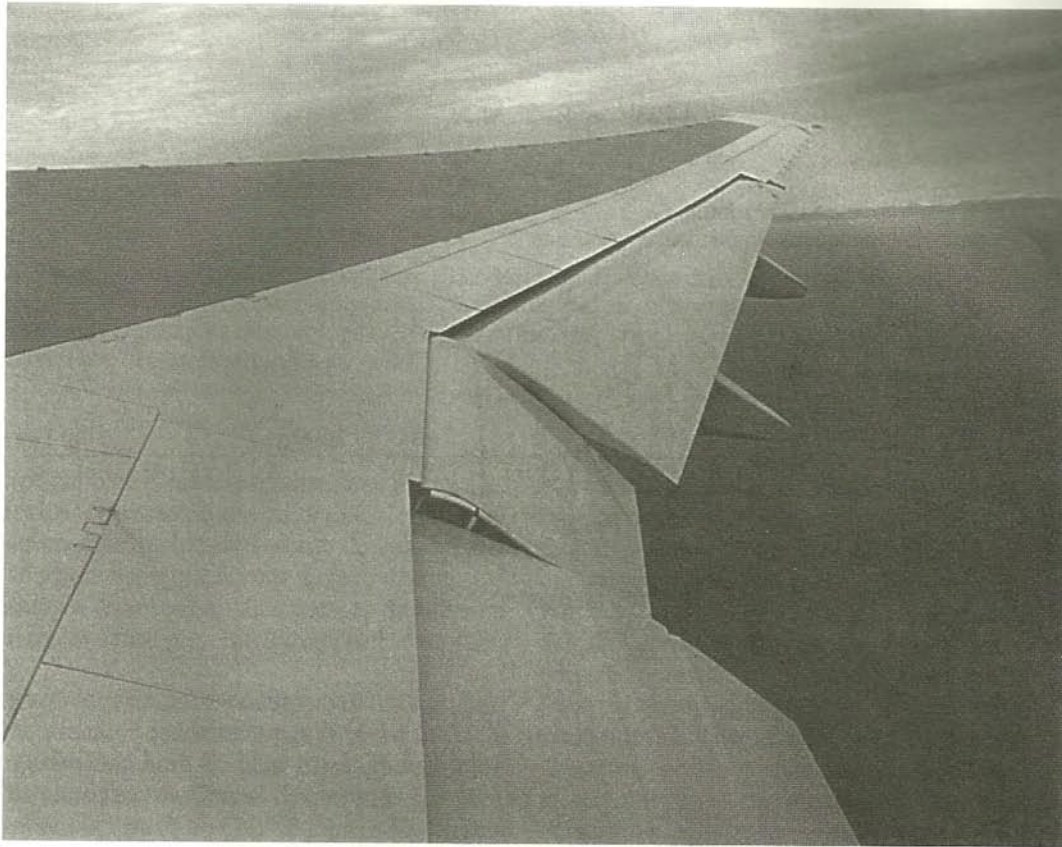



Fig. 9.24 (*b*) Aplicação de dispositivos de controle de camada limite de alta sustentação para reduzir velocidade de decolagem de um avião de transporte a jato. Esta é uma outra vista da asa do Boeing 777. Na configuração de decolagem, grandes *flaps* encaixados na borda traseira da asa defletem para aumentar o coeficiente de sustentação. O *aileron* de baixa velocidade perto da ponta da asa também deflete para melhorar a envergadura durante a decolagem. Esta vista também mostra o flape único de popa, o *aileron* de alta velocidade, e mais próximo da fuselagem, o *flap* duplo de meio de asa. (Fotografia cortesia de Boeing Airplane Company.)

EXEMPLO 9.8 — Desempenho Ótimo de Cruzeiro de um Avião de Transporte a Jato

Os motores a jato queimam combustível numa taxa proporcional ao empuxo produzido. A condição ótima de cruzeiro para um avião a jato é a velocidade máxima para um dado empuxo. Em vôo horizontal estável, empuxo e arrasto são iguais. A situação ótima de cruzeiro ocorre quando a razão entre a força de arrasto e a velocidade do ar é minimizada.

Um transporte a jato Boeing 727-200 tem área planiforme de asa $A_p = 1600$ pés² e razão de aspecto $ar = 6{,}5$. A velocidade de estol ao nível do mar, para essa aeronave, com os *flaps* erguidos e um peso bruto de 150.000 lbf é 175 mph. Abaixo de $M = 0{,}6$, o arrasto devido aos efeitos de compressibilidade é desprezível, de modo que a Eq. 9.43 pode ser usada para estimar o arrasto total. $C_{D,0}$ para a aeronave é constante com o valor de 0,0182. Admita que a velocidade sônica ao nível do mar é $c = 759$ mph.

Avalie a envoltória de desempenho para esse avião ao nível do mar plotando força de arrasto *versus* velocidade entre o estol e $M = 0{,}6$. Use esse gráfico para estimar a velocidade ótima de cruzeiro nas condições ao nível do mar. Comente sobre as velocidades de estol e de cruzeiro ótimo a uma altitude de 30.000 pés num dia padrão.

PROBLEMA-EXEMPLO 9.8

DADOS: Transporte a jato Boeing 727-200 nas condições ao nível do mar.

$$W = 150.000 \text{ lbf}, A = 1600 \text{ pés}^2, ar = 6{,}5 \text{ e } C_{D,0} = 0{,}0182$$

A velocidade de estol é $V_{estol} = 175$ mph e os efeitos de compressibilidade sobre o arrasto são desprezíveis para $M \leq 0{,}6$ (a velocidade sônica ao nível do mar é $c = 759$ mph).

DETERMINAR: **(a)** A força de arrasto como uma função da velocidade de V_{estol} até $M = 0{,}6$; plotar os resultados.
(b) A velocidade ótima de cruzeiro estimada ao nível do mar.
(c) A velocidade de estol e a velocidade ótima de cruzeiro para 30.000 pés de altitude.

SOLUÇÃO:

Para vôo horizontal, em regime de cruzeiro, o peso iguala a sustentação e o empuxo iguala o arrasto.

Equações de cálculo:

$$F_L = C_L A \frac{1}{2}\rho V^2 = W \qquad C_D = C_{D,0} + \frac{C_L^2}{\pi ar}$$

$$F_D = C_D A \frac{1}{2}\rho V^2 = T \qquad M = \frac{V}{c}$$

Ao nível do mar, $\rho = 0{,}00238$ slug/pés³ e $c = 759$ mph.
Como $F_L = W$ para vôo nivelado, em qualquer velocidade, segue-se que

$$C_L = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = \frac{2W}{\rho V^2 A}$$

Na velocidade de estol, $V = 175$ mph, logo

$$C_L = 2 \times 150.000\ \text{lbf} \times \frac{\text{pé}^3}{0{,}00238\ \text{slug}}\left[\frac{\text{h}}{175\ \text{mi}} \times \frac{\text{mi}}{5280\ \text{pé}} \times 3600\ \frac{\text{s}}{\text{h}}\right]^2 \frac{1}{1600\ \text{pé}^2} \times \frac{\text{slug}\cdot\text{pé}}{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}$$

$$C_L = \frac{3{,}65 \times 10^4}{[V(\text{mph})]^2} = \frac{3{,}65 \times 10^4}{(175)^2} = 1{,}19, \quad \text{e}$$

$$C_D = C_{D,0} + \frac{C_L^2}{\pi ar} = 0{,}0182 + \frac{(1{,}19)^2}{\pi(6{,}5)} = 0{,}0875$$

Portanto

$$F_D = W\frac{C_D}{C_L} = 150.000\ \text{lbf}\left(\frac{0{,}0875}{1{,}19}\right) = 11.000\ \text{lbf}$$

Para $M = 0{,}6$, $V = Mc = (0{,}6)759$ mph $= 455$ mph, logo $C_L = 0{,}176$ e

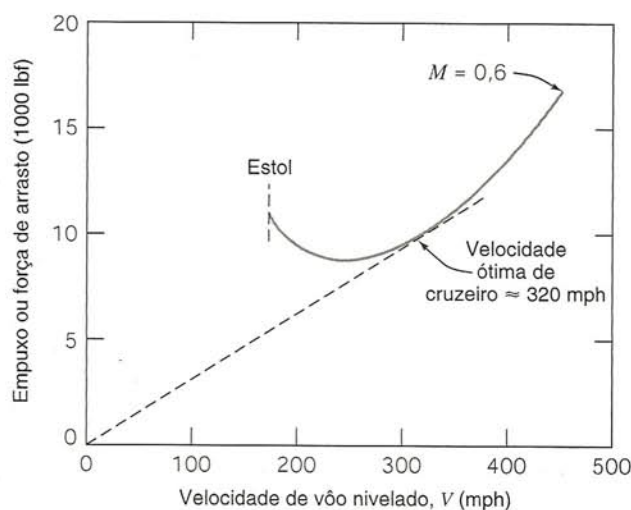
$$C_D = 0{,}0182 + \frac{(0{,}176)^2}{\pi(6{,}5)} = 0{,}0197$$

então

$$F_D = 150.000\ \text{lbf}\left(\frac{0{,}0197}{0{,}176}\right) = 16.800\ \text{lbf}$$

Cálculos semelhantes conduzem à seguinte tabela:

V(mph)	175	200	300	400	455
C_L	1,19	0,913	0,406	0,228	0,176
C_D	0,0875	0,0590	0,0263	0,0207	0,0197
F_D(lbf)	11.000	9690	9720	13.600	16.800

Esses dados podem ser plotados como:

Do gráfico, a velocidade ótima de cruzeiro ao nível do mar é estimada em 320 mph.

A 30.000 pés (9140 m) de altitude, a massa específica é apenas 0,375 vez aquela ao nível do mar, da Tabela A.3. As velocidades para as forças correspondentes são calculadas de

$$F_L = C_L A \tfrac{1}{2} \rho V^2 \quad \text{ou} \quad V = \sqrt{\frac{2F_L}{C_L \rho A}} \quad \text{ou} \quad \frac{V_{30}}{V_{SL}} = \sqrt{\frac{\rho_{SL}}{\rho_{30}}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}375}} = 1{,}63$$

Assim, as velocidades aumentam 63% para 30.000 pés de altitude: $V_{\text{estol}} \approx 285$ mph
$V_{\text{cruzeiro}} \approx 522$ mph

Uma razão primordial para operar aeronaves de transporte a jato em altitudes elevadas é o aumento da velocidade ótima de cruzeiro em comparação com aquela ao nível do mar; nesse exemplo, a faixa de alcance é 63% maior na altitude elevada. (Razões secundárias são melhor operação do motor e menos perturbações meteorológicas.) A altitude ótima de cruzeiro depende da configuração da aeronave, do peso bruto, da distância a percorrer e dos ventos em altitudes elevadas.

A sustentação aerodinâmica é um importante fator a considerar no projeto de veículos terrestres de alta velocidade, tais como carros de corrida e aqueles de quebra de recorde de velocidade. Um veículo rodoviário gera sustentação em virtude da sua forma [27]. Uma distribuição representativa de pressão da linha de centro, medida no túnel de vento para um automóvel, é mostrada na Fig. 9.25 [28].

A pressão é baixa ao redor do nariz devido ao encurvamento das linhas de corrente quando o escoamento contorna o nariz. A pressão atinge um máximo na base do pára-brisas, novamente como um resultado da curvatura das linhas de corrente. Regiões de baixa pressão também ocorrem no alto do pára-brisas e acima do teto do automóvel. A velocidade do ar acima do teto é aproximadamente 30% maior do que a de corrente livre. O mesmo efeito ocorre em volta das colunas, nas laterais do pára-brisas. O aumento de arrasto devido a um objeto adicionado, tal como uma antena, holofote ou espelho, naquele local seria, portanto, $(1{,}3)^2 \approx 1{,}7$ vezes o arrasto que o objeto experimentaria num campo de escoamento não perturbado. Assim, o *arrasto parasita* de um componente adicionado pode ser muito maior do que seria previsto a partir do seu arrasto calculado para escoamento livre.

Em altas velocidades, as forças de sustentação aerodinâmica podem aliviar a carga sobre pneus causando sérios problemas de controle de direção e reduzindo a estabilidade do automóvel a níveis perigosos. As forças de sustentação nos primeiros carros de corrida eram contrabalançadas parcialmente por defletores ou *spoilers*, com um pesado ônus de arrasto. Em 1965, Jim Hall introduziu o emprego de aerofólios móveis invertidos nos seus carros esportivos Chaparral, com a finalidade de desenvolver forças para baixo

Fig. 9.25 Distribuição de pressão ao longo da linha de centro de um automóvel [28].

e prover frenagem aerodinâmica [29]. Desde então os desenvolvimentos na aplicação de dispositivos aerodinâmicos têm sido rápidos. O projeto aerodinâmico é utilizado para reduzir sustentação em todos os carros de corrida modernos, como exemplificado na Fig. 9.26. Aerofólios Liebeck [21] são usados freqüentemente em automóveis de alta velocidade. Seus elevados coeficientes de sustentação e arrasto relativamente baixo permitem geração de uma força para baixo igual ou maior do que o peso do carro em velocidades de corrida. Os carros de "efeito de solo" usam dutos com forma de venturi sob eles e saias laterais a fim de vedar vazamentos de fluxo. Os resultados da força aerodinâmica dirigida para baixo são velocidades bem maiores nas curvas e tempos de circuito menores.

Um outro método de controle de camada limite é usar superfícies móveis para reduzir efeitos de atrito superficial na camada limite [30]. Esse método é difícil de ser aplicado a dispositivos práticos, por causa de complicações geométricas e de peso, mas é muito importante em recreação. A maioria dos jogadores e entusiastas de golfe, tênis, pingue-pongue e beisebol pode atestar quanto a isto. Os jogadores de tênis e pingue-pongue utilizam a rotação para controlar a trajetória e a colocação de uma rebatida. No golfe, uma tacada pode dar à bola uma velocidade de 275 pés/s (85 m/s) ou mais, com rotação de 9000 rpm! A rotação provê significativa sustentação aerodinâmica que aumenta substancialmente o alcance da tacada. A rotação também é grandemente responsável pelos efeitos *hooking* e *slicing*, quando as batidas com o taco na bola não são esquadradas. O lançador de beisebol usa a rotação para arremessar uma bola em curva.

O escoamento em torno de uma esfera girando é mostrado na Fig. 9.27*a*. A rotação altera a distribuição de pressão e também afeta a localização da separação de camada limite. A separação é retardada na superfície superior da esfera da Fig. 9.27*a*, e é antecipada na superfície inferior. Dessa forma, a pressão é reduzida na superfície superior e aumentada na superfície inferior; a esteira é desviada para baixo, conforme mostrado. As forças de pressão causam uma sustentação no sentido mostrado; rotação no sentido contrário produziria sustentação negativa — uma força para baixo. A força é direcionada perpendicular a ambos, V e eixo de rotação.

Dados de sustentação e arrasto para esferas lisas em rotação são apresentados na Fig. 9.27*b*. O parâmetro mais importante é a *razão de rotação*, $\omega D/2V$, a razão entre velocidade de superfície e velocidade de corrente livre; o número de Reynolds desempenha um papel secundário. Para baixas razões de rotação, a sustentação é negativa em termos dos sentidos mostrados na Fig. 9.27*a*. Somente acima de $\omega D/2V \approx 0{,}5$ a sustentação torna-se positiva e continua a aumentar à medida que a razão de rotação aumenta. Os coeficientes de sustentação nivelam-se em torno de 0,35. A rotação tem pequeno efeito sobre o coeficiente de arras-

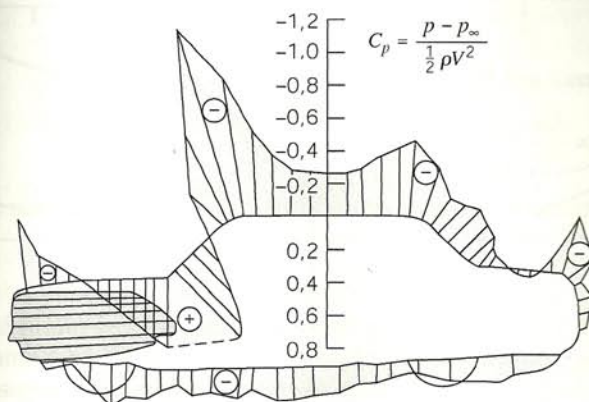
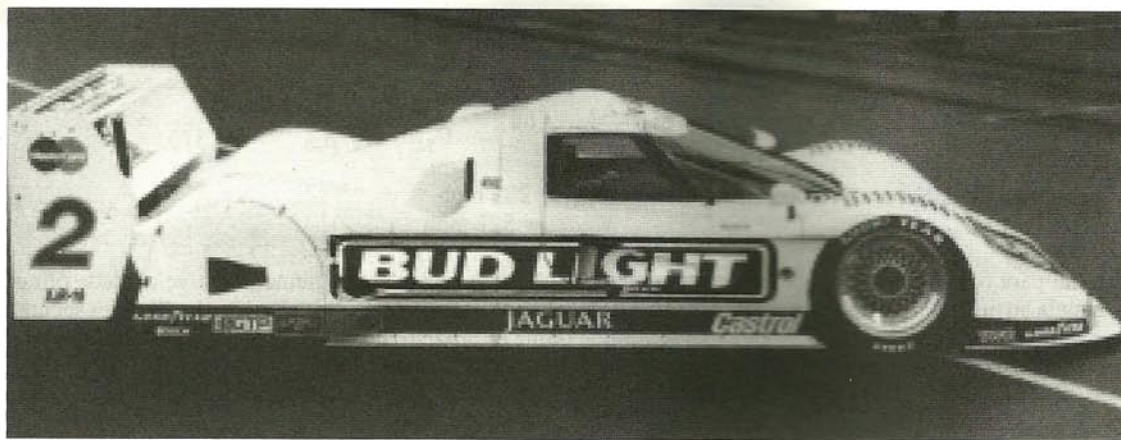



Fig. 9.26 Carro esporte de corrida contemporâneo, mostrando características de projeto aerodinâmico. Atingir desempenho de 200 mph requer cuidadosa atenção com o projeto aerodinâmico a fim de obter baixo arrasto, força estabilizadora para baixo e altas velocidades nas curvas. A foto mostra a carenagem cuidadosa dos espelhos, dutos de admissão e outros detalhes necessários para obter baixo arrasto. O contorno de frente baixa, o formato de fundo, e a asa traseira criam força para baixo que dá estabilidade e desempenho de alta velocidade em curvas. (Fotografia cortesia de Goodyear Tire & Rubber Co., Inc.)

to da esfera, que varia de 0,5 a 0,65, aproximadamente, em toda a faixa de razão de rotação mostrada.

Mencionamos anteriormente o efeito de pequenas concavidades numa bola de golfe sobre o arrasto. Dados experimentais para os coeficientes de sustentação e arrasto para bolas de golfe em rotação são apresentados na Fig. 9.28 para números de Reynolds subcríticos entre 126.000 e 238.000. Novamente, a variável independente é a razão de rotação; uma faixa muito menor de razão de rotação, típica de bolas de golfe, é apresentada na Fig. 9.28.

Há claramente uma tendência: o coeficiente de sustentação aumenta consistentemente com a razão de rotação tanto para concavidade hexagonal quanto "convencional" (redonda). O coeficiente de sustentação para uma bola de golfe com concavidades hexagonais é significativamente maior — 15% — do que para uma bola com concavidades redondas. A vantagem para as concavidades hexagonais continua até as maiores razões de rotação que foram medidas. O coeficiente de arrasto para uma bola com concavidades hexagonais é consistentemente 5 a 7% menor do que o coeficiente de arrasto para uma bola com concavidades redondas para baixas razões de rotação, mas a diferença torna-se menos pronunciada à medida que a razão de rotação cresce.

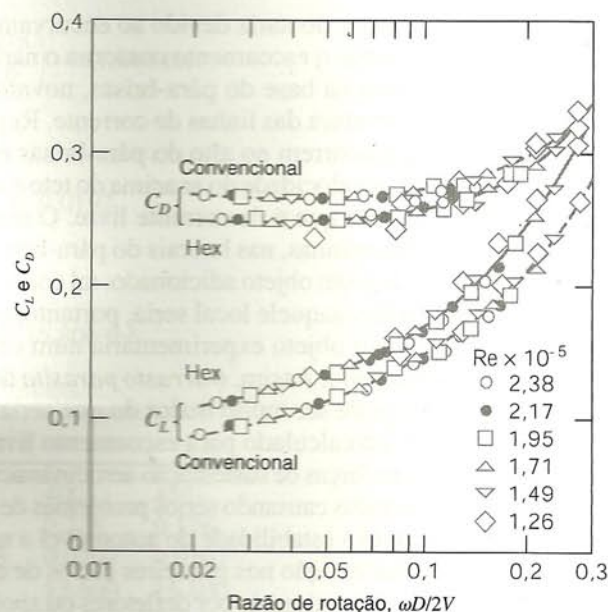



Fig. 9.28 Comparação entre bolas de golfe convencionais e com concavidades hexagonais [31].

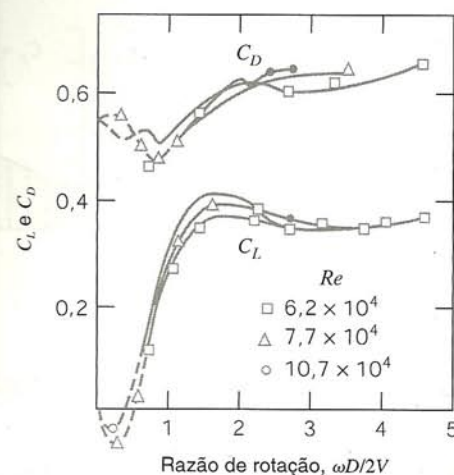



Fig. 9.27 Modelo de escoamento, sustentação e coeficientes de arrasto para uma esfera lisa girando em escoamento uniforme. (Dados de [17].)

(*a*) Modelo de escoamento

(*b*) Coeficientes de arrasto e de sustentação

A combinação de maior sustentação e menor arrasto aumenta o alcance de uma tacada de golfe. Há alguns anos, a Royal lançou nos Estados Unidos a bola "Plus 6" — com concavidades hexagonais. A campanha publicitária assegurava aos golfistas que as tacadas seriam consistentemente 6 jardas mais longas do que aquelas obtidas com as bolas convencionais com concavidades redondas!

EXEMPLO 9.9 — Sustentação de uma Bola Girando sobre Si Mesma

Uma bola de tênis lisa, com massa de 57 g e 64 mm de diâmetro, é golpeada a 25 m/s na sua parte superior (*topspin*) de modo a ganhar uma rotação no sentido horário de 7500 rpm. Calcule a sustentação aerodinâmica atuando sobre a bola. Avalie o raio de curvatura da sua trajetória para a máxima elevação num plano vertical. Compare com o raio para o caso sem rotação.

PROBLEMA-EXEMPLO 9.9

DADOS: Bola de tênis em vôo, com $m = 57$ g e $D = 64$ mm, golpeada com $V = 25$ m/s e efeito que lhe dá rotação no sentido horário de 7500 rpm.

DETERMINAR: **(a)** A sustentação aerodinâmica atuando sobre a bola.
(b) O raio de curvatura da trajetória no plano vertical.
(c) Comparação com o raio para o caso sem rotação.

SOLUÇÃO:

Admita que a bola é lisa.

Use dados da Fig. 9.27 para determinar a sustentação: $C_L = f\left(\frac{\omega D}{2V}, Re_D\right)$.
Dos dados (para ar padrão, $\nu = 1{,}45 \times 10^{-5}$ m²/s),

$$\frac{\omega D}{2V} = \frac{1}{2} \times \frac{7500 \text{ rev}}{\text{min}} \times 0{,}064 \text{ m} \times \frac{\text{s}}{25 \text{ m}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} = 1{,}01$$

$$Re_D = \frac{VD}{\nu} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}064 \text{ m} \times \frac{\text{s}}{1{,}46 \times 10^{-5} \text{ m}^2} = 1{,}10 \times 10^5$$

Da Fig. 9.27, $C_L \approx 0{,}3$, logo

$$F_L = C_L A \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$= C_L \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{\pi}{8} C_L D^2 \rho V^2$$

$$F_L = \frac{\pi}{8} \times 0{,}3 \times (0{,}064)^2 \text{ m}^2 \times 1{,}23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (25)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 0{,}371 \text{ N}$$

F_L

Como a bola é golpeada com rotação no sentido horário, essa força age para baixo.

Use a segunda lei de Newton para avaliar a curvatura da trajetória. No plano vertical,

$$\sum F_z = -F_L - mg = ma_z = -m\frac{V^2}{R} \quad \text{ou} \quad R = \frac{V^2}{g + F_L/m}$$

$$R = (25)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\left[\frac{1}{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0{,}371 \text{ N} \times \frac{1}{0{,}057 \text{ kg}} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}}\right]$$

$$R = 38{,}3 \text{ m (com rotação)}$$

R

$$R = (25)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{s}^2}{9{,}81 \text{ m}} = 63{,}7 \text{ m (sem rotação)}$$

R

Deste modo, o *topspin* tem um significativo efeito sobre a trajetória da bola!

Há muito se sabe que um projétil girando em vôo é afetado por uma força perpendicular à direção do movimento e ao eixo da rotação. Esse efeito, conhecido como o *efeito Magnus*, é responsável pelo desvio sistemático das granadas de artilharia.

O escoamento transversal sobre um cilindro em rotação é qualitativamente similar ao escoamento sobre esfera em rotação mostrado esquematicamente na Fig. 9.27*a*. Se a velocidade da superfície superior de um cilindro está no mesmo sentido da velocidade de corrente livre, a separação é retardada sobre a superfície superior; ela ocorre mais cedo sobre a superfície inferior. Dessa forma, a esteira é defletida e a distribuição de pressão sobre a superfície do cilindro é alterada quando uma rotação está

presente. A pressão é reduzida na superfície superior e aumentada na superfície inferior, causando uma força de sustentação resultante agindo para cima. Rotação no sentido contrário reverte esses efeitos e causa uma força de sustentação para baixo.

Os coeficientes de sustentação e de arrasto para o cilindro em rotação baseiam-se na área projetada, LD. Coeficientes de sustentação e de arrasto medidos experimentalmente para números de Reynolds subcríticos entre 40.000 e 660.000 são mostrados como funções da razão de rotação na Fig. 9.29. Quando a velocidade superficial excede a velocidade do escoamento, o coeficiente de sustentação aumenta para valores surpreendentemente altos, enquanto no escoamento bidimensional o arrasto é afetado apenas moderadamente. O arrasto induzido, que deve ser considerado para cilindros finitos, pode ser reduzido pelo uso de discos de extremidade de diâmetro maior que o diâmetro do corpo do cilindro.

A potência requerida para fazer girar um cilindro pode ser estimada a partir do arrasto de atrito da superfície do cilindro. Hoerner [32] sugere basear a estimativa do arrasto de atrito superficial na velocidade de superfície tangencial e na área da superfície. Goldstein [17] sugere que a potência requerida para girar o cilindro, quando expressa como um coeficiente de arrasto equivalente, pode representar 20% ou mais do C_D aerodinâmico de um cilindro estacionário.

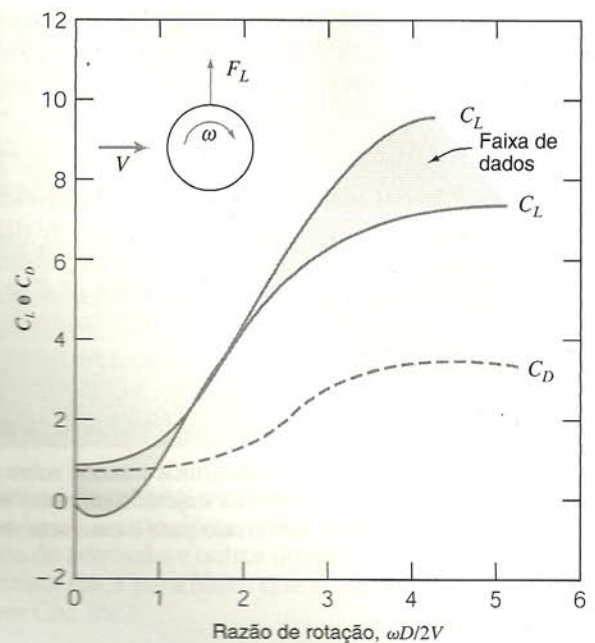



Fig. 9.29 Arrasto e sustentação em um cilindro em rotação como uma função da velocidade relativa de rotação; força Magnus. (Dados de [32].)

9.9 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o estudo do Cap. 9, você deverá ser capaz de:

1. Definir:
   - escoamento externo
   - espessura de perturbação de camada limite
   - espessura de deslocamento
   - espessura de quantidade de movimento
   - gradiente de pressão (favorável, adverso)
   - separação
   - coeficiente de atrito superficial
   - arrasto
   - sustentação
   - ângulo de ataque
   - corda
   - envergadura da asa
   - razão de aspecto
   - arrasto induzido
2. Partindo da equação integral da quantidade de movimento para escoamento com gradiente de pressão nulo, desenvolver expressões para $\delta(x)$, $\delta^*(x)$, $\tau_w(x)$, $C_f(x)$; determinar a força total de atrito sobre uma placa plana colocada paralelamente ao fluxo.
3. Usar o conceito de espessura de deslocamento para estimar a queda de pressão na região de entrada de um duto.
4. Determinar as forças de arrasto e sustentação para corpos em escoamento externo.
5. Calcular o momento causado por forças de arrasto aerodinâmico atuando sobre um objeto.
6. Resolver os problemas ao final do capítulo que se relacionam com o material que você estudou.

REFERÊNCIAS

1. Prandtl, L., "Fluid Motion with Very Small Friction (in German)," Proceedings of the Third International Congress on Mathematics, Heidelberg, 1904; English translation available as NACA TM 452, March 1928.
2. Blasius, H., "The Boundary Layers in Fluids with Little Friction (in German)," *Zeitschrift fur Mathematik und Physik, 56,* 1, 1908, pp. 1–37; English translation available as NACA TM 1256, February 1950.
3. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory,* 7th ed. New York: McGraw-Hill, 1979.
4. Stokes, G. G., "On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums," *Cambridge Philosophical Transactions, IX,* 8, 1851.
5. Howarth, L., "On the Solution of the Laminar Boundary-Layer Equations," *Proceedings of the Royal Society of London, A164,* 1938, pp. 547–579.
6. Hess, J. L., and A. M. O. Smith, "Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies," in *Progress in Aeronautical Sciences,* Vol. 8, D. Kuchemann, et al., eds. Elmsford, NY: Pergamon Press, 1966.
7. Kraus, W., "Panel Methods in Aerodynamics," in *Numerical Methods in Fluid Dynamics,* H. J. Wirz and J. J. Smolderen, eds. Washington, D.C.: Hemisphere, 1978.
8. Rosenhead, L., ed., *Laminar Boundary Layers.* London: Oxford University Press, 1963.
9. Rotta, J. C., "Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow," in *Progress in Aeronautical Sciences,* A. Ferri, et al., eds. New York: Pergamon Press, 1960, pp. 1–220.

10. Kline, S. J., et al., eds., *Proceedings, Computation of Turbulent Boundary Layers—1968 AFOSR-IFP-Stanford Conference,* Vol. I: Methods, Predictions, Evaluation, and Flow Structure, and Vol. II: Compiled Data. Stanford, CA: Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1969.

11. Kline, S. J., et al., eds., *Proceedings, 1980–81 AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows: Comparison of Computation and Experiment,* three volumes. Stanford, CA: Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1982.

12. Cebeci, T., and P. Bradshaw, *Momentum Transfer in Boundary Layers.* Washington, D.C.: Hemisphere, 1977.

13. Bradshaw, P., T. Cebeci, and J. H. Whitelaw, *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow.* New York: Academic Press, 1981.

14. Hoerner, S. F., *Fluid-Dynamic Drag,* 2nd ed. Midland Park, NJ: Published by the author, 1965.

15. Shapiro, A. H., *Shape and Flow, The Fluid Dynamics of Drag.* New York: Anchor, 1961 (paperback).

16. Fage, A., "Experiments on a Sphere at Critical Reynolds Numbers," Great Britain, *Aeronautical Research Council, Reports and Memoranda,* No. 1766, 1937.

17. Goldstein, S., ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics,* Vols. I and II. Oxford: Clarendon Press, 1938. (Reprinted in paperback by Dover, New York, 1967.)

18. Morel, T., and M. Bohn, "Flow over Two Circular Disks in Tandem," *Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, 102,* 1, March 1980, pp. 104–111.

19. Abbott, I. H., and A. E. von Doenhoff, *Theory of Wing Sections, Including a Summary of Airfoil Data.* New York: Dover, 1959 (paperback).

20. Stratford, B. S., "An Experimental Flow with Zero Skin Friction," *Journal of Fluid Mechanics, 5,* Pt. 1, January 1959, pp. 17–35.

21. Liebeck, R. H., "Design of Subsonic Airfoils for High Lift," *AIAA Journal of Aircraft, 15,* 9, September 1978, pp. 547–561.

22. Smith, A. M. O., "Aerodynamics of High-Lift Airfoil Systems," in *Fluid Dynamics of Aircraft Stalling,* AGARD CP-102, 1973, pp. 10-1 through 10-26.

23. Morel, T., "Effect of Base Slant on Flow in the Near Wake of an Axisymmetric Cylinder," *Aeronautical Quarterly, XXXI,* Pt. 2, May 1980, pp. 132–147.

24. Hucho, W. H., "The Aerodynamic Drag of Cars—Current Understanding, Unresolved Problems, and Future Prospects," in *Aerodynamic Drag Mechanisms of Bluff Bodies and Road Vehicles,* G. Sovran, T. Morel, and W. T. Mason, eds. New York: Plenum, 1978.

25. McDonald, A. T., and G. M. Palmer, "Aerodynamic Drag Reduction of Intercity Buses," *Transactions, Society of Automotive Engineers, 89,* Section 4, 1980, pp. 4469–4484 (SAE Paper No. 801404).

26. Grosser, M., *Gossamer Odyssey.* Boston: Houghton Mifflin, 1981.

27. Carr, G. W., "The Aerodynamics of Basic Shapes for Road Vehicles. Part 3: Streamlined Bodies," The Motor Industry Research Association, Warwickshire, England, Report No. 107/4, 1969.

28. Goetz, H., "The Influence of Wind Tunnel Tests on Body Design, Ventilation, and Surface Deposits of Sedans and Sports Cars," SAE Paper No. 710212, 1971.

29. Hall, J., "What's Jim Hall Really Like?" *Automobile Quarterly, VIII,* 3, Spring 1970, pp. 282–293.

30. Moktarian, F., and V. J. Modi, "Fluid Dynamics of Airfoils with Moving Surface Boundary-Layer Control," *AIAA Journal of Aircraft, 25,* 2, February 1988, pp. 163–169.

31. Mehta, R. D., "Aerodynamics of Sports Balls," in *Annual Review of Fluid Mechanics,* ed. by M. van Dyke, et al. Palo Alto, CA: Annual Reviews, 1985, *17,* pp. 151–189.

32. Hoerner, S. F., and H. V. Borst, *Fluid-Dynamic Lift.* Bricktown, NJ: Hoerner Fluid Dynamics, 1975.

33. Chow, C.-Y., *An Introduction to Computational Fluid Mechanics.* New York: Wiley, 1980.

34. Carr, G. W., "The Aerodynamics of Basic Shapes for Road Vehicles, Part 1: Simple Rectangular Bodies," The Motor Industry Research Association, Warwickshire, England, Report No. 1968/2, 1967.

PROBLEMAS

9.1 Um modelo de rebocador fluvial deve ser testado numa escala 1:13,5. O barco foi projetado para viajar a 8 mph em água doce a 10°C. Estime a distância a partir da proa onde a transição ocorre. Aonde a transição deveria ser estimulada no modelo do rebocador?

9.2 Um avião viaja a 300 nós e à altitude de 10 km num dia padrão. Admita que as camadas limite na superfície da asa comportam-se como numa placa plana. Estime a extensão esperada do escoamento laminar nas camadas limite das asas.

9.3 O número de Reynolds é $Re = \rho VL/\mu$, onde L é uma dimensão característica do campo de escoamento. Considere o desenvolvimento de camada limite num escoamento paralelo sobre uma placa plana, para a qual a dimensão característica é x, a distância medida a partir da borda de ataque. Prepare um gráfico log-log de velocidade *versus* distância para $0{,}01 \leq x \leq 10$ m. Mostre as linhas para as quais $Re_x = 5 \times 10^5$ e 1×10^6, se o fluido for água.

9.4 O número de Reynolds é $Re = \rho VL/\mu$, onde L é uma dimensão característica do campo de escoamento. Considere o desenvolvimento de camada limite num escoamento paralelo sobre uma placa plana, para a qual a dimensão característica é x, a distância medida a partir da borda de ataque. Prepare um gráfico log-log da velocidade *versus* distância para $0{,}01 \leq x \leq 10$ m. Mostre as linhas para as quais $Re = 5 \times 10^5$ e 1×10^6, para ar padrão (a) nas condições ao nível do mar e (b) a 10 km de altitude.

9.5 Aeronaves e mísseis voando a elevadas altitudes podem ter regiões de escoamento laminar que se tornam turbulentas em altitudes mais baixas para a mesma velocidade. Explique um possível mecanismo para esse efeito. Apóie sua resposta em cálculos baseados nos dados da atmosfera padrão.

9.6 O perfil de velocidade senoidal mais geral para escoamento laminar de camada limite sobre uma placa plana é $u = A\text{sen}(By) + C$. Enuncie três condições de contorno aplicáveis ao perfil de velocidade de camada limite laminar. Avalie as constantes A, B e C.

9.7 Perfis de velocidades em camadas limites laminares são freqüentemente aproximados pelas equações

$$\text{Linear: } \frac{u}{U} = \frac{y}{\delta}$$

$$\text{Senoidal: } \frac{u}{U} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\text{Parabólico: } \frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

Compare as formas desses perfis de velocidade plotando y/δ (na ordenada) *versus* u/U (na abscissa).

9.8 O perfil de velocidade numa camada limite turbulenta é freqüentemente aproximado pela equação de "lei de potência 1/7".

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

Compare a forma desse perfil com o perfil de velocidade de camada limite laminar (Problema 9.7) plotando y/δ (na ordenada) *versus* u/U (na abscissa) para ambos os perfis.

9.9 Avalie δ^*/δ para cada um dos perfis de velocidade de camada limite laminar dados no Problema 9.7.

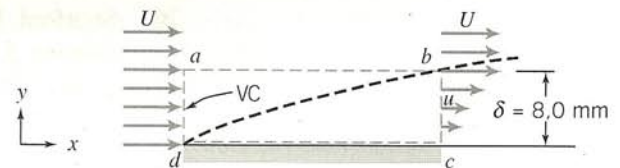
9.10 Avalie δ^*/δ e θ/δ para o perfil de velocidade turbulento de lei de potência 1/7 dado no Problema 9.8. Compare com razões para o perfil parabólico de velocidade de camada limite laminar dado no Problema 9.7.

9.11 Considere uma camada limite laminar sobre uma placa plana com perfil de velocidade dado pela expressão parabólica do Problema 9.7. Para este perfil

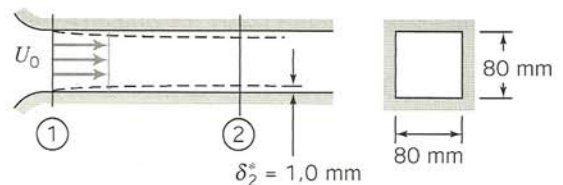
$$\frac{\delta}{x} = \frac{5{,}48}{\sqrt{Re_x}}$$

Encontre expressões para δ^*/x e θ/x.

9.12 Avalie θ/δ para cada um dos perfis de velocidade de camada limite laminar dados no Problema 9.7.

9.13 Ar na condição padrão escoa sobre uma placa plana delgada com 1 m de comprimento e 0,3 m de largura. O escoamento é uniforme na borda de ataque da placa. Suponha que o perfil de velocidade na camada limite é linear, e que a velocidade da corrente livre é $U = 2{,}7$ m/s. Trate o escoamento como bidimensional; suponha que as condições de escoamento são independentes de z. Usando o volume de controle *abcd*, mostrado pelas linhas tracejadas, calcule a vazão mássica através da superfície *ab*. Determine a magnitude e a direção da componente x da força requerida para manter a placa estacionária.

P9.13

9.14 Refaça o Problema 9.13 com o perfil de velocidade na seção *bc* dado pela expressão parabólica do Problema 9.7 e $\delta = 12{,}7$ mm.

9.15 Ar escoa na região de entrada de um duto de seção quadrada, como mostrado. A velocidade é uniforme, $U_0 = 30$ m/s, e o duto tem lados de 80 mm. Em uma seção a 0,3 m a jusante da entrada, a espessura de deslocamento, δ^*, sobre cada parede mede 1,0 mm. Determine a variação de pressão entre as seções ① e ②.

P9.15

9.16 Um túnel de vento de laboratório tem seção de teste com 1 pé quadrado e 2 pés de comprimento. Com uma velocidade nominal do ar $U_1 = 80$ pés/s na entrada da seção de teste, formam-se camadas limites turbulentas no topo, no fundo e nas paredes laterais do túnel. A espessura da camada limite é $\delta_1 = 0{,}8$ pol. na entrada e $\delta_2 = 1{,}2$ pol. na saída da seção de teste. Os perfis de velocidade de camada limite são de lei de potência, com $u/U = (y/\delta)^{1/7}$. Avalie a velocidade de corrente livre, U_2, na saída da seção de teste do túnel de vento. Determine a variação na pressão estática ao longo da seção de teste.

9.17 A seção de teste quadrada de um pequeno túnel de vento de laboratório tem lados com $W = 305$ mm. Num local de medi-

ção, as camadas limites turbulentas sobre as paredes do túnel têm espessuras $\delta_1 = 9{,}5$ mm. O perfil de velocidade é bem aproximado pela expressão de "potência 1/7". Nesse local, a velocidade de corrente livre é $U_1 = 18{,}3$ m/s e a pressão estática é $p_1 = -22{,}9$ mm H_2O (manométrica). Num segundo local de medição, a jusante, a espessura de camada limite é $\delta_2 = 12{,}7$ mm. Avalie a velocidade do ar na corrente livre na segunda seção. Calcule a diferença em pressão estática da seção ① à seção ②.

9.18 Um escoamento de ar desenvolve-se num duto plano horizontal após uma seção de entrada bem arredondada. A altura do duto é $H = 300$ mm. Camadas limite turbulentas crescem sobre as paredes do duto, mas o escoamento ainda não está inteiramente desenvolvido. Admita que o perfil de velocidade em cada camada limite é $u/U = (y/\delta)^{1/7}$. O escoamento de entrada é uniforme com $\overline{V} = 10$ m/s na seção ①. Na seção ②, a espessura de camada limite sobre cada parede do duto é $\delta_2 = 100$ mm. Mostre que, para esse escoamento, $\delta^* = \delta/8$. Avalie a pressão estática manométrica na seção ②. Determine a tensão de cisalhamento média entre a entrada e a seção ②, localizada em $L = 5$ m.

9.19 Um túnel de vento de laboratório tem uma seção de teste quadrada, com lados de largura $W = 305$ mm e comprimento $L = 610$ mm. Quando a velocidade de corrente livre do ar na entrada da seção de teste é $U_1 = 24{,}4$ m/s, a perda de carga da atmosfera é 6,5 mm H_2O. Camadas limites turbulentas formam-se no topo, no fundo e nas paredes laterais da seção de teste. Medições mostram que as espessuras de camada limite são $\delta_1 = 20{,}3$ mm na entrada e $\delta_2 = 25{,}4$ mm na saída da seção de teste. Os perfis de velocidade são da forma de potência 1/7. Avalie a velocidade do ar de corrente livre na saída da seção de teste. Determine as pressões estáticas na entrada e na saída da seção de teste.

9.20 Para as condições do Problema 9.16, calcule (a) a força total de cisalhamento de parede e (b) a tensão média de cisalhamento sobre a parede da seção de teste.

9.21 Ar escoa para dentro da seção de contração de entrada de um túnel de vento em um laboratório de graduação. O ar entra em seguida na seção de teste, que é um duto quadrado com dimensão do lado de 305 mm. A seção de teste tem 609 mm de comprimento. Numa condição de operação, o ar deixa a contração a 50,2 m/s com espessura de camada limite desprezível. Medições mostram que as camadas limites no final da seção de teste, a jusante, têm 20,3 mm de espessura. Avalie a espessura de deslocamento das camadas limites naquela posição. Calcule a variação na pressão estática ao longo da seção de teste do túnel de vento. Estime a força de arrasto total aproximada causada pelo atrito superficial sobre cada parede do túnel de vento.

***9.22** Usando resultados numéricos da solução exata de Blasius para escoamento laminar de camada limite numa placa plana, plote o perfil de velocidade adimensional, u/U (na abscissa) *versus* a distância adimensional a partir da superfície, y/δ (na ordenada). Compare com o perfil de velocidade parabólico aproximado do Problema 9.7.

***9.23** Usando os resultados numéricos obtidos por Blasius (Tabela 9.1), avalie a distribuição de tensão de cisalhamento numa camada limite laminar sobre uma placa plana. Plote τ/τ_w *versus* y/δ. Compare com os resultados obtidos a partir do perfil de velocidade aproximado parabólico dado no Problema 9.7.

***9.24** Usando resultados numéricos obtidos por Blasius (Tabela 9.1), avalie a distribuição de tensão de cisalhamento numa camada limite laminar sobre uma placa plana. Plote τ/τ_w *versus* y/δ. Compare com resultados deduzidos do perfil de velocidade senoidal aproximado dado no Problema 9.7.

***9.25** Usando resultados numéricos obtidos por Blasius (Tabela 9.1), avalie a componente vertical de velocidade numa camada limite laminar sobre uma placa plana. Plote v/U *versus* y/δ para $Re_x = 10^5$.

***9.26** Verifique que a componente y da velocidade para a solução de Blasius das equações de camada limite de Prandtl é dada pela Eq. 9.10. Obtenha uma expressão algébrica para a componente x da aceleração de uma partícula fluida na camada limite laminar. Plote a_x *versus* η para determinar a máxima componente x da aceleração para um dado x.

***9.27** Resultados numéricos da solução de Blasius para as equações de Prandtl de camada limite são dados na Tabela 9.1. Considere escoamento permanente, incompressível, de ar padrão sobre uma placa plana com velocidade de corrente livre $U = 4{,}3$ m/s. Para $x = 0{,}2$ m, estime a distância da superfície para a qual $u = 0{,}95\ U$. Avalie a inclinação da linha de corrente que passa por esse ponto. Obtenha uma expressão algébrica para o atrito superficial local, $\tau_w(x)$. Obtenha uma expressão algébrica para a força de arrasto total de atrito superficial sobre a placa. Avalie a espessura de quantidade de movimento para $L = 0{,}8$ m.

9.28 Uma placa plana delgada com comprimento $L = 0{,}3$ m e $b = 1$ m de largura, é instalada num túnel de água como uma divisora de fluxo. A velocidade de corrente livre é $U = 2$ m/s e o perfil de velocidade na camada limite é aproximado como parabólico. Plote δ, δ^* e τ_w *versus* x/L para a placa.

9.29 Uma placa plana delgada é instalada num túnel de água como uma divisora de fluxo. A placa tem 0,3 m de comprimento por 1 m de largura. A velocidade de corrente livre é 1,6 m/s. Camadas limites laminares formam-se em ambos os lados da placa. O perfil de velocidade de camada limite é aproximado como parabólico. Determine a força de arrasto viscoso total sobre a placa admitindo que o arrasto de pressão é desprezível.

9.30 Considere o escoamento sobre a placa divisora do Problema 9.28. Mostre algebricamente que a força de arrasto total em um lado da placa pode ser escrita como $F_D = \rho U^2 \theta_L b$. Avalie θ_L e o arrasto total para as condições dadas.

9.31 Calcule a força de arrasto sobre uma placa plana com dimensões de 0,75 m × 0,75 m quando ela estiver alinhada num escoamento de ar padrão onde a velocidade de corrente livre é 1,8 m/s.

9.32 Uma superfície horizontal, com comprimento $L = 1{,}8$ m e largura $b = 0{,}9$ m, está imersa numa corrente de ar padrão fluindo a $U = 3{,}2$ m/s. Admita a formação de uma camada limite laminar e aproxime o perfil de velocidade como senoidal. Plote δ, δ^* e τ_w *versus* x/L para a placa.

9.33 O perfil de velocidade num escoamento de camada limite laminar com gradiente de pressão nulo é aproximado pela expressão linear dada no Problema 9.7. Use a equação integral da quantidade de movimento com este perfil a fim de obter expressões para δ/x e C_f.

9.34 Uma superfície horizontal, com comprimento $L = 0{,}8$ m e largura $b = 1{,}9$ m, está imersa numa corrente de ar padrão

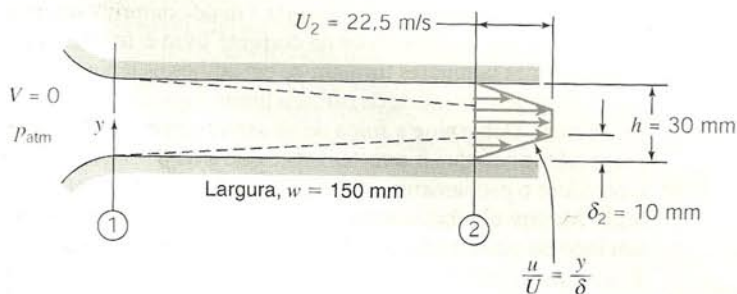
---

* Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

fluindo a $U = 5{,}3$ m/s. Admita a formação de uma camada limite laminar e aproxime o perfil de velocidade como linear. Plote δ, δ^* e τ_w *versus* x/L para a placa.

9.35 Para as condições de escoamento do Problema 9.34, desenvolva uma expressão algébrica para a variação da tensão de cisalhamento na parede com a distância ao longo da superfície. Integre a fim de obter uma expressão algébrica para o arrasto total de atrito superficial. Avalie o arrasto para as condições dadas.

9.36 Água a 15°C escoa sobre uma placa plana a uma velocidade de 1 m/s. A placa tem 0,4 m de comprimento e 1 m de largura. A camada limite sobre cada face da placa é laminar. Admita que o perfil de velocidade pode ser aproximado como linear. Determine a força de arrasto sobre a placa.

9.37 Ar padrão flui da atmosfera para dentro de um canal plano, largo, como mostrado. Camadas limites laminares formam-se nas paredes de topo e de fundo do canal (ignore efeitos de camada limite sobre as paredes laterais). Suponha que as camadas limites comportam-se como sobre uma placa plana, com perfis de velocidade lineares. Para qualquer distância axial a partir da entrada, a pressão estática é uniforme através do canal. A pressão estática na seção ① é maior, menor ou igual à pressão atmosférica? A pressão de estagnação na seção ① é maior, menor ou igual à pressão atmosférica? Para escoamento uniforme na seção ①, plote (esquematicamente) a distribuição de pressão de estagnação através do canal na seção ①. Plote (esquematicamente) a distribuição de pressão de estagnação através do canal na seção ②. Pode a equação de Bernoulli ser aplicada em algum local nesse campo de escoamento? Se afirmativo, indique aonde; se não, por que não pode? Determine a espessura de deslocamento na seção ②. Indique como você determinaria a pressão estática na seção ①.

P9.37

9.38 Uma camada limite de ar padrão em desenvolvimento sobre uma placa plana é mostrada na Fig. P9.13. O escoamento de corrente livre fora da camada limite é não perturbado com velocidade $U = 50{,}2$ m/s. A placa tem 3,2 m de largura perpendicular ao diagrama. Admita que o escoamento na camada limite é turbulento, com perfil de velocidade de "potência 1/7", e que $\delta = 20{,}3$ mm na superfície *ab*. Avalie o fluxo de quantidade de movimento segundo x através da superfície *bc*. Determine a força de arrasto exercida sobre a placa plana entre *d* e *c*. Estime a distância a partir da borda de ataque para a qual a transição de laminar para turbulento pode ser esperada.

9.39 Suponha as condições de escoamento dadas no Problema 9.4. Trace um gráfico de δ, δ^* e τ_w *versus* x/L para a placa.

9.40 Para as condições de escoamento do Problema-Exemplo 9.4, desenvolva uma expressão algébrica para a variação da tensão de cisalhamento de parede com a distância ao longo da superfície. Integre a fim de obter uma expressão algébrica para o arrasto total de atrito superficial. Avalie o arrasto para as condições dadas.

9.41 O perfil de velocidade num escoamento turbulento de camada limite com gradiente de pressão nulo é aproximado pela expressão "exponencial de 1/6",

$$\frac{u}{U} = \eta^{1/6}, \quad \text{onde} \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Use a equação integral de quantidade de movimento com esse perfil a fim de obter expressões para δ/x e C_f. Compare com resultados obtidos na Seção 9.5.2 para o perfil de "potência 1/7".

9.42 Para as condições de escoamento do Problema-Exemplo 9.4, porém usando o perfil de velocidade de "potência 1/6" do Problema 9.41, desenvolva uma expressão algébrica para a variação da tensão de cisalhamento de parede com a distância ao longo da superfície. Integre a fim de obter uma expressão algébrica para o arrasto total de atrito superficial. Avalie o arrasto total para as condições dadas.

9.43 Repita o Problema 9.41 usando a expressão do perfil de "potência 1/8".

9.44 Para as condições de escoamento do Problema-Exemplo 9.4, porém usando o perfil de velocidade de "potência 1/8", desenvolva uma expressão algébrica para a variação da tensão de cisalhamento de parede com a distância ao longo da superfície. Integre a fim de obter uma expressão algébrica para o arrasto total de atrito superficial. Avalie o arrasto para as condições dadas.

9.45 Ar na condição padrão escoa sobre uma placa plana. A velocidade de corrente livre é 15 m/s. Determine δ e τ_w para x = 1 m a partir da borda de ataque para (a) escoamento completamente laminar (admita um perfil de velocidade parabólico) e (b) escoamento completamente turbulento (admita um perfil de velocidade de "potência 1/7").

9.46 Ar padrão escoa sobre uma placa horizontal plana e lisa, com velocidade de corrente livre $U = 14{,}5$ m/s. O comprimento da placa é $L = 1{,}5$ m e a sua largura é $b = 0{,}8$ m. O gradiente de pressão é zero. A camada limite é desencadeada turbulenta desde a borda de ataque; o perfil de velocidade é bem representado pela expressão de "potência 1/7". Avalie a espessura de camada limite, δ, na borda de fuga da placa. Calcule a tensão de cisalhamento de parede na borda de fuga da placa. Estime o arrasto de atrito superficial sobre a porção da placa entre $x = 0{,}5$ m e a borda de fuga.

9.47 Um escoamento uniforme de ar padrão a 60 m/s entra num difusor de parede plana com espessura de camada limite desprezível. A largura da entrada é 75 mm. As paredes do difusor divergem ligeiramente para acomodar o crescimento de camada limite, de modo que o gradiente de pressão é desprezível. Admita comportamento de camada limite de placa plana. Explique por que a equação de Bernoulli pode ser aplicada a esse escoamento. Estime a largura do difusor 1,2 m a jusante da entrada.

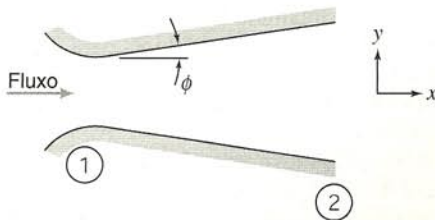
9.48 Um pequeno túnel de vento em um laboratório de graduação tem seção de teste quadrada com 305 mm de lado. Medições mostram que as camadas limites sobre as paredes do túnel são completamente turbulentas e bem representadas por perfis de "potência 1/7". Para a seção ①, com velocidade de corrente livre $U = 26{,}1$ m/s, dados mostram que $\delta_1 = 12{,}2$ mm; para a seção ②, localizada a jusante, $\delta_2 = 16{,}6$ mm. Avalie a variação na pressão estática entre as seções ① e ②. Estime a distância entre as duas seções.

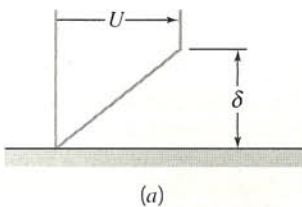
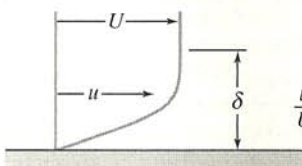
9.49 Um túnel de vento de laboratório tem uma parede superior móvel que pode ser ajustada para compensar o crescimento de camada limite, dando gradiente zero de pressão ao longo da seção de teste. As camadas limites sobre as paredes são bem representadas por perfis de velocidade de "potência 1/7". Na entrada, a seção transversal do túnel é quadrada, com altura H_1 e largura W_1, ambas iguais a 305 mm. Com velocidade de corrente livre $U_1 = 26{,}5$ m/s, medições mostram que $\delta_1 = 12{,}2$

mm e, a jusante, $\delta_6 = 16{,}6$ mm. Calcule a altura das paredes do túnel na seção ⑥. Determine o comprimento equivalente de placa plana que produziria a espessura de camada limite de entrada. Estime a distância na direção da corrente entre as seções ① e ⑥ no túnel.

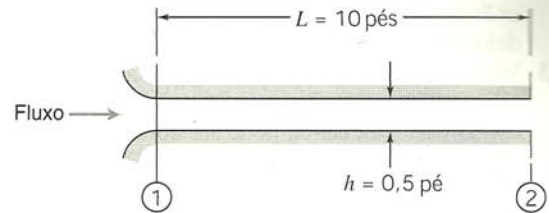
9.50 Para escoamento sobre uma placa plana com gradiente de pressão nulo, a tensão de cisalhamento aumentará, diminuirá ou permanecerá constante ao longo da placa? Justifique sua resposta. O fluxo de quantidade de movimento aumenta, diminui ou permanece constante à medida que o escoamento prossegue ao longo da placa? Justifique sua resposta. Compare os comportamentos de escoamento laminar e escoamento turbulento (ambos a partir da borda de ataque) sobre uma placa plana. Para uma dada distância da borda de ataque, qual escoamento terá espessura de camada limite maior? Sua resposta depende da distância ao longo da placa? Como você justifica sua resposta?

9.51 Grandes petroleiros são usados para transportar petróleo por longas distâncias no mar. Analise a energia usada no transporte do petróleo. Expresse o resultado como uma fração da energia contida no óleo transportado.

9.52 Desejamos comparar os escoamentos de um fluido ideal ($\mu = 0$) e um fluido real no difusor de paredes planas mostrado. Considere primeiramente o caso do duto reto em que $\phi = 0$. O que pode ser dito do gradiente de pressão para os fluidos real e ideal? Que fluido dá o maior p_2? Considere agora um caso em que ϕ não é igual a zero, mas é pequeno o suficiente para evitar a separação. Novamente, o que pode ser dito do gradiente de pressão para os fluidos real e ideal? Para qual caso resulta a maior pressão de saída?

P9.52

9.53 Dois perfis de velocidade de camada limite hipotéticos são mostrados. Obtenha uma expressão para o fluxo de quantidade de movimento de cada perfil. Se os dois perfis fossem submetidos às mesmas condições de gradiente de pressão, qual deles provavelmente iria separar-se primeiro? Por quê?

P9.53

9.54 A separação de camada limite ocorre quando a tensão de cisalhamento na superfície torna-se zero. Admita uma representação polinomial para a camada limite laminar, da forma $u/U = a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3$, onde $\lambda = y/\delta$. Especifique condições de contorno para o perfil de velocidade na separação. Determine constantes apropriadas, a, b, c e d, para o perfil de separação. Calcule H na separação. Plote o perfil e compare-o com o perfil parabólico aproximado.

9.55 Ar de resfriamento é suprido através do duto largo e plano mostrado. Para o mínimo de ruído e perturbação do fluxo de saída, camadas limite laminares devem ser mantidas sobre as paredes do duto. Estime a máxima velocidade de entrada para a qual o escoamento de saída será laminar. Admitindo perfis de velocidade parabólicos nas camadas limite laminares, avalie a queda de pressão, $p_1 - p_2$. Expresse a sua resposta em polegadas de água.

P9.55

9.56 A seção de teste de um túnel de vento é um duto retangular com altura H_1 e largura W_1 de entrada iguais a 305 mm. Para velocidade de corrente livre $U_1 = 24{,}5$ m/s, medições mostram que $\delta_1 = 9{,}75$ mm com um perfil de velocidade turbulento de "potência 1/7". O gradiente de pressão nessa região é dado aproximadamente por $dp/dx = -0{,}035$ mm H_2O/mm. Avalie a redução na área de escoamento efetiva causada pelas camadas limites no topo, no fundo e nas paredes laterais do túnel na seção ①. Calcule a taxa de variação da espessura de quantidade de movimento de camada limite, $d\theta/dx$, na seção ①. Estime a espessura de quantidade de movimento no final da seção de teste, localizada $L = 254$ mm a jusante.

9.57 O conceito de parede variável é proposto para manter constante a espessura de camada limite no túnel de vento do Problema 9.56. Partindo das condições iniciais do Problema 9.56, avalie a distribuição de velocidade de corrente livre necessária para manter constante a espessura de camada limite. Admita largura constante, W_1. Estime as variações da altura do topo do túnel ao longo da seção de teste de $x = 0$ na seção ① até $x = 254$ mm na seção ① a jusante.

9.58 Uma barcaça de fundo chato, com 25 m de comprimento e 10 m de largura, submersa até uma profundidade de 1,5 m, deve ser rebocada rio acima à velocidade de 8 km/h. Estime a potência necessária para vencer o atrito superficial se a temperatura da água for 15°C.

9.59 A aleta vertical estabilizadora num carro para recorde de velocidade tem comprimento $L = 1{,}65$ m e altura $H = 0{,}785$ m. O automóvel vai ser dirigido na pista de sal de Boneville em Utah, onde a elevação é de 1340 m e a temperatura de verão atinge 50°C. A velocidade do carro é de 560 km/h. Avalie o número de Reynolds de comprimento da aleta. Estime o local de transição de escoamento laminar para turbulento nas camadas limite. Calcule a potência necessária para vencer o arrasto de atrito superficial na aleta.

9.60 Um avião de transporte a jato voa a 12 km de altitude, em vôo estável nivelado, a 820 km/h. Modele a fuselagem do avião como um cilindro circular com $D = 4$ m de diâmetro e $L = 40$ m de comprimento. Desprezando efeitos de compressibilidade, estime a força de arrasto de atrito superficial sobre a fuselagem. Avalie a potência necessária para vencer esta força.

9.61 Um rebocador de barcaças fluviais é testado num tanque de provas. O modelo do rebocador é construído na razão de es-

cala de 1:13,5. As dimensões do modelo são: comprimento total 11,1 pés, través 3,11 pés e calado 0,62 pé. (O deslocamento do modelo em água doce é 1200 lb.) Estime o comprimento médio da superfície molhada do casco. Calcule a força de arrasto de atrito superficial no protótipo a uma velocidade de 8 mph relativa à água.

9.62 A resistência de uma barcaça deve ser determinada a partir de testes com modelos. O modelo é construído numa razão de escala de 1:13,5 e tem comprimento, través e calado de 22,0, 4,00 e 0,667 pés, respectivamente. O teste deve simular o desempenho do protótipo à velocidade de 8 mph. A que velocidade deve o modelo ser testado? As camadas limites no protótipo são laminares ou turbulentas? Onde devem ser colocados estimuladores de camada limite no modelo? Estime as forças de arrasto de atrito superficial para as barcaças modelo e protótipo.

9.63 Você é chamado pela equipe de canoagem do Flamengo para estimar o arrasto sobre sua canoa de competição de oito lugares. O casco da canoa pode ser aproximado como um meio cilindro circular com diâmetro de 457 mm e 7,32 m de comprimento. A velocidade da canoa através da água é de 6,71 m/s. Estime o local de transição de escoamento laminar para turbulento na camada limite sobre o casco da canoa. Calcule a espessura da camada limite turbulenta na traseira da canoa. Determine o arrasto de atrito superficial total sobre o casco sob as condições dadas.

9.64 Uma folha de material plástico com espessura de 3/8 pol. e densidade relativa SG = 1,5 é largada dentro de um grande tanque contendo água. A folha tem 2 pés de altura e 3 pés de largura. Ela cai verticalmente. Estime a velocidade terminal da folha, admitindo que o único arrasto é aquele devido ao atrito superficial e que as camadas limites são turbulentas a partir da borda de ataque.

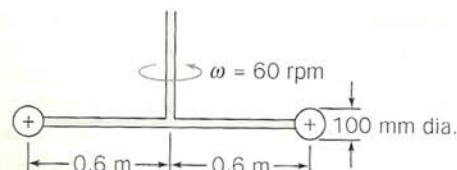
9.65 Um submarino nuclear navega a 27 nós, inteiramente submerso. O casco é aproximadamente um cilindro circular com $D = 11{,}0$ m de diâmetro e $L = 107$ m de comprimento. Estime a porcentagem do comprimento do casco para a qual o escoamento é laminar. Calcule o arrasto de atrito superficial sobre o casco. Estime a taxa de desaceleração aproximada do submarino se toda a potência propulsora fosse subitamente cortada.

9.66 O avião de transporte a jato de 600 lugares proposto pela indústria Airbus tem uma fuselagem com 70 m de comprimento e 7,5 m de diâmetro. O avião deve operar 14 horas por dia, 6 dias por semana; sua velocidade de cruzeiro é 257 m/s ($M = 0{,}87$) a 12 km de altitude. Os motores consomem combustível na taxa de 0,06 kg por hora para cada N de empuxo produzido. Estime a força de arrasto de atrito superficial sobre a fuselagem do avião em vôo de cruzeiro. Calcule a economia anual de combustível decorrente da redução de 1% no arrasto de atrito sobre a fuselagem por modificação do revestimento da superfície.

9.67 Considere os dados de teste de modelo de navio apresentados nas Figs. 7.1 e 7.2. Calcule os coeficientes de arrasto de atrito superficial e as forças correspondentes para modelo e protótipo, para $Fr = 0{,}5$. Para o protótipo, $L = 409$ pés e $A = 19.500$ pés^2.

9.68 O deslocamento de um superpetroleiro é aproximadamente 600.000 toneladas métricas. Esse navio tem comprimento $L = 300$ m, través (largura) $b = 80$ m e calado (profundidade) $D = 25$ m. O navio navega a 14 nós na água do mar a 4°C. Para essas condições, estime (a) a espessura de camada limite na popa do navio, (b) o arrasto total de atrito superficial atuando sobre o navio e (c) a potência necessária para vencer a força de arrasto.

9.69 Como parte das comemorações do bicentenário da independência dos EUA, em 1976, um grupo empreendedor pendurou uma gigantesca bandeira norte-americana (com 59 m de altura e 112 m de largura) nos cabos de suspensão da ponte de Verrazano Narrows. Eles aparentemente relutaram em fazer furos na bandeira para aliviar a força do vento e, dessa forma eles tinham efetivamente uma placa plana normal ao escoamento. A bandeira foi rasgada da sua amarração quando o vento atingiu 16 km/h. Estime a força do vento agindo sobre a bandeira para essa velocidade. Eles deveriam ter ficado surpresos com o fato de a bandeira ter sido arrancada?

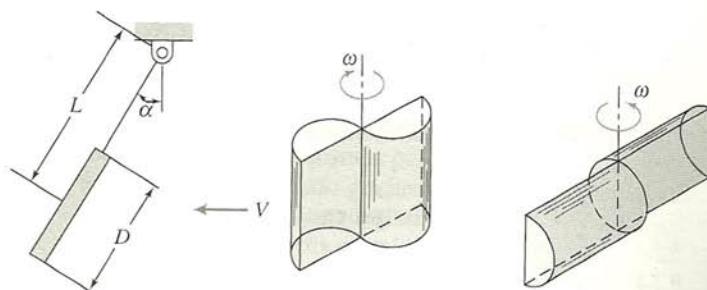
9.70 Um misturador rotativo é construído com dois discos circulares como mostrado. O misturador é acionado a 60 rpm dentro de um grande vaso contendo uma solução de salmoura (SG = 1,1). Despreze o arrasto sobre as hastes e o movimento induzido no líquido. Estime o torque e a potência mínimos requeridos para acionar o misturador.

P9.70

9.71 A componente vertical da velocidade de aterrissagem de um pára-quedas deve ser inferior a 6 m/s. A massa total de pára-quedas e pára-quedista é de 120 kg. Determine o mínimo diâmetro do pára-quedas aberto.

9.72 Um avião militar com massa de 800 kg aterrissa a 350 km/h. O piloto dispõe de um pára-quedas de frenagem com 10 m^2 de área. Estime o tempo necessário para desacelerar o avião da velocidade de aterrissagem até 200 km/h. Calcule a taxa de desaceleração máxima.

9.73 Dados balísticos obtidos de uma banca de tiros mostram que o arrasto aerodinâmico reduz a velocidade de um projétil de revólver Magnum 44, de 250 m/s para 210 m/s, num trajeto horizontal de 150 m. O diâmetro e a massa do projétil são, respectivamente, 11,2 mm e 15,6 g. Avalie o coeficiente médio de arrasto da bala.

9.74 A resistência ao movimento de uma boa bicicleta num pavimento liso é devida, quase que inteiramente, ao arrasto aerodinâmico. Admita que a massa total de ciclista e bicicleta é $M = 100$ kg. A área frontal, medida numa fotografia, é $A = 0{,}46$ m^2. Experiências numa colina com declive de 8% mostram que a velocidade terminal é $V_t = 15$ m/s. A partir desses dados, o coeficiente de arrasto é estimado como $C_D = 1{,}2$. Verifique os cálculos do coeficiente de arrasto. Estime a distância necessária para que ciclista e bicicleta desacelerem de 15 para 10 m/s, enquanto descansam nos pedais após atingirem piso plano.

9.75 Um disco circular é pendurado numa corrente de ar a partir de um suporte articulado como mostrado. Num experimento de túnel de vento, realizado no ar a 50 pés/s com um disco de 1 pol. de diâmetro, α foi medido como 10°. Para essas condições, determine a massa do disco. Suponha que o coeficiente de arrasto para o disco aplica-se quando a componente da velocidade do vento normal ao disco é usada. Admita que o arrasto na haste e o atrito no pivô são desprezíveis. Plote uma curva teórica de α como função da velocidade do ar.

P9.75

P9.76

9.76 Foi proposto a utilização de tambores excedentes de óleo de 55 galões para fazer moinhos de vento em países subdesenvolvidos. Duas configurações possíveis são mostradas. Estime qual seria a melhor, por quê, e de quanto? O diâmetro e o comprimento de tambor são $D = 24$ pol. e $H = 29$ pol.

9.77 Um anemômetro simples, porém eficaz, para medir a velocidade do vento, pode ser feito com uma placa delgada articulada de modo a defletir sob a ação do vento. Considere uma placa fina de latão, tendo 20 mm de altura e 10 mm de largura. Deduza uma relação para a velocidade do vento como uma função do ângulo de deflexão, θ. Que espessura de latão deveria ser usada para dar $\theta = 30°$ para 10 m/s?

9.78 Um atleta bem treinado pode correr de bicicleta a uma velocidade constante de 37 km/h num dia calmo, em situação de esforço máximo. (A massa total de ciclista e bicicleta é $M =$ 80 kg. A força de resistência ao rolamento dos pneus é $F_R =$ 4 N. O coeficiente de arrasto e a área frontal da bicicleta e do ciclista são $C_D = 1{,}2$ e $A = 0{,}25$ m².) O atleta apostou que ele pode correr a uma velocidade relativa ao solo de 30 km/h contra um vento frontal de 10 km/h. Determine a potência máxima que o atleta pode manter. Avalie as possibilidades de o atleta ganhar essa aposta.

9.79 Um avião F-4 é desacelerado após a aterrissagem por pára-quedas duplo disparados da traseira. Cada pára-quedas tem 12 pés de diâmetro. O F-4 pesa 32.000 lbf e aterrissa a 160 nós. Estime o tempo e a distância necessários para desacelerar a aeronave para 100 nós, admitindo que os freios não são utilizados e que o arrasto do avião é desprezível.

9.80 Dados experimentais [14] sugerem que as áreas de arrasto máxima e mínima (C_DA) de um pára-quedista de salto livre varia de cerca de 0,85 m², para uma posição de decúbito ventral, com as pernas e os braços abertos, a 0,11 m² para queda vertical. Estime as velocidades terminais para um pára-quedista de 75 kg em cada posição. Calcule o tempo e a distância necessários para o pára-quedista atingir 95% da velocidade terminal a uma altitude de 3000 m num dia padrão.

9.81 Um veículo foi construído para tentar bater o recorde de velocidade nas pistas de sal de Bonneville, cuja elevação é de 4400 pés. O motor entrega 500 HP para as rodas traseiras e uma carenagem cuidadosa levou a um coeficiente de arrasto de 0,15, com base na área frontal de 15 pés². Calcule a velocidade teórica máxima do carro relativa ao solo (a) no ar calmo e (b) com um vento contrário de 20 mph.

9.82 No início dos anos 1970 um típico *sedan* americano tinha uma área frontal de 23,4 pés² e um coeficiente de arrasto de 0,5. Plote uma curva de potência (HP) requerida para vencer o arrasto aerodinâmico *versus* velocidade de estrada no ar padrão. Se a resistência ao rolamento for 1,5% do peso do veículo (4500 lbf), determine a velocidade para a qual a força aerodinâmica excede a resistência de atrito. Quanta potência é requerida para trafegar a 55 mph e a 70 mph numa estrada plana, sem vento?

9.83 Um conjunto cavalo reboque tem uma área frontal $A = 102$ pés² e coeficiente de arrasto $C_D = 0{,}9$. A resistência ao rolamento é 6 lbf por cada 1000 lbf de peso do veículo. O consumo específico de combustível do motor diesel é 0,34 lbm de combustível por HP-hora, e a eficiência do sistema de transmissão é 92%. A massa específica do óleo diesel é 6,9 lbm/gal. Estime a economia de combustível do conjunto, à velocidade de 55 mph, se o peso bruto é 72.000 lbf. Um dispositivo de carenagem aerodinâmica reduz o arrasto de 15%. O caminhão viaja 120.000 milhas por ano. Calcule o combustível economizado por ano pela carenagem do teto.

9.84 De acordo com um anúncio publicitário, o Porsche 944 tem as seguintes características: $C_D = 0{,}35$, $A = 1{,}83$ m² e potência máxima $\mathcal{P} = 143$ bhp. O anúncio ainda acrescenta que o veículo necessita de 13,9 HP para andar a 55 mph. Use esses dados para estimar (a) a capacidade máxima de aceleração a 55 mph e (b) a velocidade máxima do carro. (Admita que a resistência ao rolamento é 1% do peso do carro.)

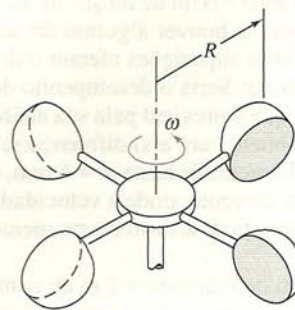
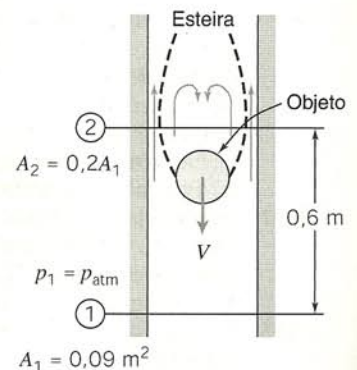
9.85 Um automóvel Ford Probe GT é conduzido numa estrada plana a 100 km/h no ar padrão. A área frontal do veículo é de 1,8 m² e o coeficiente de arrasto é de 0,31. Quanta potência é requerida para vencer o arrasto aerodinâmico? Estime a velocidade máxima do carro se o motor tem potência nominal de 145 HP.

9.86 Um disco delgado, de raio R, é orientado perpendicularmente a uma corrente de fluido. As distribuições de pressão nas superfícies frontal e traseira são medidas e apresentadas na forma de coeficientes de pressão. Os dados são modelados com as seguintes expressões para as superfícies da frente e de trás, respectivamente:

$$\text{Superfície frontal } C_p = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^6$$

$$\text{Superfície traseira } C_p = -0{,}42$$

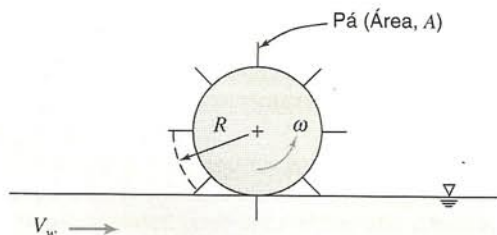
Calcule o coeficiente de arrasto do disco.

9.87 Um anemômetro para medir velocidade do vento é fabricado com quatro taças hemisféricas de 50 mm de diâmetro, como mostrado. O centro de cada taça é colocado a uma distância $R = 75$ mm do pivô. O anemômetro deve começar a girar quando a velocidade do vento for superior a 1 km/h. Determine a relação entre a velocidade de rotação, ω, e a velocidade do vento, V, se o atrito no pivô for desprezível. Calcule o torque máximo de atrito que pode estar presente no pivô. Estime o erro na medição da velocidade causado pelo torque de atrito no pivô, para uma velocidade de vento de 10 km/h.

P9.87 **P9.88**

9.88 Um objeto cai no ar no interior de um longo duto vertical. A velocidade do objeto é constante em 3 m/s. A configuração do escoamento em volta do objeto é mostrada. A pressão estática é uniforme nas seções ① e ②; a pressão é atmosférica na seção ①. A área efetiva de escoamento na seção ② é 20% da área do duto. Os efeitos de atrito entre as seções ① e ② são desprezíveis. Avalie a velocidade do escoamento em relação ao objeto na seção ②. Calcule a pressão estática na seção ②. Determine a massa do objeto.

9.89 Um objeto de massa m, com área de seção transversal igual à metade da área do tubo, cai num tubo de correio. O movimento é em regime permanente. A área da esteira é 3/4 da área do tubo na sua seção máxima. Use a hipótese de pressão constante na esteira. Aplique as equações da continuidade, de Bernoulli e da quantidade de movimento, para desenvolver uma expressão para a velocidade terminal do objeto em termos de sua massa e de outras quantidades.

9.90 Uma grande roda de pás está imersa na correnteza de um rio a fim de gerar potência. Cada pá tem uma área A e coeficien-

te de arrasto C_D; o centro de cada pá está localizado no raio R a partir da linha de centro da roda. Admita que o equivalente a uma pá está continuamente imerso na corrente d'água. Obtenha uma expressão para a força de arrasto sobre uma única pá em termos de variáveis geométricas, velocidade da correnteza, V, e velocidade linear do centro da pá, $U = R\omega$. Desenvolva expressões para o torque e a potência produzidos pela roda. Determine a velocidade na qual a roda de pás deveria girar para obter a máxima produção de potência numa dada correnteza.

P9.90

9.91 Um anemômetro de taça rotativa para medir velocidade do vento (veja Problema 9.87) está localizado no topo de uma escultura d'água. É impraticável calibrar o anemômetro no local porque ele está a 11 m acima do solo. Em vez disso, é proposto que o anemômetro seja analisado visando a predizer sua rotação como função da velocidade do vento. Modele a velocidade angular do anemômetro quando a velocidade do vento varia no ar padrão. Trace uma "curva de calibração" predita pelo modelo analítico usando taça de 125 mm de raio de centro, 125 mm de diâmetro e 10^{-5} N·m de torque de atrito no pivô. Discuta as limitações (se houver alguma) do seu modelo teórico. Discuta como suas suposições afetam o desempenho previsto do anemômetro. Seria o desempenho do anemômetro melhor ou pior do que o previsto pela sua análise? Por quê? Que fatores contribuem para a(s) diferença(s)?

9.92 Uma sonda pitot-estática com diâmetro de haste $d = 6$ mm, é inserida $L = 300$ mm num túnel de vento, onde a velocidade uniforme é de 25 m/s. Calcule a força de arrasto e o momento fletor atuando sobre a sonda.

9.93 A antena de um carro tem 8 mm de diâmetro e 2 m de comprimento. Estime o momento fletor que tende a arrancá-la, se o carro for conduzido a 125 km/h num dia padrão.

9.94 Considere pequenas gotas de óleo (SG = 0,85) subindo na água. Desenvolva uma relação para calcular a velocidade terminal de uma gotícula (em m/s) como uma função do seu diâmetro (em mm), admitindo escoamento de Stokes. Para que faixa de diâmetro de gota o escoamento de Stokes é uma suposição razoável?

9.95 Um balão esférico, cheio de hidrogênio, com 0,6 m de diâmetro, exerce uma força vertical de 1,3 N sobre a corda que o retém quando mantido estacionário no ar padrão sem vento. Com uma velocidade do vento de 3 m/s, a corda que retém o balão faz um ângulo de 60° com a horizontal. Calcule o coeficiente de arrasto do balão nessas condições, desprezando o peso da corda.

9.96 Ar padrão é puxado para dentro de um túnel de vento de baixa velocidade. Uma esfera de 30 mm de diâmetro é montada num dinamômetro para medir sustentação e arrasto. Um manômetro de óleo é usado para medir pressão estática dentro do túnel; a leitura é -40 mm de óleo (SG = 0,85). Calcule a velocidade do ar de corrente livre no túnel, o número de Reynolds do escoamento sobre a esfera e a força de arrasto sobre a esfera. As camadas limites sobre a esfera são laminares ou turbulentas? Explique.

9.97 Uma bola de *hóqui* tem diâmetro $D = 73$ mm e massa $m = 160$ g. Quando bem golpeada, ela parte do bastão com velocidade inicial $U_0 = 50$ m/s. A bola é essencialmente lisa. Estime a distância percorrida em trajetória horizontal antes que a velocidade da bola seja reduzida em 10% pelo arrasto aerodinâmico.

9.98 Calcule a velocidade terminal de granizos (admita que são esféricos) de 10 mm no ar padrão.

9.99 Calcule a velocidade terminal de uma gota de chuva de 1/8 pol. de diâmetro (admita esférica) no ar padrão.

9.100 O coeficiente de arrasto para uma esfera em velocidade sônica é aproximadamente 1,3. É possível para uma esfera de aço atingir $M = 1$ em queda livre ao nível do mar? Essa é uma possibilidade concreta? Reconsidere para queda livre em altitude elevada.

9.101 Um avião leve reboca uma faixa publicitária sobre um estádio de futebol numa tarde de sábado. A faixa tem 1 m de altura e 12 m de comprimento. De acordo com Hoerner [14], o coeficiente de arrasto baseado na área (Lh) para uma tal faixa é aproximado por $C_D = 0{,}05\ L/h$, onde L é o comprimento da faixa e h a sua altura. Estime a potência requerida para rebocar a faixa a $V = 90$ km/h. Compare com o arrasto de uma placa plana rígida. Por que o arrasto da faixa é maior?

9.102 Uma bola de tênis com massa de 57 g e diâmetro de 64 mm é solta em ar padrão ao nível do mar. Calcule a velocidade terminal da bola. Estime o tempo e a distância requeridos para que a bola atinja 95% da sua velocidade terminal.

9.103 Uma pequena esfera ($D = 6$ mm) é observada cair através de óleo de rícino com uma velocidade terminal de 60 mm/s. A temperatura é de 20°C. Calcule o coeficiente de arrasto para a esfera. Determine a sua densidade. Se largada na água, a esfera cairia mais depressa ou mais devagar? Por quê?

9.104 O seguinte ajuste de curva foi proposto por Chow [33] para o coeficiente de arrasto de uma esfera lisa em função do número de Reynolds:

$C_D = 24/Re$	$Re \leq 1$
$C_D = 24/Re^{0{,}646}$	$1 < Re \leq 400$
$C_D = 0{,}5$	$400 < Re \leq 3 \times 10^5$
$C_D = 0{,}000366\ Re^{0{,}4275}$	$3 \times 10^5 < Re \leq 2 \times 10^6$
$C_D = 0{,}18$	$Re > 2 \times 10^6$

Use os dados da Fig. 9.11 para estimar a magnitude e a localização do erro máximo entre o ajuste de curva e os dados.

9.105 O Problema 9.75 mostrou um disco circular pendurado numa corrente de ar por meio de uma haste cilíndrica. Admita que a haste tem $L = 40$ mm de comprimento e $d = 3$ mm de diâmetro. Resolva o Problema 9.75 incluindo o efeito de arrasto sobre o suporte.

9.106 Uma torre d'água consiste de uma esfera com 12 m de diâmetro no topo de uma torre vertical com 30 m de altura e 2 m de diâmetro. Estime o momento fletor exercido sobre a base da torre devido à força aerodinâmica imposta por um vento de 100 km/h num dia padrão. Despreze a interferência da junta entre a esfera e a torre.

9.107 Um balão esférico contém hélio e ascende através do ar padrão. A massa do balão e da sua carga é de 150 kg. Determine o diâmetro requerido para que a velocidade de ascensão seja de 3 m/s.

9.108 Um projétil de canhão "12 libras" rola do convés de um navio e cai no oceano num local onde a profundidade é de 1000 m. Estime o tempo decorrido antes que o projétil atinja o fundo do mar.

9.109 Uma bola de golfe americano (veja o Problema 1.11) é liberada a partir do repouso e afunda em água doce. Avalie a velocidade terminal da bola de golfe. Estime a distância requerida para a bola atingir 95% da sua velocidade terminal.

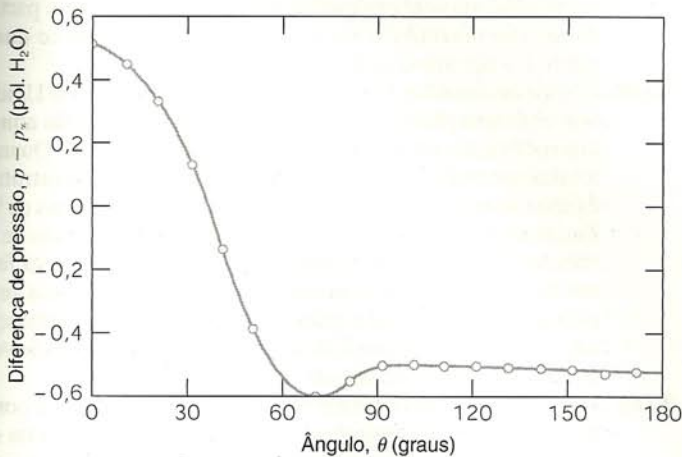
9.110 Uma bola de pingue-pongue de 38,1 mm de diâmetro, com massa de 2,69 g é solta em água doce e sobe em direção da superfície. Avalie a velocidade terminal da bola. Estime a distância requerida para a bola atingir 95% da sua velocidade terminal.

9.111 Um professor de engenharia mecânica com massa de 70 kg afirma que ele pode subir uma colina com inclinação de 6°, pedalando uma bicicleta de 10 kg, a uma velocidade constante de 4,1 m/s, desde que a velocidade de vento frontal não exceda 0,9 m/s. Sua área frontal é estimada em 0,3 m². Para verificar sua afirmação, despreze a resistência de rolamento. Estime a força de arrasto aerodinâmico agindo sobre ciclista e bicicleta com velocidade de vento frontal de 0,9 m/s. Determine a potência necessária para subir a colina. Que velocidade o professor provavelmente atingiria em piso plano sem vento?

9.112 Considere um mastro de bandeira cilíndrico de altura H. Para coeficiente de arrasto constante, avalie a força de arrasto e o momento fletor no mastro se a velocidade do vento varia como $u/U = (y/H)^{1/7}$, onde y é a distância medida a partir do solo. Compare com o arrasto e o momento para um perfil de vento uniforme com velocidade constante U.

9.113 A lei de arrasto de Stokes para esferas lisas deve ser verificada experimentalmente deixando cair bolas de aço de rolamentos em glicerina. Avalie o maior diâmetro de bola de aço para o qual $Re < 1$ para velocidade terminal. Calcule a altura da coluna de glicerina necessária para que uma bola atinja 95% da velocidade terminal.

9.114 Bolhas de hidrogênio freqüentemente são usadas como marcadores para a visualização de escoamento. Considere bolhas com diâmetros de 0,01 a 3 mm. Usando as expressões para ajuste de curvas do Problema 9.104, plote a velocidade terminal das bolhas na água como uma função do diâmetro das bolhas. (Certifique-se de considerar o efeito de tensão superficial sobre a pressão de hidrogênio dentro da bolha.)

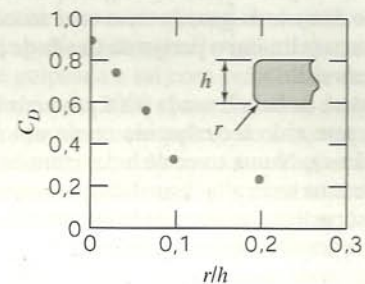
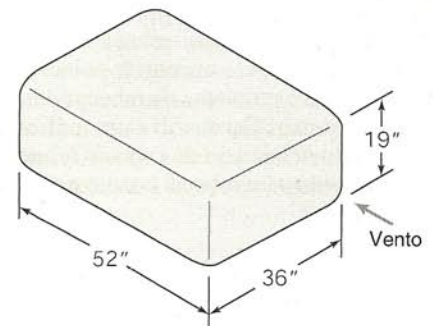
9.115 O gráfico mostra diferença de pressão *versus* ângulo, medido para o fluxo de ar em torno de um cilindro circular para $Re = 80.000$. Use estes dados para estimar C_D para esse escoamento. Compare com os dados da Fig. 9.13. Como você pode explicar a diferença?

P9.115

9.116 Uma esfera plástica de parede fina com 10 mm de diâmetro e massa de 0,05 g, imersa num banho de glicerina a uma profundidade de 1 m, é liberada e começa a subir para a superfície. Calcule o tempo requerido para a esfera atingir a superfície.

9.117 Testes rodoviários realizados numa estrada plana, num dia calmo, podem ser usados para medir os coeficientes de arrasto aerodinâmico e de resistência ao rolamento para um veículo em escala real. A resistência ao rolamento é estimada a partir de dV/dt medido a baixa velocidade, onde o arrasto aerodinâmico é pequeno. A resistência ao rolamento é então deduzida de dV/dt medido a alta velocidade a fim de determinar o arrasto aerodinâmico. Os seguintes dados foram obtidos durante um teste com um veículo, de peso $W = 25.000$ lbf e área frontal $A = 79$ pés²:

V(mph)	5	55
$\dfrac{dV}{dt}\left(\dfrac{\text{mph}}{\text{s}}\right)$	−0,150	−0,475

Estime o coeficiente de arrasto aerodinâmico para esse veículo.

9.118 As dimensões aproximadas de um bagageiro de teto alugado são mostradas na figura. Estime a força de arrasto sobre o bagageiro ($r = 4$ pol.) a 65 mph. Se a eficiência do sistema de transmissão do veículo for de 0,85 e o consumo específico de combustível do seu motor for de 0,46 lbm/(HP·h), estime o consumo adicional de combustível devido ao bagageiro.

Coeficiente de arrasto *versus* razão de raios [34]

P9.118

9.119 Um transdutor sonar esférico com 0,375 m de diâmetro deve ser rebocado em água do mar. O transdutor deve estar inteiramente submerso para 31,1 nós. Para evitar cavitação, a pressão mínima na superfície do transdutor deve ser maior que 30 kPa (abs). Calcule a força de arrasto aerodinâmico atuando sobre o transdutor para a velocidade de reboque requerida. Estime a profundidade mínima na qual o transdutor deve estar submerso para evitar cavitação.

9.120 Enquanto caminhava pelo campus num dia de ventania, um aluno de mecânica dos fluidos especulava sobre a possibilidade de usar um guarda-chuva como uma "vela" para impulsionar uma bicicleta. Desenvolva uma expressão algébrica para a velocidade que uma bicicleta poderia atingir sobre uma pista

plana com um "sistema de propulsão" a guarda-chuva. A área frontal da bicicleta e ciclista é estimada em 0,3 m^2. Avalie a velocidade que poderia ser alcançada pela bicicleta com um guarda-chuva de 1,22 m de diâmetro num vento que sopra a 24 km/h. Discuta a viabilidade desse sistema de propulsão.

9.121 Considere a bolha subindo em água do mar descrita no Problema 3.7. Estime o intervalo de tempo requerido após a liberação para que a bolha atinja a superfície do mar.

9.122 Segure uma folha de papel plana paralela ao solo. Solte a folha. Note que a mesma cai mais lentamente do que se ela tivesse sido amassada em uma bola. Explique.

9.123 O movimento de um pequeno foguete foi analisado no Problema-Exemplo 4.12 admitindo arrasto aerodinâmico desprezível. Isso não foi realista para a velocidade final calculada de 369 m/s. Plote a velocidade do foguete como uma função do tempo, admitindo $C_D = 0,3$ e um diâmetro do foguete de 700 mm. Compare com os resultados para $C_D = 0$.

9.124 Bolas da marca Wiffle™, feitas de plástico leve com numerosos furos são usadas para praticar beisebol e golfe. Explique os propósitos dos furos e como eles funcionam. Explique como você verificaria suas hipóteses experimentalmente.

9.125 Torres de transmissão de sinais de televisão podem ter até 500 m de altura. No inverno, forma-se gelo na estrutura metálica. Quando o gelo derrete, pedaços quebram-se e caem no solo. Quão distante da base da torre você recomendaria colocar uma cerca para limitar o perigo da queda de pedaços de gelo sobre pedestres?

9.126 A "torre de bala", usada para produzir bala de chumbo esférica, tem sido reconhecida como um marco da engenharia mecânica. Numa torre de bala, chumbo fundente é derramado de uma torre alta; à medida que o chumbo solidifica, a tensão superficial puxa cada bala para uma forma esférica. Discuta a possibilidade de aumentar o "tempo de residência" da bala, ou de usar uma torre mais curta, fazendo o chumbo fundente cair numa corrente ascendente de ar. Apóie sua discussão em cálculos apropriados.

9.127 Objetos podem ser rebocados debaixo d'água por muitos motivos, desde encontrar peixes até localizar submarinos. Analise o problema de rebocar um objeto abaixo da superfície do mar. Desenvolva um gráfico para predizer o comprimento necessário do cabo de reboque e a força que deve ser exercida para rebocar o cabo e um objeto típico submerso.

9.128 Projete um anemômetro de túnel que utiliza arrasto aerodinâmico para mover ou defletir um membro ou acoplamento, produzindo uma saída que pode ser relacionada com a velocidade do vento, para a faixa de 1 a 10 m/s no ar padrão. Considere três conceitos de projeto alternativos. Selecione o melhor conceito e prepare um projeto detalhado. Especifique a forma, o tamanho e o material para cada componente. Quantifique a relação entre velocidade do vento e saída do anemômetro. Apresente resultados como uma "curva de calibração" da saída do anemômetro *versus* velocidade do vento. Discuta as razões pelas quais você rejeitou os projetos alternativos e escolheu seu conceito de projeto final.

9.129 Um antigo avião carrega 60 m de fios de corda estirados na direção normal à direção do movimento. O diâmetro do fio é 6 mm. Estime a economia máxima de potência decorrente de uma carenagem ótima dos fios para uma velocidade do avião de 150 km/h no ar padrão ao nível do mar.

9.130 A bicicleta do Problema 9.78 é equipada com uma carenagem para reduzir o arrasto aerodinâmico. A carenagem reduz C_D para 0,90 mas aumenta a área frontal para 0,30 m^2. Estime a velocidade máxima do ciclista em ar calmo, com a carenagem instalada.

9.131 Por que uma flecha tem penas? Explique como as penas afetam o vôo das flechas.

9.132 Por que os revólveres modernos têm canos estriados?

9.133 Por que é possível lançar uma bola de futebol americano mais facilmente num movimento espiral do que num movimento de rotação da bola em torno das suas extremidades?

9.134 Como funciona o defletor de vento montado sobre a cabina de um caminhão tipo cavalo-reboque? Explique usando diagramas do modelo de escoamento em torno do caminhão e da distribuição de pressão sobre a superfície do caminhão.

9.135 Um avião está em vôo de cruzeiro a 250 km/h através do ar na condição padrão. O coeficiente de sustentação para essa velocidade é de 0,4 e o coeficiente de arrasto é de 0,065. A massa do avião é de 850 kg. Calcule a área efetiva de sustentação para o avião.

9.136 Um avião com uma área efetiva de sustentação igual a 25 m^2 é equipado com aerofólios de seção NACA 23012 (Fig. 9.23). O ajuste máximo de *flap* que pode ser usado na decolagem corresponde à configuração ② na Fig. 9.23. Determine a massa bruta máxima possível para o avião se a sua velocidade de decolagem é de 150 km/h (despreze a sustentação adicionada devida ao efeito de solo).

9.137 Uma placa plana, com comprimento $L = 3$ pés e largura $b = 4$ pés, move-se através de ar calmo com ângulo de ataque de 12 graus e velocidade de 44,5 pés/s. Para esse ângulo de ataque, os coeficientes de sustentação e de arrasto para uma placa com essa razão de aspecto são $C_L = 0,72$ e $C_D = 0,17$, baseados na área da placa. Avalie o vetor força resultante que atua sobre a placa. Determine a potência necessária para propelir a placa nessa velocidade.

9.138 Os hidrofólios de uma barco anfíbio têm uma área total efetiva de 0,7 m^2. Seus coeficientes de sustentação e arrasto são 1,6 e 0,5, respectivamente. A massa total da embarcação em condição de navegação é 1800 kg. Determine a velocidade mínima para a qual a embarcação é suportada pelos hidrofólios. Para essa velocidade, determine a potência necessária para vencer a resistência da água. Se o barco for equipado com um motor de 110 kW, estime a sua velocidade máxima.

9.139 Um avião leve, com massa $M = 2000$ lbm, tem área planiforme de asa $A = 100$ pés^2. Sua velocidade máxima em vôo nivelado é $V_{máx} = 180$ mph. O avião pode ser usado com segurança em acrobacias desde que a aceleração máxima vertical seja inferior a $5g$. O aerofólio usado para acrobacia tem uma seção NACA 23015. É possível para o piloto exceder uma aceleração vertical instantânea de $5g$ com a aeronave, partindo de vôo nivelado? (Em vôo nivelado, considera-se que o piloto e a aeronave estão submetidos a $1g$.)

9.140 O caça de combate F-16 da Força Aérea dos Estados Unidos tem uma área planiforme de asa $A = 27,9$ m^2; ele pode atingir um coeficiente máximo de sustentação de $C_L = 1,6$. Quando totalmente carregado, sua massa é $M = 11.600$ kg. A estrutura é capaz de manobras que produzem acelerações verticais de $9g$. Entretanto, os alunos pilotos são restringidos a manobras de no máximo $5g$ durante o treinamento. Considere uma curva feita em vôo nivelado com a aeronave inclinada. Determine a velocidade mínima na qual o piloto pode produzir uma aceleração total de $5g$ no ar padrão. Calcule o raio correspondente de vôo. Discuta os efeitos da altitude nesses resultados.

9.141 Um avião leve tem uma envergadura efetiva de 10 m e corda de 1,8 m. Ele foi originalmente projetado para usar uma seção de aerofólio convencional (NACA 23015). Com esse aerofólio, sua velocidade de cruzeiro num dia padrão é de 225 km/h, próximo do nível do mar. Uma conversão para uma seção de escoamento laminar (NACA 66_2-215) é proposta. Determine a velocidade de cruzeiro que poderia ser atingida com essa nova seção para a mesma potência.

9.142 Admita que o avião Boeing 727 tenha asas com seção NACA 23012, área planiforme de 1600 pés², *flaps* duplos e razão de aspecto efetiva de 6,5. Se a aeronave com peso bruto de 175.000 lb voar a 150 nós no ar padrão, estime o empuxo requerido para manter vôo nivelado.

9.143 Um avião com massa de 4500 kg voa a altura e velocidade constantes numa trajetória circular, a 250 km/h. O círculo de vôo tem raio de 1000 m. O avião tem área de sustentação de 22 m² e está equipado com aerofólios de seção NACA 23015, com razão de aspecto efetiva de 7. Estime o arrasto sobre a aeronave e a potência requerida.

9.144 Os carros de corrida Chaparral 2F de Jim Hall foram pioneiros, na década de 1960, no emprego de aerofólios montados acima da suspensão traseira para aumentar a estabilidade e melhorar o desempenho dos freios. O aerofólio tinha largura efetiva (envergadura) de 6 pés e corda de 1 pé. Seu ângulo de ataque variava entre 0 e menos 12 graus. Admita que dados para os coeficientes de sustentação e arrasto são fornecidos pelas curvas (para seções convencionais) da Fig. 9.17. Considere uma velocidade de automóvel de 120 mph num dia calmo. Para uma deflexão do aerofólio de 12 graus para baixo calcule (a) a força máxima para baixo e (b) o aumento máximo na força de desaceleração produzida pelo aerofólio.

9.145 O ângulo de vôo planado sem motores é tal que a sustentação, o arrasto e o peso estão em equilíbrio. Mostre que o ângulo de inclinação de vôo planado, θ, é tal que $\theta = C_D/C_L$. O ângulo mínimo de vôo planado ocorre para uma velocidade na qual C_L/C_D é um máximo. Para as condições do Problema-Exemplo 9.8, avalie o ângulo mínimo de vôo planado para um Boeing 727-200. Qual a distância máxima que esse avião poderia planar a partir de uma altitude inicial de 10 km num dia padrão?

9.146 O ornamento no capô de um automóvel é meramente decorativo, mas ele aumenta o arrasto aerodinâmico do carro. Estime o custo do aumento do consumo de combustível em toda uma vida útil do automóvel causado por um ornamento típico.

9.147 A carga de asa do Gossamer Condor é 0,4 lbf por pé² de área de asa. Medições grosseiras mostraram que o arrasto era de aproximadamente 6 lbf para 12 mph. O peso total do Condor é de 200 lbf. A razão de aspecto efetiva do Condor é de 17. Estime a potência mínima requerida para fazer voar esse aparelho. Compare com os 0,39 HP que o piloto Brian Allen pôde manter por duas horas.

9.148 Como um Frisbee™ voa ? O que o faz virar para a esquerda ou para a direita? Qual é o efeito do giro ou da rotação sobre o seu vôo?

9.149 Um automóvel trafega numa estrada com uma bicicleta fixada transversalmente na sua traseira. As rodas da bicicleta giram lentamente. Explique por que e em que sentido a rotação ocorre.

9.150 As placas sinalizadoras ao lado de uma estrada rodoviária tendem a oscilar em um movimento de torção quando um vento forte ocorre. Discuta os fenômenos que devem ocorrer para causar esse comportamento.

9.151 O ar em movimento sobre um automóvel é acelerado a velocidades superiores à do carro como mostrado na Fig. 9.25. Isso causa variações na pressão interna quando as janelas estão abertas ou fechadas. Use os dados da Fig 9.25 para estimar a redução de pressão quando uma janela é aberta ligeiramente, para uma velocidade de 100 km/h. Qual é a velocidade de corrente livre perto da abertura da janela?

9.152 Uma demonstração em classe mostrou que a sustentação está presente quando um cilindro gira em uma corrente de ar. Um cordão enrolado em volta de um cilindro de papel, quando puxado, provoca simultaneamente a rotação do cilindro e o seu movimento para a frente. Suponha um cilindro com diâmetro de 2 pol. e comprimento de 10 pol., ao qual é aplicado uma velocidade de rotação de 300 rpm e uma velocidade para a frente de 4 pés/s. Estime a força de sustentação aproximada que atua sobre o cilindro.

9.153 Cilindros rotativos foram propostos como um meio de propulsão de navios pelo engenheiro alemão, Flettner, em 1924. O propulsor original de Flettner tinha dois rotores, cada um com cerca de 3 m de diâmetro e 15 m de altura, girando com velocidade de até 750 rpm. Calcule as forças máximas de sustentação e arrasto que atuam sobre cada rotor num vento de 50 km/h. Compare a força total com aquela produzida para a razão ótima de L/D para a mesma velocidade do vento. Estime a potência necessária para girar o rotor a 750 rpm.

9.154 Uma bola de golfe (diâmetro $D = 43$ mm) com concavidades circulares é golpeada e sai com velocidade de 20 m/s e rotação anti-horária de 2000 rpm. A massa da bola é de 48 g. Avalie as forças de sustentação e de arrasto que atuam sobre a bola. Expresse seus resultados como frações do peso da bola.

9.155 As bolas de golfe americanas e britânicas têm diâmetros ligeiramente diferentes mas a mesma massa (veja os Problemas 1.11 e 1.12). Suponha que um golfista profissional golpeia, com um taco em tê, cada tipo de bola imprimindo-lhes 85 m/s com rotação anti-horária de 9000 rpm. Avalie as forças de sustentação e de arrasto sobre cada bola. Expresse as suas respostas como frações do peso de cada bola. Estime o raio de curvatura da trajetória de cada bola. Que bola teria maior alcance para essas condições?

9.156 Um lançador de beisebol arremessa uma bola a 90 km/h. A base está a 18 m da plataforma de lançamento. Que rotação deve ser aplicada à bola para desvio horizontal máximo de uma trajetória retilínea? (Uma bola de beisebol tem massa $m = 145$ g e $D = 74$ mm.) Qual será o desvio da bola em relação a uma trajetória reta?

Capítulo 10

MÁQUINAS DE FLUXO

O homem tem buscado controlar a natureza desde a antigüidade. O homem primitivo transportava água em baldes ou conchas; com a formação de grupos maiores, esse processo foi mecanizado. Assim, as primeiras máquinas de fluxo desenvolvidas foram as rodas de conchas e as bombas de parafuso para elevar a água. Os romanos introduziram a roda de pás em torno de 70 a.C. para obter energia de cursos d'água [1]. Mais tarde, foram desenvolvidos moinhos para extrair energia do vento, mas a baixa densidade de energia ali presente limitava a produção a poucas centenas de quilowatts. O desenvolvimento de rodas d'água tornou possível a extração de milhares de quilowatts de um único local.

Hoje, tiramos proveito de várias máquinas de fluxo. Num dia típico, obtemos água pressurizada de uma torneira, usamos um secador de cabelos, dirigimos um carro no qual máquinas de fluxo operam os sistemas de lubrificação, refrigeração e direção, e trabalhamos num ambiente confortável provido com circulação de ar. A lista poderia ser estendida indefinidamente.

O propósito deste capítulo é introduzir os conceitos necessários para analisar, projetar e aplicar máquinas de fluxo. A nossa abordagem lida quase que exclusivamente com escoamentos incompressíveis. A ênfase principal é em dispositivos absorvedores ou consumidores de energia (bombas e ventiladores), uma vez que eles são freqüentemente encontrados em sistemas de fluido.

Inicialmente, a terminologia do assunto é introduzida e as máquinas são classificadas por princípio de operação e características físicas. Em vez de tentar uma abordagem de todo o assunto, concentramos nossa atenção em máquinas nas quais a transferência de energia do fluido, ou para o fluido, dá-se por meio de um elemento rotativo. Equações básicas são revistas e em seguida simplificadas para formas úteis na análise de máquinas de fluxo. As características de desempenho de máquinas típicas são consideradas. São dados exemplos de aplicações de bombas e turbinas em sistemas típicos. Problemas abordando desde aplicações simples a projetos de sistemas concluem o capítulo.

10.1 INTRODUÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DAS MÁQUINAS DE FLUXO

As máquinas de fluxo podem ser classificadas, de modo amplo, como de *deslocamento positivo* ou *dinâmicas*. Nas máquinas de deslocamento positivo, a transferência de energia é feita por variações de volume que ocorrem devido ao movimento da fronteira na qual o fluido está confinado. Os dispositivos fluidomecânicos que direcionam o fluxo com lâminas ou pás fixadas num elemento rotativo são denominados *turbomáquinas*. Em contraste com as máquinas de deslocamento positivo, não há volume confinado numa turbomáquina. Todas as interações de trabalho numa turbomáquina resultam de efeitos dinâmicos do rotor sobre a corrente de fluido. A ênfase neste capítulo é em máquinas dinâmicas.

Uma distinção adicional entre os tipos de turbomáquinas é fundamentada na geometria do percurso do fluido. Nas máquinas de *fluxo radial*, a trajetória do fluido é essencialmente radial, com mudanças significativas no raio, da entrada para a saída. (Tais máquinas são, às vezes, denominadas *centrífugas*.) Nas máquinas de *fluxo axial*, a trajetória do fluido é aproximadamente paralela à linha de centro da máquina, e o raio de percurso não varia significativamente. Nas máquinas de *fluxo misto*, o raio da trajetória de

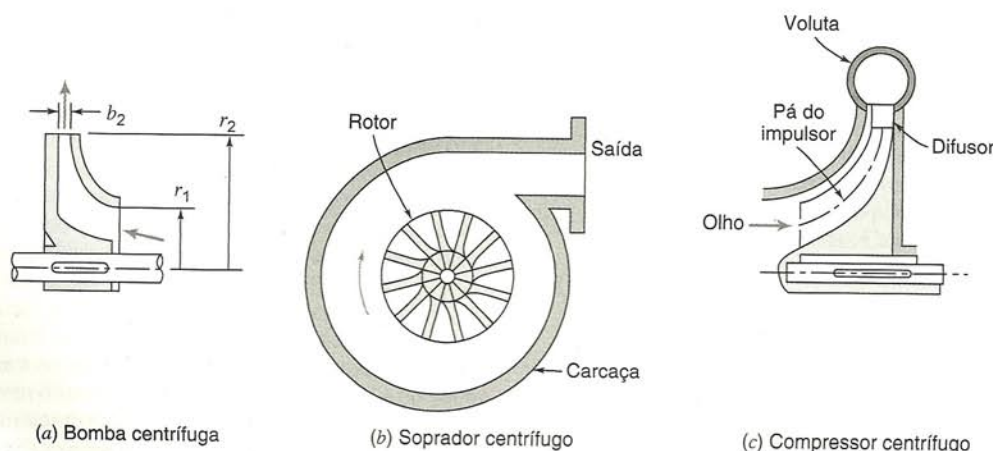



Fig. 10.1 Diagramas esquemáticos de turbomáquinas centrífugas típicas, adaptados de [2].

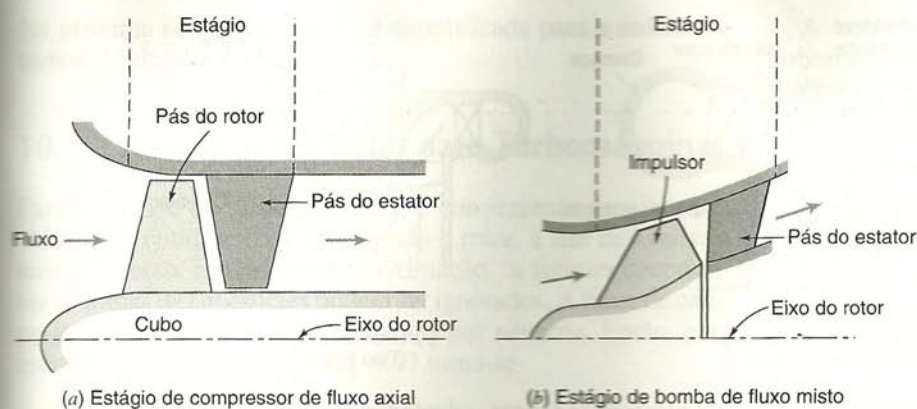



Fig. 10.2 Diagramas esquemáticos de turbomáquinas centrífugas e de fluxo misto típicas, adaptados de [2].

fluxo varia moderadamente. Diagramas esquemáticos de algumas turbomáquinas típicas são mostrados nas Figs. 10.1 a 10.3.

As máquinas que adicionam energia a uma corrente fluida são chamadas *bombas* quando o escoamento é líquido ou pastoso, e *ventiladores*, *sopradores* ou *compressores* para unidades que lidam com gás ou vapor, dependendo do aumento de pressão. Os ventiladores geralmente têm pequeno aumento de pressão (inferior a uma polegada de água) e os sopradores têm aumento de pressão moderado (da ordem de uma polegada de mercúrio); bombas e compressores podem ter aumentos de pressão muito grandes. Os sistemas industriais da atualidade operam a pressões de até 150.000 psi (10^4 atmosferas).

O elemento rotativo de uma bomba é freqüentemente chamado de *impulsor* ou *rotor*, e fica contido na *carcaça* ou *alojamento* da bomba. O eixo que transfere energia mecânica para o impulsor em geral penetra na carcaça; um sistema de mancais e selos é necessário para completar o projeto mecânico da unidade.

Três máquinas centrífugas típicas são mostradas esquematicamente na Fig. 10.1. O escoamento penetra em cada máquina quase axialmente através do *olho* do rotor, diagrama (*a*), no raio pequeno r_1. O fluxo é então defletido e sai pela descarga do impulsor no raio r_2, onde a largura é b_2. O escoamento deixando o impulsor é coletado na *voluta*, que aumenta gradualmente de área à medida que se aproxima da saída da máquina, diagrama (*b*). O impulsor geralmente tem pás; ele pode ser *fechado*, como mostrado no diagrama (*a*), ou *aberto*, como mostrado no diagrama (*c*). As pás do impulsor podem ser relativamente retas, ou encurvadas para tornarem-se não radiais na saída. O diagrama (*c*) mostra que pode haver um difusor entre a descarga do impulsor e a voluta. Esse difusor *radial* pode ser provido ou não de pás.

Turbomáquinas típicas de fluxo axial e misto são mostradas esquematicamente na Fig. 10.2. O diagrama (*a*) mostra um *estágio* típico de um compressor de fluxo axial.[1] O escoamento entra quase paralelo ao eixo do rotor e mantém, aproximadamente, o mesmo raio através do estágio. A bomba de fluxo misto no diagrama (*b*) mostra o fluxo sendo defletido para fora e movendo-se para raios maiores à medida que atravessa o estágio.

O aumento de pressão que pode ser obtido eficientemente num único estágio é limitado, dependendo do tipo de máquina. Entretanto, os estágios podem ser combinados, produzindo máquinas multiestágios, virtualmente sem limite no aumento de pressão. Os compressores de fluxo axial, como tipicamente encontrados nos motores a jato, são exemplos de compressores multiestágios. As bombas centrífugas são freqüentemente construídas com múltiplos estágios, numa única carcaça.

Ventiladores, sopradores, compressores e bombas são encontrados em vários tamanhos e tipos, desde unidades residenciais a unidades industriais, complexas, de grande capacidade. Os requisitos de torque e potência para bombas e turboventiladores idealizados podem ser analisados pela aplicação do princípio do momento da quantidade de movimento, ou princípio da quantidade de movimento angular, usando-se um volume de controle adequado.

As hélices são essencialmente dispositivos de fluxo axial que operam sem uma carcaça externa. Elas podem ser projetadas para operar em gases ou em líquidos. Como você poderia esperar, as hélices projetadas para aplicações muito diferentes são bastante distintas. As hélices marítimas tendem a ter pás largas comparadas com seus raios, dando-lhes elevada *solidez*. As hélices de aviões tendem a ter pás longas e delgadas, com baixa solidez, relativamente.

As máquinas que extraem energia de um fluido são chamadas *turbinas*. O conjunto de *pás*, *lâminas*, ou *conchas*, fixadas ao eixo da turbina, é chamado *rotor* ou *roda*. Nas *turbinas hidráulicas*, o fluido de trabalho é a água, de modo que o escoamento é incompressível. Nas *turbinas a gás* e nas *turbinas a vapor* a massa específica do fluido de trabalho pode variar significativamente.

As duas classificações mais gerais de turbinas são turbinas de *ação ou de impulsão* e *de reação*. As turbinas de impulsão são acionadas por um ou mais jatos livres de alta velocidade. Cada jato é acelerado num bocal externo à roda da turbina. Se o atrito e a gravidade forem desprezados, nem a pressão, nem a velocidade relativa ao rotor mudam enquanto o fluido passa sobre as conchas da turbina. Desse modo, numa turbina de impulsão, a aceleração do fluido e a queda de pressão decorrente ocorrem em bocais externos às pás, e o rotor não trabalha cheio de fluido.

Diversas turbinas hidráulicas típicas são mostradas esquematicamente na Fig. 10.3. O diagrama (*a*) mostra uma turbina de impulsão acionada por um único jato, que fica no plano do rotor da turbina. A água do jato atinge cada concha em sucessão, é defletida, e sai da concha com velocidade relativa aproximadamente oposta àquela com a qual entrou. A água usada cai no *coletor* (não mostrado).

Nas turbinas de reação, parte da variação de pressão do fluido ocorre externamente e a outra parte dentro das pás móveis. Ocorre aceleração externa e o fluxo é defletido para entrar no rotor na direção apropriada, à medida que passa por bocais ou pás estacionárias chamadas *pás de guia* ou *pás diretrizes*. Uma aceleração adicional do fluido relativa ao rotor ocorre dentro das pás móveis, de modo que tanto a velocidade relativa quanto a pressão da corrente mudam através do rotor. Como as turbi-

[1] A combinação de uma fileira de pás estacionárias com uma fileira de pás móveis é chamada estágio. (As pás estacionárias podem ser lâminas de guia montadas antes do rotor; mais comumente, elas são *lâminas anti-redemoinho* colocadas após o rotor.)

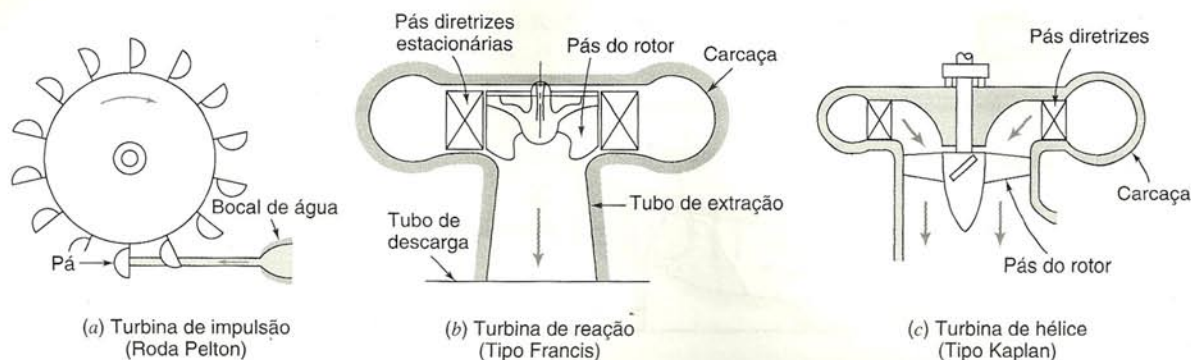



Fig. 10.3 Diagramas esquemáticos de turbinas hidráulicas típicas, adaptados de [2].

nas de reação trabalham cheias de fluido, elas podem, em geral, produzir mais potência para um dado tamanho do que as turbinas de impulsão.

Uma turbina de reação do tipo Francis é mostrada na Fig. 10.3*b*. A água que entra escoa circunferencialmente através da carcaça. Ela entra na periferia das pás de guia estacionárias e escoa na direção do rotor. A água entra no rotor quase radialmente e é defletida para baixo para sair aproximadamente na direção axial; a configuração do fluxo pode ser imaginada como a de uma bomba centrífuga ao contrário. A água saindo do rotor escoa através de um difusor conhecido como *tubo de extração* antes de entrar no coletor.

O diagrama (*c*) mostra uma turbina a hélice do tipo Kaplan. A entrada de água é similar à turbina Francis anteriormente descrita. Contudo, ela é defletida para escoar quase axialmente antes de encontrar o rotor da máquina. O fluxo saindo do rotor pode passar por um tubo de extração.

Desta maneira, as turbinas cobrem de simples moinhos de vento a turbinas complexas a vapor ou a gás, com muitos estágios de conjunto de pás cuidadosamente projetados. Esses dispositivos também podem ser analisados de forma idealizada pela aplicação do princípio do momento da quantidade de movimento.

Parâmetros adimensionais, tais como *velocidade específica*, *coeficiente de fluxo*, *coeficiente de torque*, *coeficiente de potência* e *razão de pressão*, freqüentemente são usados para caracterizar o desempenho das turbomáquinas. Esses parâmetros foram introduzidos no Cap. 7; seus desenvolvimentos e usos serão considerados em maior detalhe mais adiante, neste capítulo.

10.2 ABRANGÊNCIA

De acordo com Japikse [3], "turbomáquinas representam um mercado de US$ 400 bilhões (possivelmente muito mais) com um crescimento mundial enorme nesse momento. Estima-se que as bombas centrífugas industriais consumam 5% de toda energia produzida nos EUA". Portanto, o projeto apropriado, a construção, a seleção e a aplicação de bombas e compressores são economicamente significativos.

O projeto de máquinas reais envolve diversos conhecimentos técnicos, incluindo mecânica dos fluidos, materiais, mancais, selos e vibrações. Esses tópicos são abordados em numerosos textos especializados. O nosso objetivo aqui é apresentar somente detalhes suficientes para ilustrar a base analítica do projeto de escoamento de fluido e discutir brevemente as limitações e resultados obtidos por modelos analíticos simples. Para informações mais detalhadas de projeto, consulte as referências.

A engenharia de aplicações ou de "sistemas" requer vasta experiência. Boa parte dessa experiência deve ser ganha no campo, trabalhando com outros engenheiros. Nossa abordagem não pretende ser extensa; discutimos somente os aspectos mais importantes para a aplicação sistêmica, bem-sucedida, de bombas, compressores e turbinas.

Como afirmado anteriormente neste capítulo, nossa abordagem trata quase que exclusivamente de escoamentos incompressíveis. Mesmo com essa limitação, o material apresentado no Cap. 10 é intrinsecamente mais difícil do que os tópicos fundamentais considerados em capítulos anteriores, pois a maior parte dele envolve a integração de informações empíricas com a teoria. Em conseqüência, a apresentação de turbomáquinas não pode ser tão clara ou direta como os capítulos antecedentes que tratam de fundamentos.

10.3 ANÁLISE DE TURBOMÁQUINAS

O método de análise usado para turbomáquinas é escolhido de acordo com a informação desejada. Quando se quer informação geral sobre vazão, variação de pressão, torque e potência, deve ser usada uma análise de volume de controle finito. Caso se queira informações detalhadas a respeito de ângulos de pás ou perfis de velocidade, então elementos de pás individuais devem ser analisados, usando-se um volume de controle infinitesimal ou outro procedimento detalhado. Consideramos apenas processos de escoamento idealizados neste livro, e, dessa forma, nos concentramos na aproximação por volume de controle finito, aplicando o princípio da quantidade de movimento angular.

10.3.1 O Princípio da Quantidade de Movimento Angular

O princípio da quantidade de movimento angular ou do momento da quantidade de movimento foi aplicado a volumes de controle finitos no Cap. 4. O resultado foi a Eq. 4.47,

$$\vec{r} \times \vec{F}_S + \int_{\mathrm{VC}} \vec{r} \times \vec{g} \rho \, d\forall + \vec{T}_{\mathrm{eixo}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathrm{VC}} \vec{r} \times \vec{V} \rho \, d\forall + \int_{\mathrm{SC}} \vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.47)$$

Na próxima seção, a Eq. 4.47 é simplificada para a análise de turbomáquinas.

10.3.2 A Equação de Euler para Turbomáquinas

Para a análise de turbomáquinas, é conveniente escolher um volume de controle fixo abrangendo o rotor, a fim de avaliar o torque no eixo. Em primeira aproximação, os torques decorrentes de forças de superfícies podem ser ignorados. A força de campo gravitacional pode ser desprezada por simetria. Então, para escoamento permanente, a Eq. 4.47 torna-se

$$\vec{T}_{\text{eixo}} = \int_{\text{SC}} \vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (10.1a)$$

Vamos escrever essa equação na forma escalar, ilustrando a sua aplicação a máquinas de fluxo axial e radial.

Conforme mostrado na Fig. 10.4, selecionamos um volume de controle *fixo* que inclui um rotor genérico de uma turbomáquina. O sistema fixo de coordenadas é escolhido com o eixo z alinhado com o eixo de rotação da máquina. As componentes de velocidade idealizadas são mostradas na figura. Admite-se que o fluido entra no rotor na localização radial r_1, com velocidade absoluta uniforme $\vec{V}_1$; o fluido sai do rotor na localização radial r_2, com velocidade uniforme absoluta $\vec{V}_2$.

O integrando no lado direito da Eq. 10.1a é o produto de $\vec{r} \times \vec{V}$ pela vazão em massa em cada seção. Para escoamento uniforme entrando no rotor na seção ①, e saindo do rotor na seção ②, a Eq. 10.1a torna-se

$$T_{\text{eixo}} \hat{k} = (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1}) \dot{m} \hat{k} \qquad (10.1b)$$

ou, na forma escalar,

$$T_{\text{eixo}} = (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1}) \dot{m} \qquad (10.1c)$$

A Eq. 10.1c é a relação básica entre torque e momento da quantidade de movimento para todas as turbomáquinas. É freqüentemente chamada de *Equação de Euler para Turbomáquinas*.

Cada velocidade que aparece na Eq. 10.1c é a componente tangencial da velocidade absoluta do fluido cruzando a superfície de controle. As velocidades tangenciais são escolhidas como positivas quando no mesmo sentido da velocidade da pá, U. Essa convenção de sinal dá $T_{\text{eixo}} > 0$ para bombas, ventiladores, sopradores e compressores, e $T_{\text{eixo}} < 0$ para turbinas.

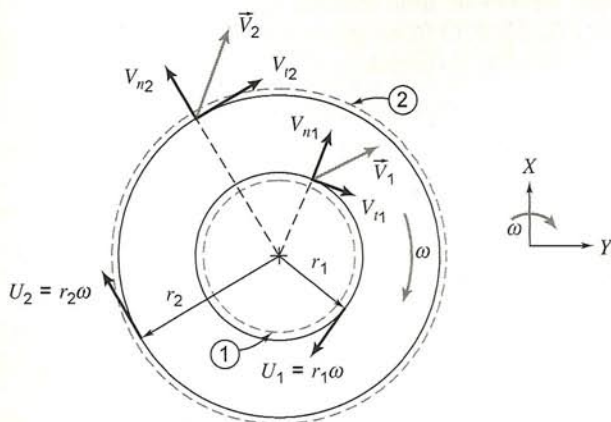



Fig. 10.4 Volume de controle finito e componentes da velocidade absoluta para análise de quantidade de movimento angular.

A taxa de trabalho realizado sobre um rotor de uma turbomáquina (a *potência mecânica,* $\dot{W}_m$) é dada pelo produto escalar da velocidade angular do rotor, $\vec{\omega}$, pelo torque aplicado, $\vec{T}_{\text{eixo}}$. Usando a Eq. 10.1b, obtemos

$$\dot{W}_m = \vec{\omega} \cdot \vec{T}_{\text{eixo}} = \omega \hat{k} \cdot T_{\text{eixo}} \hat{k} = \omega \hat{k} \cdot (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1}) \dot{m} \hat{k}$$

ou

$$\dot{W}_m = \omega T_{\text{eixo}} = \omega (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1}) \dot{m} \qquad (10.2a)$$

De acordo com a Eq. 10.2a, a quantidade de movimento angular do fluido é aumentada pela adição de trabalho no eixo. Para uma bomba, $\dot{W}_m > 0$ e a quantidade de movimento angular do fluido deve aumentar. Para uma turbina, $\dot{W}_m < 0$ e a quantidade de movimento angular do fluido deve diminuir.

A Eq. 10.2a pode ser escrita em duas outras formas úteis. Introduzindo $U = r\omega$, onde U é a velocidade tangencial do rotor no raio r, temos

$$\dot{W}_m = (U_2 V_{t_2} - U_1 V_{t_1}) \dot{m} \qquad (10.2b)$$

Dividindo a Eq. 10.2b por $\dot{m}g$, obtemos uma quantidade com as dimensões de comprimento, freqüentemente denominada *altura de carga*, ou *carga* simplesmente, adicionada ao escoamento.[2]

$$H = \frac{\dot{W}_m}{\dot{m}g} = \frac{1}{g}(U_2 V_{t_2} - U_1 V_{t_1}) \qquad (10.2c)$$

As Eqs. 10.1 e 10.2 são formas simplificadas da equação da quantidade de movimento angular para um volume de controle. Todas elas estão escritas para um volume de controle fixo com as suposições de escoamento permanente e uniforme em cada seção. As equações mostram que apenas a diferença no produto rV_t ou UV_t, entre as seções de saída e de entrada, é importante na determinação do torque aplicado ao rotor ou na transferência de energia para o fluido. Nenhuma restrição foi feita quanto à geometria; o fluido pode entrar e sair no mesmo ou em diferentes raios.

10.3.3 Diagramas de Velocidade

As equações que deduzimos também sugerem a importância de definirmos claramente as componentes de velocidade do fluido e do rotor nas seções de entrada e de saída. Para este fim, é útil desenvolver *diagramas de velocidade* (freqüentemente chamados de *polígonos de velocidade*) para os fluxos de entrada e de saída. A Fig. 10.5 mostra os diagramas de velocidade e introduz a notação para os ângulos da pá e do escoamento.

Na situação idealizada no ponto de projeto, o escoamento relativo ao rotor é admitido como entrando e saindo tangencialmente ao perfil da pá em cada seção. (Essa condição de entrada idealizada é algumas vezes chamada de escoamento de entrada *sem choque*.) Os ângulos da pá, β, são medidos a partir da direção circunferencial, conforme mostrado na Fig. 10.5*a*. O ângulo de entrada da pá, β_1, fixa a orientação da velocidade relativa de entrada nas condições de projeto.

[2] Desde que $\dot{W}_m$ tem dimensões de energia por unidade de tempo e $\dot{m}g$ é a vazão em peso por unidade de tempo, a *carga H*, é, na realidade, a energia adicionada por unidade de peso do fluido em escoamento.

(*a*) Velocidade absoluta como soma de velocidade relativa à pá e velocidade do rotor

(*b*) Componentes de velocidade na entrada

(*c*) Componentes de velocidade na saída

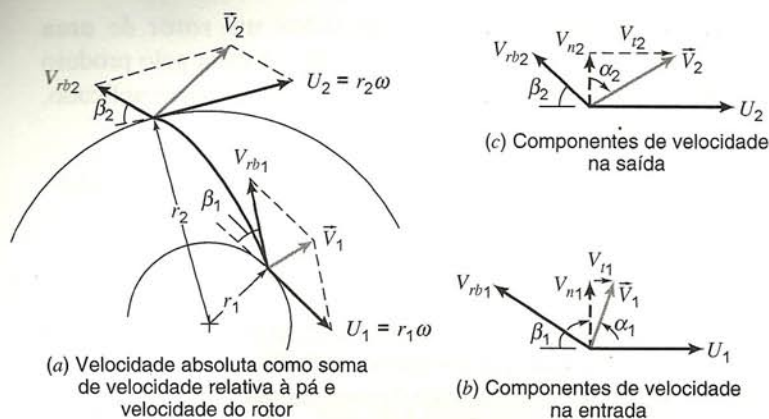



Fig. 10.5 Geometria e notação usadas para desenvolver diagramas de velocidade para máquinas típicas de fluxo radial.

A velocidade do rotor na entrada é $U_1 = \omega r_1$, e é, portanto, especificada pela geometria do impulsor e da velocidade de operação da máquina. A velocidade absoluta do fluido é a soma vetorial da velocidade do impulsor (velocidade de arrastamento, periférica ou circunferencial) e da velocidade do fluido relativa à pá. A velocidade absoluta de entrada $\vec{V}_1$ pode ser determinada graficamente, como mostrado na Fig. 10.5*b*. O ângulo da velocidade absoluta do fluido, α_1, é medido a partir da direção normal à área de escoamento, como mostrado.[3] A componente tangencial da velocidade absoluta, V_{t_1}, e a componente normal à área de escoamento, V_{n_1}, também são mostradas na Fig. 10.5*b*. Note, da geometria da figura, que, em cada seção, a componente normal da velocidade *absoluta*, V_n, e a componente normal da velocidade *relativa à pá*, V_{rb_n}, são iguais.

Quando o escoamento de entrada é livre de redemoinhos, a velocidade absoluta de entrada será puramente radial. O ângulo de entrada da pá pode ser especificado para a vazão de projeto e para a velocidade da bomba de modo a fornecer escoamento de entrada sem choque. O redemoinho, que pode estar presente no fluxo de entrada, ou introduzido pelas *pás de guia de entrada*, causa a divergência entre a direção absoluta do fluxo de entrada e a direção radial.

O diagrama de velocidade é construído de maneira similar na seção de saída. A velocidade do rotor na saída é $U_2 = \omega r_2$, a qual novamente é conhecida a partir da geometria e da velocidade de operação da turbomáquina. O fluxo relativo é admitido sair do impulsor tangencialmente às pás, como mostrado na Fig. 10.5*c*. Essa suposição idealizada de orientação perfeita fixa a direção do fluxo relativo de saída nas condições de projeto.

Para uma bomba centrífuga ou turbina de reação, a velocidade relativa à pá geralmente muda em magnitude da entrada para a saída. A equação da continuidade deve ser aplicada, usando a geometria do impulsor, para determinar a componente normal da velocidade em cada seção. A componente normal, junto com o ângulo de saída da pá, é suficiente para estabelecer a velocidade relativa à pá na saída do impulsor, para uma máquina de fluxo radial. O diagrama de velocidade é completado pela soma vetorial da velocidade relativa à pá com a velocidade do rotor, como mostrado na Fig. 10.5*c*.

Os diagramas de velocidade de entrada e de saída fornecem todas as informações necessárias para calcular o torque ou a potência ideal, absorvida ou entregue pelo impulsor, usando as Eqs. 10.1 ou 10.2. Os resultados representam o desempenho da turbomáquina sob condições ideais no ponto de operação de projeto, desde que admitamos que todos os fluxos são uniformes em cada seção e que entram e saem do rotor tangencialmente às pás. Esses resultados idealizados representam os limites superiores de desempenho para uma turbomáquina.

O desempenho de uma máquina real pode ser estimado usando a mesma aproximação básica, porém considerando variações nas propriedades do escoamento através da extensão da pá, nas seções de entrada e de saída, e desvios entre os ângulos das pás e as direções do escoamento. Tais cálculos detalhados estão além do escopo deste livro.

A alternativa é medir o desempenho global de uma máquina numa bancada de testes adequada. Dados de fabricantes são exemplos de informações de desempenho medido.

No Problema-Exemplo 10.1, o princípio da quantidade de movimento angular é aplicado a uma bomba centrífuga idealizada. No Problema-Exemplo 10.2, diagramas de velocidades são utilizados na análise de escoamento através de um ventilador de fluxo axial.

[3] A notação varia de livro para livro, portanto, seja cuidadoso quando comparar referências.

EXEMPLO 10.1 — Bomba Centrífuga Idealizada

Água a 150 gpm entra axialmente no impulsor de uma bomba centrífuga, através de uma entrada com diâmetro de 1,25 pol. A velocidade de entrada é axial e uniforme. O diâmetro de saída do impulsor é de 4 pol. O fluxo sai do impulsor a 10 pés/s em relação às pás radiais. A velocidade do impulsor é de 3450 rpm. Determine a largura de saída do impulsor, b_2, o torque entregue ao impulsor e a potência requerida predita pela equação de Euler para turbinas.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.1

DADOS: Escoamento conforme mostrado na figura: $V_{rb_2} = 10$ pés/s, $Q = 150$ gpm.

V_{rb2} $\vec{V}_2$ ωR_2 VC fixo $R_1 = 0{,}625$ pol. $R_2 = 2$ pol. r z $\omega = 3450$ rpm b_2

DETERMINAR: (a) b_2.
(b) T_{eixo}.
(c) $\dot{W}_m$.

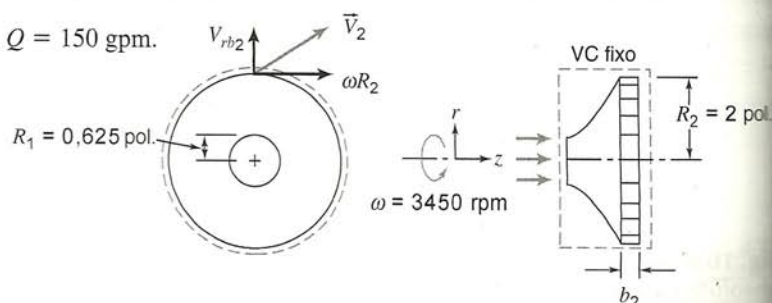
SOLUÇÃO:

Aplique a equação de quantidade de movimento angular a um volume de controle fixo.

Equações de cálculo:

$$\vec{T}_{\text{eixo}} = \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (10.1a)$$

$$= 0(2)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) Torques devidos às forças superficiais e de campo desprezíveis
(2) Escoamento permanente
(3) Escoamento uniforme nas seções de entrada e de saída
(4) Escoamento incompressível

Então, da continuidade,

$$0 = \{-|\rho V_1 \pi R_1^2|\} + \{|\rho V_{rb_2} 2\pi R_2 b_2|\}$$

ou

$$\rho Q = \rho V_{rb_2} 2\pi R_2 b_2$$

de modo que

$$b_2 = \frac{Q}{2\pi R_2 V_{rb_2}} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{150 \text{ gal}}{\text{min}} \times \frac{1}{2 \text{ pol.}} \times \frac{\text{s}}{10 \text{ pés}} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48 \text{ gal}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{12 \text{ pol.}}{\text{pé}}$$

$$b_2 = 0{,}0319 \text{ pé ou } 0{,}383 \text{ pol.} \qquad b_2$$

O fluxo axial de entrada não tem componente de quantidade de movimento angular na direção z. Da equação de quantidade de movimento angular com fluxo de saída uniforme,

$$\hat{k}_2 T_{\text{eixo}} = \vec{r}_2 \times \vec{V}_2\{|\rho Q|\}$$

Na seção ②, $\vec{r}_2 = R_2\hat{e}_r$, e $\vec{V}_2 = V_{rb_2}\hat{e}_r + \omega R_2 \hat{e}_\theta$, então,

$$\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 = R_2(\omega R_2)\hat{k} = \omega R_2^2 \hat{k}$$

Portanto,

$$T_{\text{eixo}} = \omega R_2^2 \rho Q = \frac{3450 \text{ rev}}{\text{min}} \times (2)^2 \text{pol}^2 \times \frac{1{,}94 \text{ slug}}{\text{pé}^3} \times \frac{150 \text{ gal}}{\text{min}}$$

$$\times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}^2}{3600 \text{ s}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48 \text{ gal}} \times \frac{\text{pé}^2}{144 \text{ pol.}^2} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}}$$

$$T_{\text{eixo}} = 6{,}51 \text{ pé} \cdot \text{lbf} \qquad T_{\text{eixo}}$$

e

$$\dot{W}_m = \omega T_{\text{eixo}} = \frac{3450 \text{ rev}}{\text{min}} \times 6{,}51 \text{ pé} \cdot \text{lbf} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550 \text{ pé} \cdot \text{lbf}}$$

$$\dot{W}_m = 4{,}28 \text{ hp} \qquad \dot{W}_m$$

{Esse problema ilustra a aplicação da equação da quantidade de movimento angular para um volume de controle fixo a uma máquina de fluxo centrífuga.}

EXEMPLO 10.2 — Ventilador de Fluxo Axial Idealizado

Um ventilador de fluxo axial opera a 1200 rpm. O diâmetro na ponta da pá é de 1,1 m e o diâmetro do cubo é de 0,8 m. Os ângulos de entrada e de saída da pá são de 30° e de 60°, respectivamente. Pás de guia de entrada dão ao fluxo absoluto que entra no primeiro estágio um ângulo de 30°. O fluido é ar na condição padrão e o escoamento pode ser considerado incompressível. Não há mudança na componente axial da velocidade através do rotor. Admita que o fluxo relativo entra e sai do rotor nos ângulos geométricos da pá e utilize as propriedades no raio médio da pá para os cálculos. Para essas condições idealizadas, desenhe o diagrama de velocidade de entrada, determine a vazão em volume do ventilador e esboce as formas das pás do rotor. Usando os dados assim obtidos, desenhe o diagrama de velocidade de saída e calcule a potência e o torque mínimos necessários para acionar o ventilador.

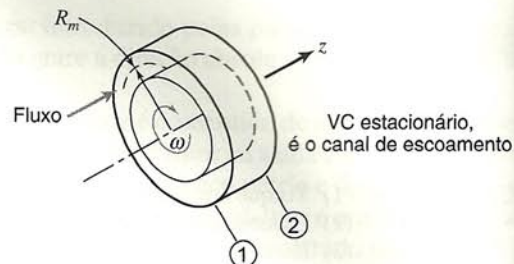
PROBLEMA-EXEMPLO 10.2

DADOS: Escoamento através do rotor de um ventilador de fluxo axial.

Diâmetro da ponta: 1,1 m
Diâmetro do cubo: 0,8 m

Velocidade de operação: 1200 rpm
Ângulo de entrada absoluto: 30°
Ângulo de entrada da pá: 30°
Ângulo de saída da pá: 60°

O fluido é ar na condição padrão. Use propriedades no diâmetro médio das pás.

R_m
z
Fluxo
ω
VC estacionário, é o canal de escoamento
①
②

DETERMINAR: **(a)** Diagrama de velocidade de entrada.
(b) Vazão em volume.
(c) Forma da pá do rotor.
(d) Diagrama de velocidade de saída.
(e) Torque no rotor.
(f) Potência requerida.

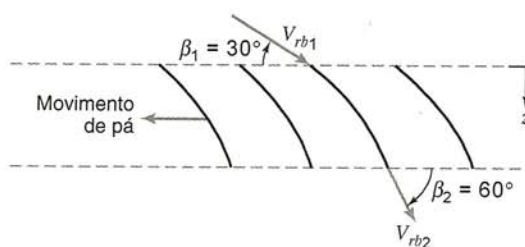
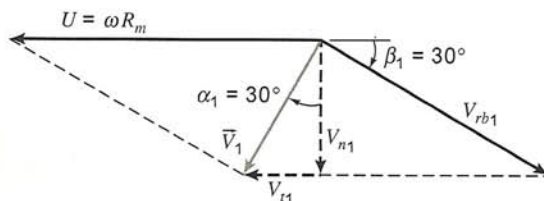
SOLUÇÃO:
Aplique a equação da quantidade de movimento angular a um volume de controle fixo.

Equações de cálculo:

$$\vec{T}_{\text{eixo}} = \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{10.1a}$$

$$= 0(2)$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

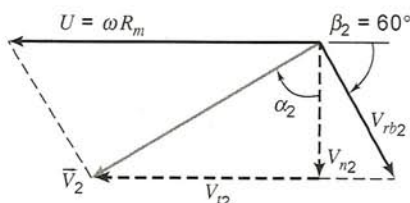
Considerações: (1) Os torques devidos às forças superficiais ou de massa são desprezíveis
(2) Escoamento permanente
(3) Escoamento uniforme nas seções de entrada e de saída
(4) Escoamento incompressível
(5) Não há variação na área de escoamento axial
(6) Use o raio médio das pás do rotor, R_m.

As formas da pá são

O diagrama de velocidade de entrada é

Da continuidade

$$0 = \{-|\rho V_{n_1} A_1|\} + \{|\rho V_{n_2} A_2|\}$$

ou

$$Q = V_{n_1} A_1 = V_{n_2} A_2$$

Como $A_1 = A_2$, então $V_{n_1} = V_{n_2}$, e o diagrama de velocidade de saída é conforme mostrado na seguinte figura:

No raio médio das pás,

$$U = R_m \omega = \frac{D_m}{2}\omega$$

$$U = \frac{\frac{1}{2}(1{,}1 + 0{,}8)\,\text{m}}{2} \times 1200\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\,\text{s}} = 59{,}7\ \text{m/s}$$

Da geometria do diagrama de velocidade de entrada,

$$U = V_{n_1}(\text{tg}\,\alpha_1 + \cot\beta_1)$$

de modo que,

$$V_{n_1} = \frac{U}{\text{tg}\,\alpha_1 + \cot\beta_1} = 59{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{\text{tg}\,30^\circ + \cot 30^\circ} = 25{,}9\ \text{m/s}$$

Conseqüentemente,

$$V_1 = \frac{V_{n_1}}{\cos\alpha_1} = 25{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{\cos 30^\circ} = 29{,}9\ \text{m/s}$$

$$V_{t_1} = V_1 \,\text{sen}\,\alpha_1 = 29{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \text{sen}\,30^\circ = 15{,}0\ \text{m/s}$$

e

$$V_{rb_1} = \frac{V_{n_1}}{\text{sen}\,\beta_1} = 25{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{\text{sen}\,30^\circ} = 51{,}8\ \text{m/s}$$

A vazão em volume é

$$Q = V_{n_1}A_1 = \frac{\pi}{4}V_{n_1}(D_t^2 - D_h^2) = \frac{\pi}{4} \times 25{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}[(1{,}1)^2 - (0{,}8)^2]\ \text{m}^2$$

$$Q = 11{,}6\ \text{m}^3/\text{s} \quad \longleftarrow \quad Q$$

Da geometria do diagrama de velocidade de saída,

$$\text{tg}\,\alpha_2 = \frac{V_{t_2}}{V_{n_2}} = \frac{U - V_{n_2}\cot\beta_2}{V_{n_2}} = \frac{U - V_{n_1}\cot\beta_2}{V_{n_1}}$$

ou

$$\alpha_2 = \text{tg}^{-1}\left[\frac{59{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 25{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cot 60^\circ}{25{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\right] = 59{,}9^\circ$$

e

$$V_2 = \frac{V_{n_2}}{\cos\alpha_2} = \frac{V_{n_1}}{\cos\alpha_2} = 25{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{\cos 59{,}9^\circ} = 51{,}6\ \text{m/s}$$

Finalmente,

$$V_{t_2} = V_2\,\text{sen}\,\alpha_2 = 51{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \text{sen}\,59{,}9^\circ = 44{,}6\ \text{m/s}$$

A equação da quantidade de movimento angular torna-se

$$\vec{T} = T_z\hat{k} = \int_{SC} \vec{R}_m \times \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \hat{k}\int_{SC} R_m V_t \rho \vec{V}\cdot d\vec{A}$$

de modo que, para escoamento uniforme,

$$T_z = R_m V_{t_1}\{-|\rho V_{n_1}A_1|\} + R_m V_{t_2}\{|\rho V_{n_2}A_2|\} = \rho Q R_m (V_{t_2} - V_{t_1})$$

$$= 1{,}23\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 11{,}6\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \times \frac{0{,}95\ \text{m}}{2} \times (44{,}6 - 15{,}0)\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$T_z = 201\ \text{N}\cdot\text{m} \quad \longleftarrow \quad T_z$$

Assim, o torque *sobre* o VC tem o mesmo sentido que $\vec{\omega}$. A potência requerida é

$$\dot{W}_m = \vec{\omega}\cdot\vec{T} = \omega_z T_z = 1200\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\,\text{s}} \times 201\ \text{N}\cdot\text{m} \times \frac{\text{W}\cdot\text{s}}{\text{N}\cdot\text{m}}$$

$$\dot{W}_m = 25{,}3\ \text{kW} \quad \longleftarrow \quad \dot{W}_m$$

Esse problema ilustra a construção de diagramas de velocidade e a aplicação da equação da quantidade de movimento angular para um volume de controle fixo a uma máquina de fluxo axial, sob condições idealizadas.

A Fig. 10.5 representa o escoamento através de um impulsor simples de bomba centrífuga. Se o fluido entrar no impulsor com uma velocidade absoluta puramente radial ele não terá quantidade de movimento angular e V_{t_1} é identicamente zero.

Com $V_{t_1} = 0$, o aumento em altura de carga (da Eq. 10.2c) é dado por

$$H = \frac{U_2 V_{t_2}}{g} \tag{10.3}$$

Do diagrama de velocidade de saída da Fig. 10.5*c*,

$$V_{t_2} = U_2 - V_{rb_2}\cos\beta_2 = U_2 - \frac{V_{n_2}}{\operatorname{sen}\beta_2}\cos\beta_2 = U_2 - V_{n_2}\cot\beta_2 \tag{10.4}$$

Então,

$$H = \frac{U_2^2 - U_2 V_{n_2}\cot\beta_2}{g} \tag{10.5}$$

Para um impulsor de largura w, a vazão em volume é

$$Q = \pi D_2 w V_{n_2} \tag{10.6}$$

Para expressar o aumento de altura de carga em termos de vazão em volume, substituímos V_{n_2} em termos de Q a partir da Eq. 10.6. Dessa forma,

$$H = \frac{U_2^2}{g} - \frac{U_2\cot\beta_2}{\pi D_2 w g}Q \tag{10.7a}$$

A Eq. 10.7a é da forma

$$H = C_1 - C_2 Q \tag{10.7b}$$

onde as constantes C_1 e C_2 são funções da geometria da máquina e da velocidade,

$$C_1 = \frac{U_2^2}{g} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{U_2\cot\beta}{\pi D_2 w g}$$

Assim, a Eq. 10.7a prevê uma variação linear da altura de carga, H, com a vazão em volume, Q.

A constante $C_1 = U_2^2/g$ representa a altura de carga ideal desenvolvida pela bomba para vazão em volume zero; isso é denominado *altura* de *carga de bloqueio*. A inclinação da curva de altura de carga *versus* vazão em volume (a curva $H - Q$) depende do sinal e da magnitude de C_2.

Para pás de saída radiais, $\beta_2 = 90°$ e $C_2 = 0$. A componente tangencial da velocidade absoluta na saída é igual à velocidade do rotor e é independente da vazão. Da Eq. 10.7a, a altura de carga ideal é independente da vazão. Esta curva característica $H - Q$ está traçada na Fig. 10.6.

Se as aletas forem *curvadas para trás* (como mostrado na Fig. 10.5*a*), $\beta_2 < 90°$ e $C_2 > 0$. Então, a componente tangencial da velocidade absoluta de saída é menor do que a velocidade do rotor e diminui em proporção à vazão. Da Eq. 10.7a, a altura de carga ideal diminui linearmente com o aumento da vazão. A curva $H - Q$ correspondente está traçada na Fig. 10.6.

Se as pás forem *curvadas para frente*, então $\beta_2 > 90°$ e $C_2 < 0$. A componente tangencial da velocidade absoluta do fluido na saída é maior do que a velocidade do rotor e aumenta com o aumento da vazão. Da Eq. 10.7a, a altura de carga ideal aumenta linearmente com o aumento da vazão. A curva $H - Q$ correspondente está traçada na Fig. 10.6.

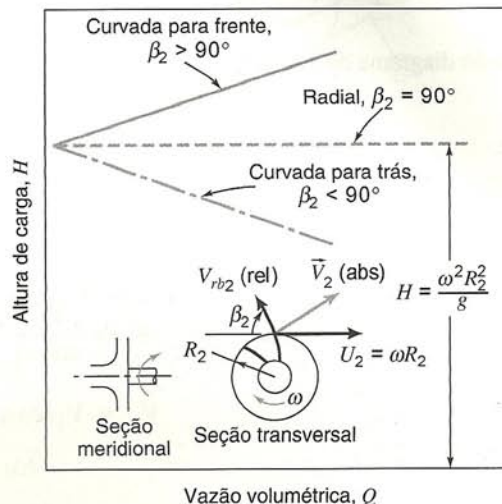



Fig. 10.6 Relacionamento idealizado entre altura de carga e vazão em volume para uma bomba centrífuga com pás do impulsor curvadas para frente, radiais e curvadas para trás.

As características de uma máquina de fluxo radial podem ser alteradas mudando-se o ângulo de saída das pás; o modelo idealizado prevê as tendências à medida que o ângulo de saída das pás é variado.

As previsões da teoria idealizada da quantidade de movimento angular, para uma bomba centrífuga, estão resumidas na Fig. 10.6. Pás curvadas para frente quase nunca são utilizadas na prática porque elas tendem a ter um ponto de operação instável.

10.3.4 Potência Hidráulica

O torque e a potência preditos pela aplicação da equação da quantidade de movimento angular ao rotor de uma turbomáquina (Eqs. 10.1c e 10.2a) são valores idealizados. Na prática, a potência do rotor e a taxa de variação da energia do fluido não são iguais. A *transferência* de energia entre o rotor e o fluido causa perdas por efeitos viscosos, desvios de escoamento uniforme e desvios de direção do fluxo em relação aos ângulos das pás. A *transformação* de energia cinética em aumento de pressão pela dispersão do fluido em um invólucro fixo introduz mais perdas. *Dissipação* de energia ocorre em selos e mancais e no atrito do fluido entre o rotor e a carcaça. A aplicação da primeira lei da termodinâmica ao volume de controle envolvendo o rotor mostra que essas "perdas" na energia mecânica são conversões irreversíveis de energia mecânica em energia térmica. Da mesma forma que no caso de escoamento em tubos discutido no Cap. 8, a energia térmica aparece ou sob a forma de energia interna na corrente de fluido ou como calor transferido para o ambiente.

Por causa dessas perdas, a potência real entregue ao fluido por uma bomba é menor do que a prevista pela equação de quanti-

dade de movimento angular. No caso de uma turbina, a potência real entregue ao eixo é menor do que a potência fornecida pela corrente de fluido.

Para uma bomba, a *potência hidráulica* é definida como a taxa de energia mecânica recebida pela corrente de fluido em escoamento,

$$\dot{W}_h = \rho Q g H_p \tag{10.8a}$$

onde

$$H_p = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\bar{V}^2}{2g} + z\right)_{\text{descarga}} - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\bar{V}^2}{2g} + z\right)_{\text{sucção}} \tag{10.8b}$$

Para uma bomba, o aumento de carga medido numa bancada de testes é menor do que aquele produzido pelo impulsor. A taxa de energia mecânica recebida é maior do que a taxa de aumento de carga produzida pelo impulsor. A potência mecânica necessária para acionar a bomba é relacionada à potência hidráulica pela seguinte definição de eficiência de bomba

$$\eta_p = \frac{\dot{W}_h}{\dot{W}_m} = \frac{\rho Q g H_p}{\omega T} \tag{10.8c}$$

Para avaliar a variação real na altura de carga através da máquina a partir da Eq. 10.8b, nós devemos conhecer a pressão, a velocidade e a elevação do fluido nas duas seções de medição. A velocidade do fluido pode ser calculada a partir da vazão volumétrica e dos diâmetros de passagem medidos. (Linhas de descarga e de sucção para bombas têm, em geral, diâmetros diferentes.)

A pressão estática é geralmente medida em trechos retos de tubos a montante da entrada da bomba e a jusante da saída da bomba. A elevação de cada manômetro pode ser registrada, ou as leituras de pressão estática podem ser corrigidas para a mesma elevação. (A linha de centro da bomba provê um conveniente nível de referência.)

Para uma turbina hidráulica, a potência hidráulica é definida como a taxa de energia mecânica retirada da corrente de fluido em escoamento,

$$\dot{W}_h = \rho Q g H_t \tag{10.9a}$$

onde

$$H_t = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\bar{V}^2}{2g} + z\right)_{\text{entrada}} - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\bar{V}^2}{2g} + z\right)_{\text{saída}} \tag{10.9b}$$

Para uma turbina hidráulica, a potência liberada pelo rotor (a potência mecânica) é menor do que a taxa de energia transferida do fluido para o rotor, porque o rotor tem que superar perdas de atritos mecânico e viscoso.

A potência mecânica fornecida por uma turbina é relacionada à potência hidráulica pela seguinte definição de eficiência de turbina

$$\eta_t = \frac{\dot{W}_m}{\dot{W}_h} = \frac{\omega T}{\rho Q g H_t} \tag{10.9c}$$

A Eq. 10.9b mostra que para se obter potência máxima de uma turbina hidráulica, é importante minimizar a energia mecânica do escoamento na saída da turbina. Isso é realizado fazendo-se a pressão, a velocidade e a elevação do fluido na saída da turbina tão pequenos quanto possível. A turbina deve ser montada no nível mais próximo possível do nível do rio a jusante, observando que esse nível pode subir com as enchentes. Testes para medir eficiência de turbina podem ser realizados para vários níveis de potência produzida e para diferentes condições de carga constante (veja a discussão das Figs. 10.12 e 10.13).

As tendências preditas pela teoria idealizada da quantidade de movimento angular são comparadas com resultados experimentais na próxima seção.

10.4 CARACTERÍSTICAS DE DESEMPENHO

Para especificar máquinas de fluxo para sistemas de escoamento, o projetista deve conhecer o aumento de pressão (ou altura de carga), torque, requisito de potência e eficiência de uma máquina. Para uma dada máquina, cada uma dessas características é uma função da vazão; as características para máquinas similares dependem do tamanho e da velocidade de operação. Nesta seção definimos características de desempenho para bombas e turbinas, e revisamos tendências medidas experimentalmente para máquinas típicas. Discutimos parâmetros adimensionais a fim de ilustrar as semelhanças entre famílias de máquinas e as tendências nas características de projeto como funções da vazão em volume e do aumento de altura de carga. Revisamos as leis de escala e apresentamos exemplos para ilustrar seu emprego. A seção é encerrada com uma discussão sobre cavitação e a altura de carga líquida que deve estar disponível na admissão da bomba, a fim de assegurar uma operação satisfatória, livre de cavitação.

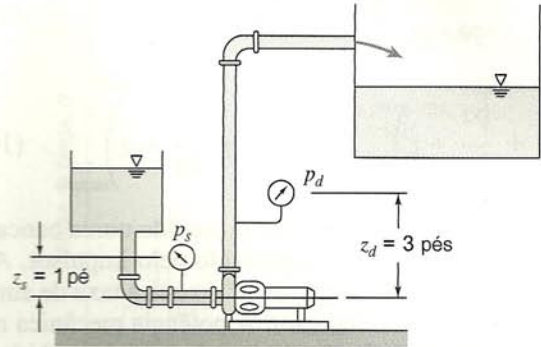
10.4.1 Parâmetros de Desempenho

As análises idealizadas apresentadas na Seção 10.3 são úteis para prever tendências e para determinar, em primeira aproximação, o desempenho do ponto de projeto de uma máquina consumidora ou produtora de energia. Contudo, o desempenho completo de uma máquina real, incluindo a operação em condições fora de projeto, deve ser determinado experimentalmente.

Para determinar o desempenho, uma bomba, ventilador, soprador ou compressor deve ser montado numa bancada de testes instrumentalizada, com capacidade de medir vazão, velocidade, torque de entrada e aumento de pressão. O teste deve ser realizado de acordo com um procedimento normalizado, correspondente à máquina em teste [4, 5]. Medições são feitas enquanto a vazão é variada desde o bloqueio (vazão zero) até a descarga máxima. A potência absorvida pela máquina é determinada a partir de um motor calibrado ou calculada a partir da velocidade e do torque medidos; em seguida, a eficiência é calculada conforme ilustrado no Problema-Exemplo 10.3. Finalmente, as características calculadas são plotadas nas unidades desejadas ou adimensionalmente. Se apropriado, curvas suaves podem ser ajustadas através dos pontos plotados; ou então, curvas de regressão podem ser aplicadas aos resultados, como ilustrado no Problema-Exemplo 10.4.

EXEMPLO 10.3 — Cálculo de Características de Bomba a Partir de Dados de Teste

O sistema de escoamento empregado no teste de uma bomba centrífuga à velocidade nominal de 1750 rpm é mostrado na figura. O líquido é água a 80°F e os diâmetros dos tubos de aspiração e de descarga são de 6 pol. Os dados medidos durante o teste são apresentados na tabela. O motor é de 460 V, trifásico, tem fator de potência 0,875 e uma eficiência constante de 90%.

Vazão (gpm)	Pressão de Sucção (psig)	Pressão de Descarga (psig)	Corrente do Motor (amp)
0	0,65	53,3	18,0
500	0,25	48,3	26,2
800	−0,35	42,3	31,0
1000	−0,92	36,9	33,9
1100	−1,24	33,0	35,2
1200	−1,62	27,8	36,3
1400	−2,42	15,3	38,0
1500	−2,89	7,3	39,0

Calcule a altura de carga líquida e a eficiência da bomba para uma vazão volumétrica de 1000 gpm. Plote a altura de carga da bomba, potência e eficiência como funções da vazão em volume.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.3

DADOS: Sistema de teste de bomba e dados mostrados.

DETERMINAR: (a) Altura de carga da bomba e eficiência para $Q = 1000$ gpm.
(b) Altura de carga da bomba, potência elétrica e eficiência da bomba em função da vazão em volume. Plote os resultados.

SOLUÇÃO:

Equação de cálculo:

$$\dot{W}_h = \rho Q g H_p \qquad \eta_p = \frac{\dot{W}_h}{\dot{W}_m} = \frac{\rho Q g H_p}{\omega T}$$

$$H_p = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\bar{V}^2}{2g} + z\right)_d - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\bar{V}^2}{2g} + z\right)_s$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento uniforme em cada seção
(3) $\bar{V}_2 = \bar{V}_1$
(4) Todas as alturas de carga corrigidas para a mesma cota

Desde que $\bar{V}_2 = \bar{V}_1$, a altura de carga da bomba é

$$H_p = \frac{1}{g}\left[\left(\frac{p}{\rho} + gz\right)_d - \left(\frac{p}{\rho} + gz\right)_s\right] = \frac{p_2 - p_1}{\rho g}$$

onde as pressões de descarga e de sucção, corrigidas para a mesma elevação, são designadas por p_2 e p_1, respectivamente.

Corrija as pressões estáticas medidas para a linha de centro da bomba:

$$p_1 = p_s + \rho g z_s$$

$$p_1 = \frac{-0{,}92\ \text{lbf}}{\text{pol}^2} + \frac{1{,}94\ \text{slug}}{\text{pé}^3} \times \frac{32{,}2\ \text{pé}}{\text{s}^2} \times 1{,}0\ \text{pé} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}} \times \frac{\text{pé}^2}{144\ \text{pol}^2} = -0{,}49\ \text{psig}$$

e

$$p_2 = p_d + \rho g z_d$$

$$p_2 = \frac{36{,}9\ \text{lbf}}{\text{pol}^2} + \frac{1{,}94\ \text{slug}}{\text{pé}^3} \times \frac{32{,}2\ \text{pé}}{\text{s}^2} \times 3{,}0\ \text{pé} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pé}} \times \frac{\text{pé}^2}{144\ \text{pol}^2} = 38{,}2\ \text{psig}$$

Calcule a altura de carga da bomba:

$$H_p = (p_2 - p_1)/\rho g$$

$$H_p = \frac{[38{,}2 - (-0{,}49)]\ \text{lbf}}{\text{pol}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{1{,}94\ \text{slug}} \times \frac{\text{s}^2}{32{,}2\ \text{pé}} \times \frac{144\ \text{pol}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{slug} \cdot \text{pé}}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2} = 89{,}2\ \text{pés}$$

H_p

Calcule a potência hidráulica entregue ao fluido:

$$\dot{W}_h = \rho Q g H_p = Q(p_2 - p_1)$$

$$= \frac{1000 \text{ gal}}{\text{min}} \times \frac{[38{,}2 - (-0{,}49)] \text{ lbf}}{\text{pol}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48 \text{ gal}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{144 \text{ pol}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550 \text{ pé} \cdot \text{lbf}}$$

$$\dot{W}_h = 22{,}6 \text{ hp}$$

Calcule a potência de saída do motor (potência mecânica fornecida à bomba) a partir de informações elétricas:

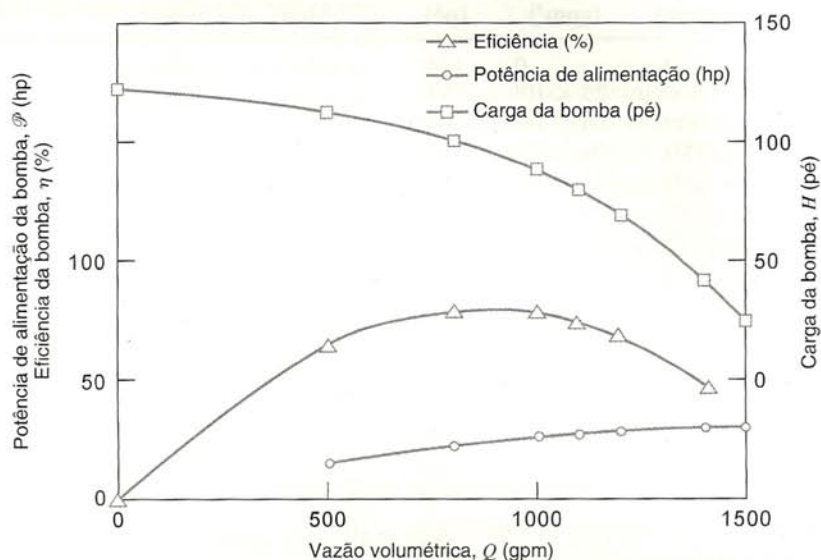
$$\mathcal{P}_{\text{entrada}} = \eta \sqrt{3}(PF)EI$$

$$\mathcal{P}_{\text{entrada}} = 0{,}90 \times \sqrt{3} \times 0{,}875 \times 460 \text{ V} \times 33{,}9 \text{ A} \times \frac{\text{W}}{\text{VA}} \times \frac{\text{hp}}{746 \text{ W}} = 28{,}5 \text{ hp}$$

A correspondente eficiência da bomba é

$$\eta_p = \frac{\dot{W}_h}{\dot{W}_m} = \frac{22{,}6 \text{ hp}}{28{,}5 \text{ hp}} = 0{,}793 \quad \text{ou} \quad 79{,}3 \text{ porcento}$$

η_p

Os resultados de cálculos similares para outras vazões estão plotados abaixo:

Esse problema ilustra o procedimento de redução de dados medidos a fim de obter a curva de desempenho de uma bomba.

Os resultados calculados e plotados nesse exemplo são típicos para uma bomba centrífuga movida a velocidade constante. O aumento de pressão é máximo na condição de bloqueio (*shutoff*, vazão volumétrica zero); o aumento de pressão através da bomba decresce com o aumento da vazão. A potência absorvida pela bomba aumenta com a vazão volumétrica; o aumento em geral é não linear. A eficiência da bomba é zero na condição de bloqueio, sobe até atingir um máximo com o aumento da vazão e cai em seguida para vazões maiores. A eficiência permanece bem próxima de seu valor máximo para uma certa faixa de vazões (nesse caso, em torno de 800 a 1100 gpm).

Os cálculos nesse exemplo são bastante simplificados porque a eficiência do motor que aciona a bomba é considerada constante. Na prática, é necessário usar ou um motor calibrado cuja eficiência seja conhecida para uma faixa de correntes de alimentação ou um motor em berço para medir a velocidade de rotação e o torque do motor da bomba, medidas essas que permitirão calcular a potência cedida para a bomba.

O procedimento básico para calcular desempenho de máquina foi ilustrado para uma bomba centrífuga no Problema-Exemplo 10.3. A diferença entre as pressões estáticas da aspiração e da descarga foi usada para calcular o aumento de carga produzido pela bomba. Para bombas, a pressão dinâmica é tipicamente uma pequena fração do aumento de carga desenvolvido, de forma que pode ser desprezada quando comparada com o aumento de carga.

Os procedimentos de teste e de redução de dados para ventiladores, sopradores e compressores são basicamente os mesmos que para bombas centrífugas. Contudo, sopradores, e especialmente ventiladores, adicionam alturas relativamente pequenas de carga aos fluxos de vapor ou gás. Para essas máquinas, a carga dinâmica pode aumentar da entrada para a descarga, e pode ser apreciável em comparação com o aumento de carga estática. Por essa razão é preciso enunciar claramente as bases sobre as quais os cálculos de desempenho são feitos. Existem definições padronizadas para eficiência de máquina baseadas no aumento da pressão estática de entrada para a pressão estática de saída ou no aumento da pressão estática de entrada para a pressão total de saída [6].

EXEMPLO 10.4 — Ajuste por Curva dos Dados de Desempenho de uma Bomba

No Problema-Exemplo 10.3, dados de teste de bomba foram fornecidos e o desempenho foi calculado. Ajuste uma curva parabólica, $H = H_0 - AQ^2$, a esses resultados de desempenho calculado de bomba e compare a curva ajustada com os valores medidos.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.4

DADOS: Dados de teste e de desempenho calculados no Problema-Exemplo 10.3.

DETERMINAR: (a) Curva parabólica, $H = H_0 - AQ^2$, ajustada aos dados de desempenho da bomba.
(b) Comparação da curva com o desempenho calculado.

SOLUÇÃO:

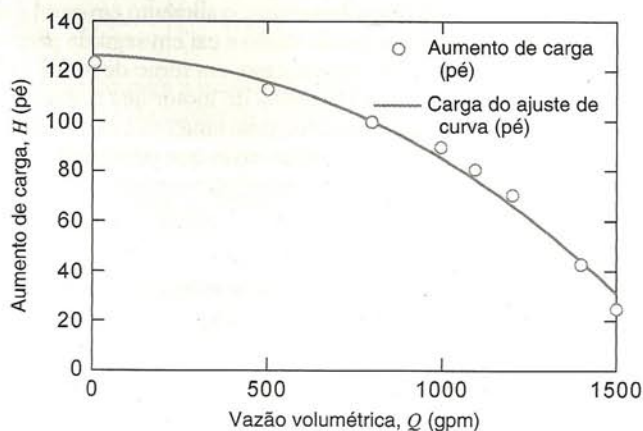
O ajuste por curva pode ser obtido através de uma curva linear de H *versus* Q^2. Organizando em tabela,

Do desempenho calculado:			Do ajuste de curva:	
Q (gpm)	Q^2 (gpm²)	H (pé)	H (pé)	Erro (%)
0	0	124	127	2,8
500	25×10^4	113	117	3,1
800	64×10^4	101	100	−0,5
1000	100×10^4	89,5	84,9	−5,4
1100	121×10^4	81,2	76,0	−6,8
1200	144×10^4	70,0	66,2	−5,7
1400	196×10^4	43,0	44,2	2,8
1500	225×10^4	25,6	31,9	19,9
		Intercepto =		127,3
		Inclinação =		$-4,24 \times 10^{-5}$
		r^2 =		0,984

Usando o método dos mínimos quadrados, a equação da curva ajustada é obtida como

$$H \text{ (pé)} = 1,27 - 4,24 \times 10^{-5} [Q \text{ (gpm)}]^2$$

com o coeficiente de determinação $r^2 = 0,984$.

Compare sempre os resultados da curva ajustada com os dados usados para desenvolver o ajuste. A figura mostra a curva ajustada (linha cheia) e os valores experimentais (os pontos).

O gráfico confirma que, como mostrado na tabela anterior, as porcentagens de erro são pequenas, exceto para o ponto de 1500 gpm. As diferenças entre a curva ajustada e os valores experimentais são pequenas.

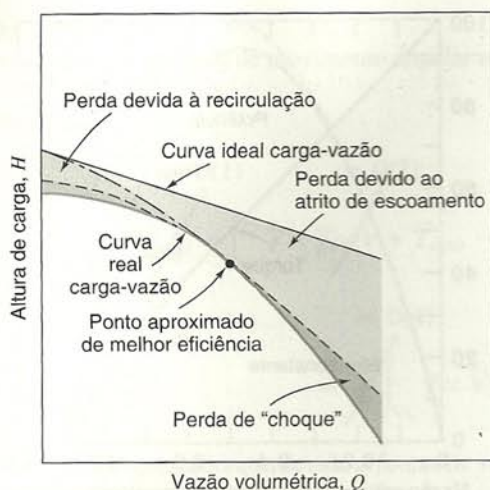



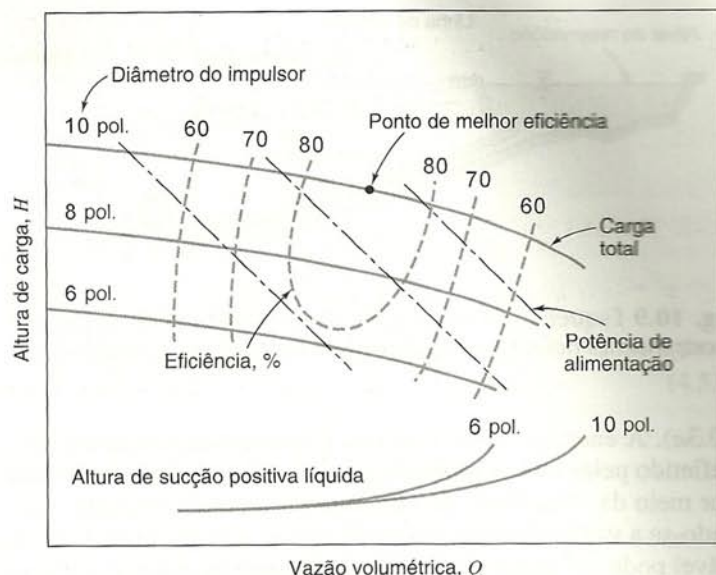
Fig. 10.7 Comparação das curvas de carga-vazão ideal e real para uma bomba centrífuga com pás do impulsor curvadas para trás [8].

Fig. 10.8 Curvas típicas de desempenho de bombas, obtidas de testes com três diâmetros de impulsor a velocidade constante [8].

Curvas características típicas de uma bomba centrífuga testada a velocidade constante foram mostradas qualitativamente na Fig. 7.4;[4] a curva de altura de carga *versus* capacidade está reproduzida na Fig. 10.7 para fins de comparação com as características previstas pela análise idealizada. A Fig. 10.7 mostra que a altura de carga, para qualquer vazão na máquina real, pode ser significativamente inferior àquela predita pela análise idealizada. Algumas das causas são:

1. Para vazões muito baixas, uma certa quantidade de fluido recircula no impulsor.
2. Perdas por atrito e por vazamentos aumentam com a vazão.
3. "Perdas por choque" resultam de divergência entre a direção da velocidade relativa e a direção da tangente à pá do impulsor na entrada.[5]

Curvas como aquelas nas Figs. 7.4 e 10.7 são medidas a velocidade constante com um único diâmetro de impulsor. É prática comum variar a capacidade da bomba mudando o tamanho do impulsor numa dada carcaça. A fim de apresentar informações de forma compacta, os dados de testes de diversos diâmetros de impulsores podem ser plotados num único gráfico, conforme mostrado na Fig. 10.8. Como antes, para cada diâmetro, a carga é traçada contra a vazão; cada curva é rotulada com o diâmetro correspondente. Os contornos de eficiência são traçados unindo-se os pontos de mesma eficiência constante. Os contornos para requisitos de potência também são traçados. Finalmente, os requisitos de *NPSH* são mostrados para os diâmetros extremos; na Fig. 10.8, a curva do impulsor de 8 pol. ficaria entre as curvas para os impulsores de 6 pol. e de 10 pol.

Para essa máquina típica, a altura de carga é máxima no bloqueio e decresce continuamente à medida que a vazão aumenta. A potência absorvida é mínima no bloqueio e aumenta com o aumento da vazão. Conseqüentemente, para minimizar a carga de partida, pode ser aconselhável acionar a bomba com a válvula de descarga fechada. (Entretanto, a válvula não deve ficar fechada por muito tempo, sob pena de sobreaquecimento da bomba à medida que a energia dissipada por atrito transfere-se para a água na carcaça.) A eficiência da bomba aumenta com a capacidade até que o *ponto de melhor eficiência* (PME ou BEP — B*est* E*fficiency* P*oint*) seja alcançado; em seguida, cai com o aumento subseqüente da vazão. Para um mínimo de consumo de energia, convém operar tão próximo do PME quanto possível.

As bombas centrífugas podem ser combinadas em paralelo para fornecer maior vazão ou em série para fornecer maior altura de carga. Diversos fabricantes constroem bombas de estágios múltiplos, que são essencialmente várias bombas arranjadas em série numa só carcaça. Bombas e sopradores são usualmente testados para diversas velocidades constantes. A prática comum é acionar as máquinas com motores elétricos a velocidade aproximadamente constante, porém, em alguns sistemas, expressivas economias de energia podem ser obtidas com operação a velocidade variável. Esses tópicos de aplicação de bombas são abordados na Seção 10.5.

O procedimento de teste para turbinas é similar ao de bombas, exceto que um dinamômetro é empregado para absorver a potência produzida pela turbina, enquanto a velocidade e o torque são medidos. Turbinas são construídas geralmente para operar a uma velocidade constante que é uma fração ou um múltiplo da freqüência de potência elétrica. Dessa forma, os testes de turbinas são conduzidos a velocidade constante sob carga variável, enquanto simultaneamente mede-se o consumo de água e calcula-se a eficiência.

A turbina de impulsão é uma turbomáquina relativamente simples e, por isso, vamos usá-la para ilustrar resultados típicos de testes. As turbinas de impulsão são escolhidas quando a altura de carga disponível excede cerca de 300 m. A maioria das turbinas de impulsão usadas hoje em dia são versões melhoradas da *roda Pelton* desenvolvida na década de 1880 pelo engenheiro de minas americano Lester Pelton [9]. Uma turbina de impulsão é suprida com água com altura de carga elevada por meio de um longo duto chamado *tubo de adução*. A água é acelerada através de um bocal e descarregada como um jato livre de alta velocidade à pressão atmosférica. O jato choca-se contra pás em forma de concha montadas nas bordas de uma roda giratória (Fig.

[4] A única característica importante não mostrada na Fig. 7.4 é a altura de sucção positiva disponível (*NPSH* — N*et* P*ositive* S*uction* H*ead*) requerida para prevenir cavitação. Cavitação e *NPSH* serão abordados na Seção 10.4.4.

[5] Essa perda é maior para vazão alta e para vazão baixa; ela cai essencialmente a zero quando as condições de operação aproximam-se das condições ótimas [7].

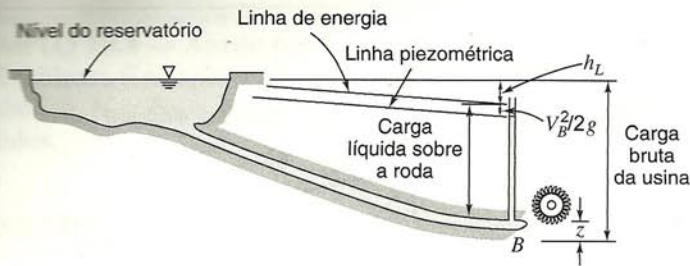



Fig. 10.9 Esquema de instalação de uma turbina de impulsão, mostrando as definições de alturas de carga bruta e líquida [7].

Fig. 10.10 Desempenhos ideal e real a velocidade variável para uma turbina de impulsão [10].

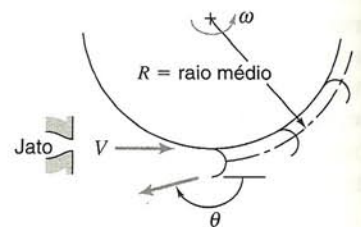
10.3*a*). A energia cinética do jato é transferida enquanto ele é defletido pelas pás. A potência gerada pela turbina é controlada por meio da velocidade do jato essencialmente constante, variando-se a vazão da água atingindo as pás. Um bocal de área variável pode ser usado para fazer mudanças pequenas e graduais na potência produzida. Mudanças mais rápidas ou maiores devem ser obtidas por meio de defletores de jato, ou bocais auxiliares, para evitar variações súbitas na velocidade do escoamento e as altas pressões resultantes no tubo de adução. A água descarregada da roda, a velocidade relativamente baixa, cai dentro do coletor. O nível do coletor é ajustado de modo a evitar o alagamento da roda durante as enchentes. Quando grande quantidade de água está disponível, potência adicional pode ser obtida pela conexão de duas rodas a um único eixo ou fazendo-se um arranjo para que dois ou mais jatos atinjam uma única roda.

A Fig. 10.9 ilustra a instalação de uma turbina de impulsão e as definições de altura de carga bruta e líquida [7]. A *altura de carga bruta* disponível é a diferença entre os níveis do reservatório de suprimento e do coletor. A *altura de carga efetiva* ou *líquida*, H, usada para calcular eficiência, é tomada como a diferença entre a altura de carga total na entrada do bocal e a elevação da linha de centro do bocal [7]. Assim, a turbina de impulsão é carregada com a perda no bocal e com qualquer energia cinética residual da água que caia no coletor. Entretanto, não é carregada com a elevação do bocal acima do coletor. (Para instalações de altura de carga muito elevada essa correção é uma pequena porcentagem da altura de carga bruta.) Na prática, o tubo de adução é geralmente dimensionado de modo que a altura de carga líquida na potência nominal seja 85 a 95% da altura de carga bruta.

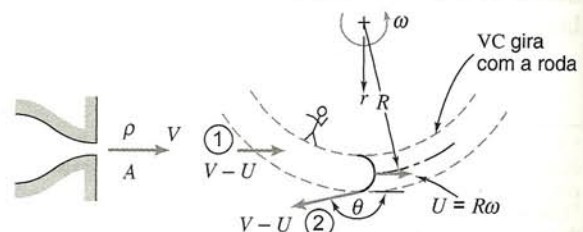
Além de perdas no bocal, atrito viscoso no fluido entre o rotor e a carcaça, atrito nos mancais e atrito superficial entre o jato e a pá reduzem o desempenho, em comparação com o caso ideal, sem atrito. A Fig. 10.10 mostra resultados típicos de testes realizados com altura de carga constante.

O pico de eficiência da turbina de impulsão corresponde ao pico de potência, desde que os testes sejam conduzidos com altura de carga e vazão constantes. Para a turbina ideal, conforme mostrado no Problema-Exemplo 10.5, isso ocorre quando a velocidade da roda é metade da velocidade do jato. Em instalações reais, o pico de eficiência ocorre para uma velocidade da roda apenas ligeiramente menor que metade da velocidade do jato. Essa condição fixa a velocidade da roda, uma vez determinada a velocidade do jato para uma dada instalação. Para grandes unidades, a eficiência global pode ser tão alta quanto 88% [11].

EXEMPLO 10.5 — Velocidade Ótima para Turbina de Impulsão

Uma roda Pelton é uma forma de turbina de impulsão bem adaptada a situações de elevada altura de carga e baixa vazão. Considere o arranjo de roda Pelton e jato único mostrado, no qual o jato atinge a pá tangencialmente e é defletido de um ângulo θ. Obtenha uma expressão para o torque exercido pela corrente d'água sobre a roda e a correspondente potência produzida. Mostre que a potência é máxima quando a velocidade da pá, $U = R\omega$, é metade da velocidade do jato, V.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.5

DADOS: Roda Pelton e jato único mostrados.

DETERMINAR: (a) Expressão para o torque exercido sobre a roda.
(b) Expressão para a potência produzida.
(c) Razão entre a velocidade da roda U e a velocidade do jato V, para potência máxima.

SOLUÇÃO:
Aplique a equação da quantidade de movimento angular ao VC rotativo mostrado:

Equação básica:

$$\vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{VC} \vec{r} \times \vec{g}\rho d\forall + \vec{T}_{\text{eixo}} - \int_{VC} \vec{r} \times [2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\rho d\forall$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\rho d\forall + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \quad (4.53)$$

(com $\vec{r}\times\vec{F}_s = 0(1)$, $\int_{VC}\vec{r}\times\vec{g}\rho d\forall = 0(2)$, $\int_{VC}\vec{r}\times[\ldots]\rho d\forall \approx 0(3)$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0(4)$)

Considerações: (1) Desprezar torque devido a forças de superfície.
(2) Desprezar torque devido a forças de campo.
(3) Desprezar massa de água sobre a roda.
(4) Escoamento permanente com relação à roda.
(5) Toda a água que sai do bocal atua sobre as pás.
(6) A altura da pá é pequena comparada com R, portanto $r_1 \approx r_2 \approx R$.
(7) Escoamento uniforme em cada seção.
(8) Não há variação da velocidade do jato em relação à pá.

Dessa forma, desde que toda a água do jato cruze as pás,

$$\vec{T}_{\text{eixo}} = \vec{r}_1 \times \vec{V}_1\{-|\rho VA|\} + \vec{r}_2 \times \vec{V}_2\{+|\rho VA|\}$$

$$\vec{r}_1 = R\hat{e}_r \qquad \vec{r}_2 = R\hat{e}_r$$

$$\vec{V}_1 = (V-U)\hat{e}_\theta \qquad \vec{V}_2 = (V-U)\cos\theta\,\hat{e}_\theta + (V-U)\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_r$$

$$T_{\text{eixo}}\hat{k} = R(V-U)\hat{k}(-\rho VA) + R(V-U)\cos\theta\,\hat{k}(\rho VA)$$

de modo que finalmente

$$T_{\text{eixo}}\hat{k} = -R(1-\cos\theta)\rho VA(V-U)\hat{k}$$

Esse é o torque externo do eixo sobre o volume de controle, i.e., sobre a roda. O torque exercido pela água sobre a roda é igual e oposto,

$$\vec{T}_{\text{saída}} = -\vec{T}_{\text{eixo}} = R(1-\cos\theta)\rho VA(V-U)\hat{k} = \rho QR(V-U)(1-\cos\theta)\hat{k} \qquad \vec{T}_{\text{saída}}$$

A potência produzida correspondente é

$$\dot{W}_{\text{saída}} = \vec{\omega}\cdot\vec{T}_{\text{saída}} = R\omega(1-\cos\theta)\rho VA(V-U) = \rho QU(V-U)(1-\cos\theta) \qquad \dot{W}_{\text{saída}}$$

Para determinar a condição de potência máxima, derive a expressão da potência com respeito à velocidade da roda U e iguale o resultado a zero. Dessa forma

$$\frac{d\dot{W}}{dU} = \rho Q(V-U)(1-\cos\theta) + \rho QU(-1)(1-\cos\theta) = 0$$

$$\therefore (V-U) - U = V - 2U = 0$$

Assim, para potência máxima, $U/V = \frac{1}{2}$ ou $U = V/2$. $\qquad U/V$

Nota: Defletindo o fluxo de $\theta = 180°$ daria potência máxima com $U = V/2$. Na prática, é possível defletir o jato de ângulos de até 165°. Com $\theta = 165°$, $1 - \cos\theta \approx 1{,}97$, ou cerca de 1,5% abaixo do valor para potência máxima.

O propósito desse problema foi aplicar o princípio da quantidade de movimento angular a um volume de controle rotativo e mostrar que, para uma turbina de impulsão ideal, o pico de potência ocorre quando a velocidade da roda é metade da velocidade do jato.

Na prática, as turbinas hidráulicas são, em geral, operadas a velocidade constante, e a potência produzida é variada alterando-se a área de abertura da válvula de agulha do bocal de jato. A perda no bocal aumenta ligeiramente e as perdas mecânicas tornam-se uma fração maior da potência produzida à medida que a válvula é fechada; desse modo, a eficiência cai bruscamente em carga baixa, conforme mostrado na Fig. 10.11. Para essa roda Pelton, a eficiência permanece acima de 85% entre 40 e 113% da carga total.

Para alturas de carga inferiores, as turbinas de reação apresentam melhor eficiência do que aquelas de impulsão. Em contraste com o escoamento numa bomba centrífuga, o fluxo numa turbina de reação entra no rotor na seção radial (externa) maior e descarrega na seção radial (interna) menor após transferir a maior parte da sua

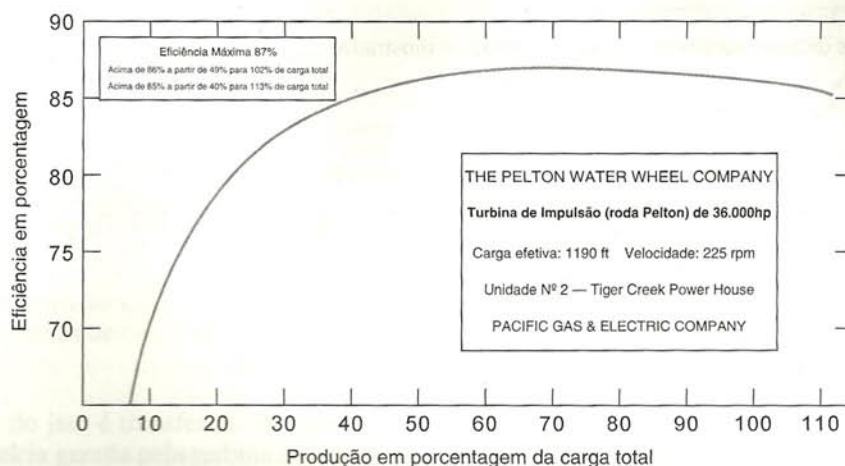



Fig. 10.11 Relação entre eficiência e potência produzida para uma turbina d'água Pelton típica (adaptado de [11]).

energia ao rotor. As turbinas de reação tendem a ser máquinas de alta vazão e baixa altura de carga. Uma instalação típica de turbina de reação é mostrada esquematicamente na Fig. 10.12, onde a terminologia empregada para definir as alturas de carga é indicada.

As turbinas de reação trabalham cheias d'água. Conseqüentemente, é possível usar um difusor, ou tubo de extração, para recuperar uma fração da energia cinética que permanece na água saindo do rotor. O tubo de extração é parte integral do projeto de instalação. Como mostrado na Fig. 10.12, a *altura de carga bruta* disponível é a diferença entre a altura de carga do reservatório de suprimento e a altura de carga do coletor. A *altura de carga efetiva* ou *líquida*, *H*, usada para calcular eficiência, é a diferença entre a elevação da linha de energia logo a montante da turbina e aquela do tubo de extração de descarga (seção *C*); o benefício a ser obtido do tubo de extração pela redução da velocidade de descarga é aparente. Visto de outro modo, o efeito do tubo de extração é baixar a pressão na descarga da turbina; isso aumenta a variação em carga de pressão através da turbina acima da que haveria sem o tubo de extração.

Um eficiente rotor de turbina de fluxo misto foi desenvolvido por James B. Francis durante uma cuidadosa série de experiências em Lowell, Massachusetts, na década de 1840 [9]. Uma eficiente turbina de propulsor de fluxo axial, com pás ajustáveis, foi desenvolvida pelo professor Victor Kaplan entre 1910 e 1924. A *turbina Francis* (Fig. 10.3*b*) é usualmente escolhida quando $15 \leq H \leq 300$ m, e a *turbina Kaplan* (Fig. 10.3*c*) é geralmente escolhida para cargas de 15 m ou menos. O desempenho de turbinas de reação pode ser medido da mesma maneira que o desempenho de turbinas de impulsão. Contudo, como as cargas brutas são inferiores, qualquer mudança no nível da água durante a operação é mais significativa. Conseqüentemente, as medições devem ser feitas para uma série de alturas de carga, a fim de definir completamente o desempenho de uma turbina de reação.

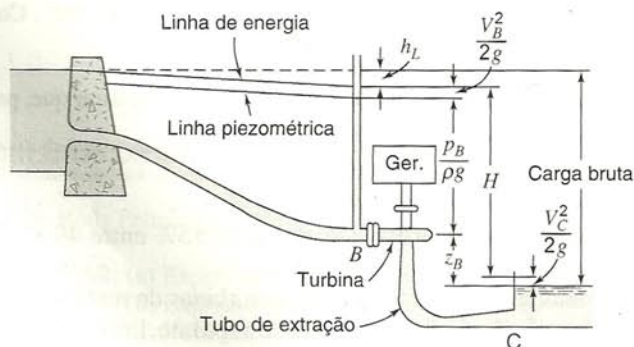



Fig. 10.12 Esquema de instalação típica de turbina de reação, mostrando definições de terminologia de altura de carga [7].

Um exemplo da apresentação de dados para uma turbina de reação é dado na Fig. 10.13, onde a eficiência é mostrada para diversos valores de potência produzida, para uma série de cargas constantes [10]. A turbina de reação tem eficiência máxima superior àquela da turbina de impulsão, mas a eficiência da turbina de reação varia mais bruscamente com a carga.

Como um leitor atento, você deve ter notado que a Fig. 10.13 contém tanto resultados de testes com modelos (eficiências esperadas) quanto de escala real. Você poderia perguntar "Como são projetados e conduzidos os testes com modelos, e como seus resultados são transportados por escala para prever o desempenho do protótipo?". Para responder essas perguntas, prossiga na leitura.

10.4.2 Análise Dimensional e Velocidade Específica

A análise dimensional para turbomáquinas foi introduzida no Cap. 7, onde os coeficientes adimensionais de fluxo, de altura

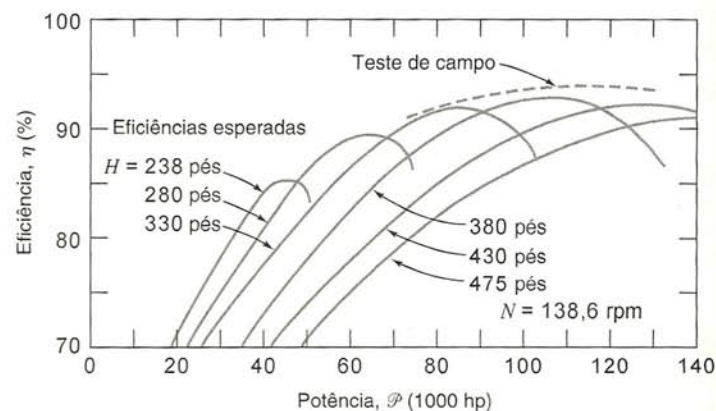



Fig. 10.13 Desempenho de turbina típica de reação como previsto por testes com modelos (eficiências esperadas) e confirmado por teste de campo [10].

de carga e de potência foram deduzidos de forma generalizada. Foi mostrado que os parâmetros independentes eram o coeficiente de fluxo e uma forma do número de Reynolds. Os parâmetros dependentes eram os coeficientes de altura de carga e de potência.

Nosso objetivo aqui é desenvolver as formas de coeficientes adimensionais de uso comum e dar exemplos ilustrando seus empregos na seleção de um tipo de máquina, no projeto de testes com modelos e no transporte por escala dos resultados. Uma vez que desenvolvemos uma teoria idealizada para as turbomáquinas na Seção 10.3, podemos obter um melhor entendimento dos aspectos físicos pelo desenvolvimento de coeficientes adimensionais diretamente das equações de cálculo resultantes.

O *coeficiente de fluxo*, Φ, é definido pela normalização da vazão em volume usando-se a área de saída e a velocidade da roda na descarga. Assim

$$\Phi = \frac{Q}{A_2 U_2} = \frac{V_{n_2}}{U_2} \tag{10.10}$$

onde V_{n_2} é a componente da velocidade perpendicular à área de saída. Essa componente é também denominada *velocidade meridional* no plano de saída da roda. Ela aparece em projeção de verdadeira grandeza no *plano meridional*, que é qualquer seção transversal radial através da linha de centro de uma máquina.

Um *coeficiente de carga* adimensional, Ψ, pode ser obtido pela normalização da altura de carga, H, (Eq. 10.2c) com U_2^2/g. Assim,

$$\Psi = \frac{gH}{U_2^2} \tag{10.11}$$

Um *coeficiente de torque* adimensional, τ, pode ser obtido normalizando o torque, T, (Eq. 10.1c) com $\rho A_2 U_2^2 R_2$. Assim,

$$\tau = \frac{T}{\rho A_2 U_2^2 R_2} \tag{10.12}$$

Finalmente, o *coeficiente de potência* adimensional, Π, é obtido pela normalização da potência, $\dot{W}$, (Eq. 10.2b) com $\dot{m}U_2^2 = \rho Q U_2^2$. Assim,

$$\Pi = \frac{\dot{W}}{\rho Q U_2^2} = \frac{\dot{W}}{\rho \omega^2 Q R_2^2} \tag{10.13}$$

Para bombas, a potência mecânica absorvida excede a potência hidráulica e a eficiência é definida como $\eta_p = \dot{W}_h/\dot{W}_m$ (Eq. 10.8c). Daí,

$$\dot{W}_m = T\omega = \frac{1}{\eta_p}\dot{W}_h = \frac{\rho Q g H_p}{\eta_p} \tag{10.14}$$

Introduzindo os coeficientes adimensionais Φ (Eq. 10.10), Ψ (Eq. 10.11) e τ (Eq. 10.12) na Eq. 10.14, obtemos uma relação análoga entre os coeficientes adimensionais como

$$\tau = \frac{\Psi\Phi}{\eta_p} \tag{10.15}$$

Para turbinas, a potência mecânica produzida é inferior à potência hidráulica, e a eficiência é definida como $\eta_t = \dot{W}_m/\dot{W}_h$ (Eq. 10.9c). Daí,

$$\dot{W}_m = T\omega = \eta_t \dot{W}_h = \eta_t \rho Q g H_t \tag{10.16}$$

Introduzindo os coeficientes adimensionais Φ, Ψ, e τ na Eq. 10.16, obtemos uma relação análoga entre os coeficientes adimensionais como

$$\tau = \eta_t \Psi\Phi \tag{10.17}$$

Os coeficientes adimensionais formam a base para o projeto de testes com modelos e do transporte de resultados para o protótipo. Conforme mostrado no Cap. 7, o coeficiente de fluxo é tratado como o parâmetro independente. Então, se os efeitos viscosos forem desprezados, os coeficientes de carga, de torque e de potência são tratados como parâmetros múltiplos dependentes. Sob essas suposições, a semelhança dinâmica é alcançada quando os coeficientes de fluxo coincidem, para modelo e protótipo.

Como discutido no Cap. 7, um parâmetro útil chamado *velocidade específica* pode ser obtido combinando os coeficientes de fluxo e de carga e eliminando o tamanho da máquina. O resultado foi

$$N_s = \frac{\omega Q^{1/2}}{h^{3/4}} \tag{7.6a}$$

Quando a altura de carga é expressa em energia por unidade de massa (i.e., com dimensões equivalentes a L^2/t^2, ou g vezes a carga em altura de líquido) e ω é expressa em radianos por segundo, a velocidade específica definida pela Eq. 7.6a é adimensional.

Embora a velocidade específica seja um parâmetro adimensional, é prática comum utilizar um conjunto de unidades conveniente, porém inconsistente, para especificar as variáveis ω e Q, e usar energia por unidade de peso, H, no lugar de energia por unidade de massa na Eq. 7.6a. Quando isso é feito, a velocidade específica não é um parâmetro sem unidades e a sua magnitude depende das unidades empregadas para calculá-la. Unidades habituais usadas nos Estados Unidos na prática de engenharia de bombas são rpm para ω, gpm para Q e pés (energia por unidade de peso) para H. Na prática, o símbolo N é usado para representar a taxa de rotação (ω) em rpm. Dessa forma, a velocidade específica dimensional, expressa em unidades habituais dos Estados Unidos, torna-se

$$N_{S_{cu}} = \frac{N\ (\text{rpm})[Q\ (\text{gpm})]^{1/2}}{[H\ (\text{pé})]^{3/4}} \tag{7.6b}$$

Os valores da velocidade específica adimensional, N_s (Eq. 7.6a), devem ser multiplicados por 2733 para obter os valores da velocidade específica correspondentes a esse conjunto usual de unidades, apesar de inconsistente (veja Problema-Exemplo 10.6).

A potência produzida por uma turbina hidráulica é proporcional à vazão e à altura de carga, $\mathcal{P} \propto \rho Q h$ em unidades consistentes. Substituindo $\mathcal{P}/\rho h$ por Q na Eq. 7.6a obtém-se

$$N_S = \omega(\mathcal{P}/\rho h)^{1/2}/h^{3/4} = \omega \mathcal{P}^{1/2}/(\rho^{1/2} h^{5/4}) \tag{10.18a}$$

como a forma adimensional da velocidade específica.

Na prática de engenharia nos Estados Unidos, é usual eliminar o fator $\rho^{1/2}$ (a água é invariavelmente o fluido de trabalho nas turbinas para as quais a velocidade específica é utilizada) e usar a carga H em lugar de energia por unidade de massa, h. Unidades habituais usadas na prática de engenharia de turbinas hidráulicas nos Estados Unidos são rpm para ω, hp (*horsepower*) para $\mathcal{P}$ e pés para H. Na prática, o símbolo N é usado para representar a taxa de rotação (ω) em rpm. Dessa forma, a velocidade específica dimensional para uma turbina hidráulica, expressa em unidades habituais dos Estados Unidos, torna-se

$$N_{S_{cu}} = \frac{N\text{ (rpm)}[\mathscr{P}\text{ (hp)}]^{1/2}}{[H\text{ (pé)}]^{5/4}} \qquad (10.18b)$$

Valores da velocidade específica dimensional para uma turbina hidráulica, N_S, (Eq. 10.18a) devem ser multiplicados por 43,46 para se obter os valores da velocidade específica correspondentes a esse conjunto de unidades usual, embora inconsistente.

A velocidade específica pode ser imaginada como a velocidade de operação em que a máquina produz altura de carga unitária a uma vazão unitária. Mantendo-se a velocidade específica constante, descrevem-se todas as condições de operação de máquinas geometricamente semelhantes com condições similares de escoamento.

É usual caracterizar uma máquina pela sua velocidade específica no ponto de projeto. Tem sido verificado que essa velocidade específica caracteriza os aspectos do projeto hidráulico de uma máquina. Baixas velocidades específicas correspondem a operação eficiente de máquinas de fluxo radial. Altas velocidades específicas correspondem a operação eficiente de máquinas de fluxo axial. Para uma carga e uma vazão especificadas, pode ser escolhida tanto uma máquina de baixa velocidade específica (que opera a baixa velocidade) quanto uma de alta velocidade específica (que opera a alta velocidade).

A Fig. 10.14 mostra proporções típicas para projetos de bombas comerciais e suas variações com a velocidade específica adimensional. Nessa figura, o tamanho de cada máquina foi ajustado de modo a dar as mesmas altura de carga e vazão para rotação numa velocidade correspondente à velocidade específica. Desta maneira, pode ser visto que se o tamanho e o peso da máquina forem críticos, dever-se-ia escolher uma velocidade específica mais alta. A Fig. 10.14 mostra a tendência de geometrias de bombas com o aumento da velocidade específica, partindo das bombas radiais (puramente centrífugas), passando pelas de fluxo misto, até as de fluxo axial.

As tendências de eficiência correspondentes para bombas típicas são mostradas na Fig. 10.15. A Fig. 10.15 mostra que a capacidade da bomba em geral aumenta com o aumento da velocidade específica; a figura mostra também que, para qualquer velocidade específica dada, a eficiência é maior para bombas grandes do que para pequenas. Fisicamente, esse *efeito de escala* significa que as perdas viscosas tornam-se menos importantes à medida que o tamanho da bomba aumenta.

As proporções características de turbinas hidráulicas também são correlacionadas pela velocidade específica, como mostrado na Fig. 10.16. Assim como na Fig. 10.14, o tamanho da máquina nessa ilustração foi colocado em escala de modo que a máquina forneça aproximadamente a mesma potência por carga unitária quando girando a velocidade igual à velocidade específica. As tendências de eficiência correspondentes para turbinas típicas são mostradas na Fig. 10.17.

Diversas variações de velocidade específica, calculadas diretamente das unidades de engenharia, são largamente usadas na prática. As formas mais comumente empregadas de velocidade específica são definidas e comparadas no Problema-Exemplo 10.6.

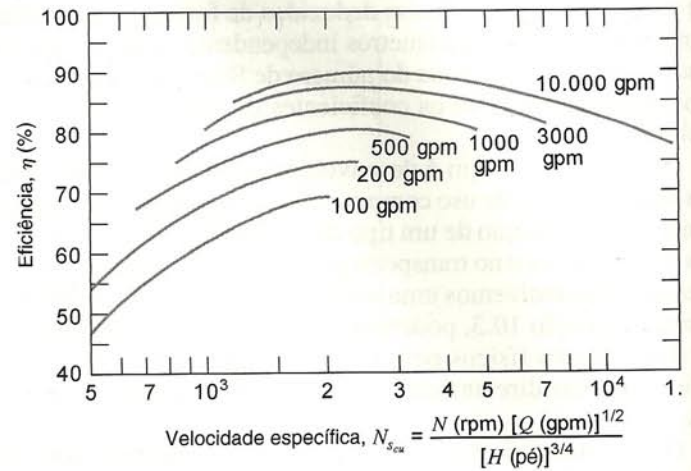



Fig. 10.15 Eficiências médias de bombas comerciais variando com a velocidade específica e com o tamanho da bomba [10].

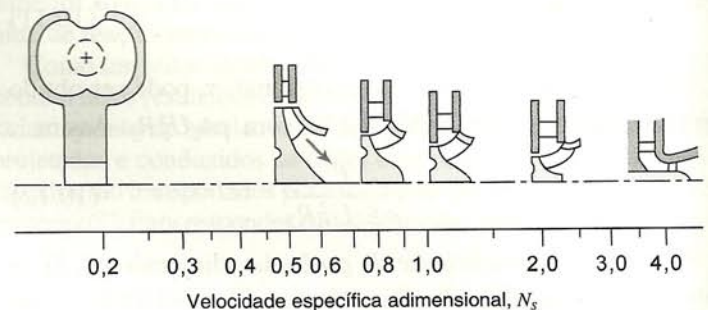



Fig. 10.16 Proporções geométricas típicas de turbinas hidráulicas comerciais variando com a velocidade específica adimensional [12].

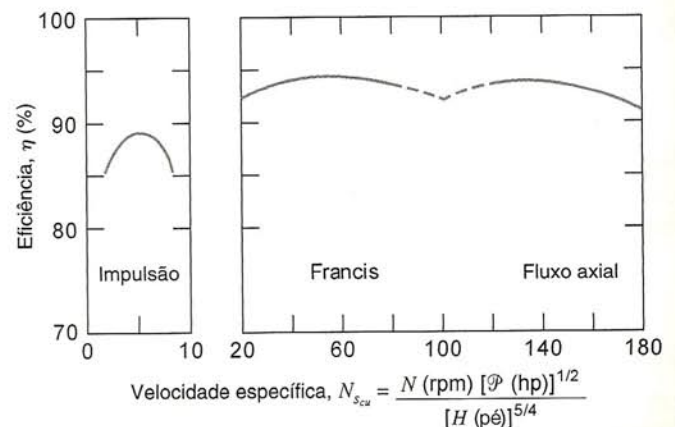



Fig. 10.17 Eficiências médias de turbinas hidráulicas comerciais variando com a velocidade específica [10].

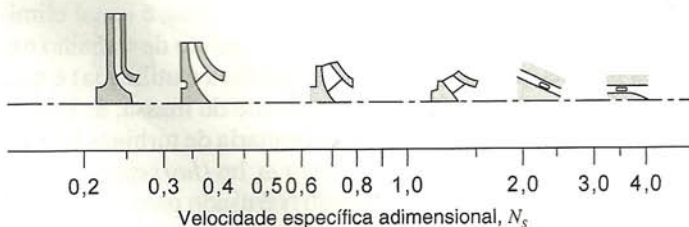



Fig. 10.14 Proporções geométricas típicas de bombas comerciais variando com a velocidade específica adimensional [12].

EXEMPLO 10.6 — Comparação de Definições de Velocidade Específica

No ponto de melhor eficiência, uma bomba centrífuga, com diâmetro de impulsor $D = 8$ pol., produz $H = 21{,}9$ pés a $Q = 300$ gpm, com $N = 1170$ rpm. Calcule as correspondentes velocidades específicas usando: (a) unidades habituais dos Estados Unidos, (b) unidades SI (rad/s, m^3/s, m^2/s^2) e (c) unidades européias (rps, m^3/s, m^2/s^2). Desenvolva fatores de conversão para relacionar as velocidades específicas.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.6

DADOS: Bomba centrífuga no ponto de melhor eficiência (PME). Admita que as características da bomba são $H = 21{,}9$ pés, $Q = 300$ gpm e $N = 1170$ rpm.

DETERMINAR: (a) Velocidade específica em unidades habituais dos Estados Unidos.
(b) Velocidade específica em unidades SI.
(c) Velocidade específica em unidades européias.
(d) Fatores de conversão apropriados para relacionar as velocidades específicas.

SOLUÇÃO:

Equação de cálculo: $N_s = \dfrac{\omega Q^{1/2}}{h^{3/4}}$ e $N_{S_{cu}} = \dfrac{NQ^{1/2}}{H^{3/4}}$

A partir das informações dadas, a velocidade específica, em unidades habituais dos EUA, é

$$N_{S_{cu}} = \frac{1170 \text{ rpm}}{} \times \frac{(300)^{1/2} \text{ gpm}^{1/2}}{} \times \frac{1}{(21{,}9)^{3/4} \text{ pé}^{3/4}} = 2000 \qquad N_{S_{cu}}$$

Converta as informações para unidades SI:

$$\omega = 1170 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} = 123 \text{ rad/s}$$

$$Q = 300 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48 \text{ gal}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times (0{,}305)^3 \frac{\text{m}^3}{\text{pé}^3} = 0{,}0190 \text{ m}^3\text{/s}$$

$$H = 21{,}9 \text{ pé} \times 0{,}305 \frac{\text{m}}{\text{pé}} = 6{,}68 \text{ m}$$

A energia por unidade de massa é

$$h = gH = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 6{,}68 \text{ m} = 65{,}5 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

A velocidade específica adimensional em unidades SI é

$$N_s = 123 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times (0{,}0190)^{1/2} \frac{\text{m}^{3/2}}{\text{s}^{1/2}} \times \frac{(\text{s}^2)^{3/4}}{(65{,}5)^{3/4} (\text{m}^2)^{3/4}} = 0{,}736 \qquad N_s(\text{SI})$$

Converta a velocidade de operação para hertz:

$$\omega = 1170 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{Hz} \cdot \text{s}}{\text{rev}} = 19{,}5 \text{ Hz}$$

Finalmente, a velocidade específica em unidades usuais na Europa é

$$N_s(\text{Eur}) = 19{,}5 \text{ Hz} \times (0{,}0190)^{1/2} \frac{\text{m}^{3/2}}{\text{s}^{1/2}} \times \frac{(\text{s}^2)^{3/4}}{(65{,}5)^{3/4} (\text{m}^2)^{3/4}} = 0{,}117 \qquad N_s(\text{Eur})$$

Para relacionar as velocidades específicas, forme razões:

$$\frac{N_{S_{cu}}}{N_s(\text{Eur})} = \frac{2000}{0{,}117} = 17{,}100$$

$$\frac{N_{S_{cu}}}{N_s(\text{SI})} = \frac{2000}{0{,}736} = 2720$$

O propósito desse problema é demonstrar o método usado para calcular velocidade específica para bombas a partir de cada um dos três conjuntos de unidades comumente utilizados e comparar os resultados. (Nesse exemplo, foram usados três algarismos significativos em todos os cálculos. Valores numéricos ligeiramente diferentes poderiam ser obtidos se um maior número de algarismos significativos fossem considerados nos cálculos intermediários.)

10.4.3 Regras de Semelhança

Os fabricantes de bombas oferecem um número limitado de tamanhos de carcaça e de projetos. Freqüentemente, carcaças de tamanhos diferentes são desenvolvidas a partir de um projeto comum aumentando-se ou diminuindo-se todas as dimensões por uma mesma razão de escala. Variações adicionais nas curvas características podem ser obtidas variando-se a velocidade de operação ou mudando-se o tamanho do impulsor dentro de uma dada carcaça. Os parâmetros adimensionais desenvolvidos no Cap. 7 formam a base de previsão de mudanças no desempenho que resultam de variações no tamanho da bomba, velocidade de operação, ou diâmetro do impulsor.

Para alcançar semelhança dinâmica, semelhanças geométrica e cinemática são necessárias. Admitindo bombas e campos de escoamento semelhantes, e desprezando os efeitos viscosos, conforme mostrado no Cap. 7, a semelhança dinâmica é obtida quando o coeficiente de fluxo adimensional é mantido constante. A operação dinamicamente semelhante é garantida quando duas condições de escoamento satisfazem à relação

$$\frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3} \tag{10.19a}$$

Os coeficientes adimensionais de carga e de potência dependem apenas do coeficiente de fluxo, ou seja,

$$\frac{h}{\omega^2 D^2} = f_1\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\mathcal{P}}{\rho \omega^3 D^5} = f_2\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)$$

Quando isso é verdadeiro, como mostrado no Problema-Exemplo 7.6, as características da bomba numa nova condição (índice 2) podem ser relacionadas com aquelas na condição antiga (índice 1) por

$$\frac{h_1}{\omega_1^2 D_1^2} = \frac{h_2}{\omega_2^2 D_2^2} \tag{10.19b}$$

e

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\rho_1 \omega_1^3 D_1^5} = \frac{\mathcal{P}_2}{\rho_2 \omega_2^3 D_2^5} \tag{10.19c}$$

Essas relações de escala podem ser usadas para prever os efeitos de variações na velocidade de operação da bomba, no seu tamanho, ou no diâmetro do impulsor dentro de uma dada carcaça.

A situação mais simples ocorre quando somente a velocidade da bomba muda. Nesse caso, a semelhança geométrica está assegurada. A semelhança cinemática será mantida se não houver cavitação; os escoamentos serão, então, dinamicamente semelhantes quando os coeficientes de fluxo forem igualados. Para esse caso de variação de velocidade com diâmetro fixo, as Eqs. 10.19 tornam-se

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{10.20a}$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \tag{10.20b}$$

$$\frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 \tag{10.20c}$$

No Problema-Exemplo 10.4, foi mostrado que a curva de desempenho de uma bomba pode ser modelada com precisão de engenharia pela relação parabólica, $H = H_0 - AQ^2$. Como essa representação contém dois parâmetros, a curva da bomba para a nova condição de operação pode ser deduzida transpondo-se por escala dois pontos quaisquer da curva de desempenho, medida na condição original de operação. Usualmente, a condição de bloqueio e o ponto de melhor eficiência são os escolhidos. Esses pontos são representados por B e C na Fig. 10.18.

Conforme mostrado pela Eq. 10.20a, a vazão aumenta pela razão entre velocidades de operação, logo

$$Q_{B'} = \frac{\omega_2}{\omega_1} Q_B = 0 \quad \text{e} \quad Q_{C'} = \frac{\omega_2}{\omega_1} Q_C$$

Assim, o ponto B' está localizado diretamente acima do ponto B e o ponto C' move-se para a direita do ponto C.

A altura de carga aumenta pelo quadrado da razão entre as velocidades, logo

$$H_{B'} = H_B \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \quad \text{e} \quad H_{C'} = H_C \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2$$

Os pontos C e C', onde condições de escoamento dinamicamente semelhantes estão presentes, são denominados pontos *homólogos* da bomba.

É fácil mostrar (veja o Problema-Exemplo 10.7) que a curva de desempenho resultante é dada por

$$H' = H_0' - AQ^2 \tag{10.21}$$

onde A é a constante da curva original.

A eficiência permanece relativamente constante entre pontos de operação dinamicamente semelhantes, quando só a velocidade da bomba é alterada. A aplicação dessas idéias é ilustrada no Problema-Exemplo 10.7.

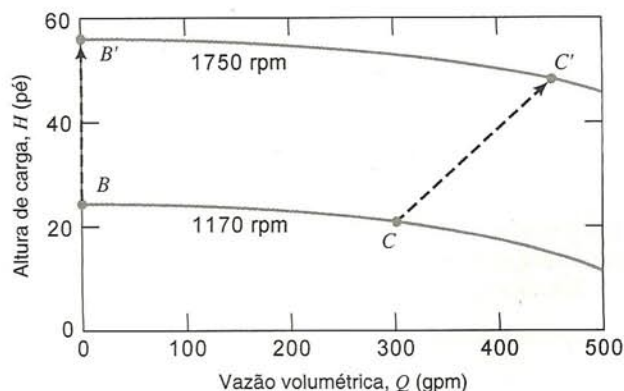



Fig. 10.18 Esquema de curva característica de uma bomba, ilustrando o efeito de uma variação na sua velocidade de operação.

EXEMPLO 10.7 — Transposição de Curvas de Desempenho de Bombas

Quando operando a $N = 1170$ rpm, uma bomba centrífuga, com diâmetro de impulsor $D = 8$ pol., tem altura de carga no bloqueio $H_0 = 25{,}0$ pés de água. Na mesma velocidade de operação, a melhor eficiência ocorre para $Q = 300$ gpm, onde a altura de carga é $H = 21{,}9$ pés de água. Faça o ajuste desses dados por uma parábola para a bomba a 1170 rpm. Transponha os resultados por escala para uma nova velocidade de operação de 1750 rpm. Plote e compare os resultados.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.7

DADOS: Bomba centrífuga (com impulsor de $D = 8$ pol.) operada a $N = 1170$ rpm.

Q (gpm)	0	300
H (pés de água)	25,0	21,9

DETERMINAR: **(a)** A equação de uma parábola para as características da bomba a 1170 rpm.
(b) A equação correspondente para uma nova velocidade de operação de 1750 rpm.
(c) Comparação (gráfico) dos resultados.

SOLUÇÃO:

Admita uma variação parabólica na altura de carga da bomba da forma $H = H_0 + AQ^2$. Resolvendo para A, resulta

$$A = \frac{H_0 - H}{Q^2} = \frac{(25{,}0 - 2{,}19)\text{ pé}}{} \times \frac{1}{(300)^2\ (\text{gpm})^2} = 3{,}44 \times 10^{-5}\ \text{pé/(gpm)}^2$$

A equação da curva de ajuste é

$$H\ (\text{pé}) = 25{,}0 - 3{,}44 \times 10^{-5}\ [Q\ (\text{gpm})]^2$$

A bomba permanece a mesma, portanto, as duas condições de escoamento são geometricamente semelhantes. Admitindo que não ocorre cavitação, os dois escoamentos também serão cinematicamente semelhantes. Assim, a semelhança dinâmica será obtida quando os dois coeficientes de fluxo forem igualados. Denotando a condição a 1170 rpm pelo índice 1 e a condição a 1750 rpm pelo índice 2, temos

$$\frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3} = \frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} \quad \text{ou} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

visto que $D_2 = D_1$. Para a condição de bloqueio,

$$Q_2 = \frac{N_2}{N_1} Q_1 = \frac{1750\text{ rpm}}{1170\text{ rpm}} \times 0\text{ gpm} = 0\text{ gpm}$$

Do ponto de melhor eficiência, a nova vazão em volume é

$$Q_2 = \frac{N_2}{N_1} Q_1 = \frac{1750\text{ rpm}}{1170\text{ rpm}} \times 300\text{ gpm} = 449\text{ gpm}$$

As alturas de carga da bomba são relacionadas por

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{H_2}{H_1} = \frac{N_2^2 D_2^2}{N_1^2 D_1^2} \quad \text{ou} \quad \frac{H_2}{H_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

visto que $D_2 = D_1$. Para a condição de bloqueio,

$$H_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 H_1 = \left(\frac{1750\text{ rpm}}{1170\text{ rpm}}\right)^2 25{,}0\text{ pés} = 55{,}9\text{ pés}$$

No ponto de melhor eficiência,

$$H_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 H_1 = \left(\frac{1750\text{ rpm}}{1170\text{ rpm}}\right)^2 21{,}9\text{ pés} = 49{,}0\text{ pés}$$

O parâmetro da curva a 1750 rpm pode agora ser encontrado. Resolvendo para A,

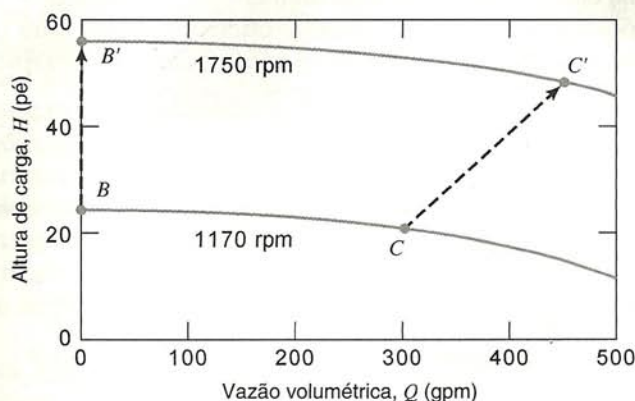
$$A_2 = \frac{H_{02} - H_2}{Q_2^2} = \frac{(55{,}9 - 49{,}0)\text{ pé}}{} \times \frac{1}{(449)^2\ (\text{gpm})^2} = 3{,}44 \times 10^{-5}\ \text{pé/(gpm)}^2$$

Note que A_2 para 1750 rpm é o mesmo que A_1 para 1170 rpm. Assim, o coeficiente A na equação parabólica não varia quando a velocidade da bomba é alterada. As equações para as duas curvas são

$$H_1 = 25{,}0 - 3{,}44 \times 10^{-5}[Q\ (\text{gpm})]^2 \quad (\text{para } 1170\text{ rpm})$$

e

$$H_2 = 55{,}9 - 3{,}44 \times 10^{-5}[Q\ (\text{gpm})]^2 \quad (\text{para } 1750\text{ rpm})$$

As curvas da bomba são comparadas no seguinte gráfico:

O propósito desse problema foi ilustrar o procedimento de transposição de curvas de bombas, por escala, de uma velocidade para outra.

Em princípio, a semelhança geométrica seria mantida quando bombas de mesma geometria, diferindo apenas no tamanho por uma razão de escala, fossem testadas à mesma velocidade de operação. As variações da vazão, da altura de carga e da potência com o tamanho da bomba, seriam previstas como

$$Q_2 = Q_1\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3,\ H_2 = H_1\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2,\ \text{e}\ \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 \qquad (10.22)$$

Não é prático produzir e testar uma série de modelos de bombas que diferem em tamanho por uma razão de escala apenas. Em vez disso, é prática comum testar uma dada carcaça de bomba a uma velocidade fixa com diversos impulsores de diferentes diâmetros [13]. Como a carcaça da bomba é a mesma para cada teste, a largura do impulsor também deve ser a mesma; somente o diâmetro D do impulsor é mudado. Como resultado, a transposição da vazão mássica é feita em proporção a D^2, e não a D^3. A potência consumida pela bomba, para escalas de velocidade fixas, é proporcional ao produto da vazão mássica pela carga, tornando-se assim proporcional a D^4. O uso desse método de escala modificado fornece, em geral, resultados com precisão aceitável, conforme demonstrado em diversos problemas do final do capítulo, onde o método é checado contra dados do Apêndice E de desempenho medido.

Não é possível comparar as eficiências para as duas condições de operação diretamente. Contudo, os efeitos viscosos deveriam tornar-se relativamente menos importantes à medida que o tamanho da bomba aumenta. Deste modo, a eficiência melhoraria ligeiramente com o aumento do diâmetro.

Moody [14] sugeriu uma equação empírica que pode ser usada para estimar a eficiência máxima de uma bomba protótipo, com base em dados de testes de um modelo geometricamente semelhante. Sua equação é escrita como

$$\frac{1-\eta_p}{1-\eta_m} = \left(\frac{D_m}{D_p}\right)^{\frac{1}{5}} \qquad (10.23)$$

Para desenvolver a Eq. 10.23, Moody admitiu que apenas as resistências de superfície mudam com a escala do modelo, de modo que perdas em passagens de mesma rugosidade variam conforme $1/D^5$. Infelizmente, é difícil manter a mesma rugosidade relativa entre as bombas modelo e protótipo. Além disso, o modelo de Moody não leva em conta qualquer diferença nas perdas mecânicas entre o modelo e o protótipo, nem permite a determinação de eficiências fora do pico. Apesar disso, a transposição do ponto de eficiência máxima é útil para obter-se uma estimativa geral da curva de eficiência do protótipo.

10.4.4 Cavitação e Altura de Carga de Sucção Positiva Disponível

A cavitação pode ocorrer em qualquer máquina trabalhando com líquido sempre que a pressão estática local cair abaixo da pressão de vapor do líquido. Quando isso ocorre, o líquido pode vaporizar-se instantaneamente, formando uma cavidade de vapor e alterando a configuração do escoamento em relação à condição sem cavitação. A cavidade de vapor muda a forma efetiva da passagem do fluxo, alterando, assim, o campo de pressão local. Como o tamanho e a forma da cavidade de vapor são influenciados pelo campo de pressão local, o escoamento pode tornar-se transiente. Essa instabilidade pode causar oscilação em todo o escoamento e vibração na máquina.

Quando a cavitação começa, ela reduz rapidamente o desempenho da bomba ou da turbina. A cavitação deve ser evitada para manter uma operação estável e eficiente. Além disso, pressões superficiais podem tornar-se localmente altas quando a cavidade de vapor implode, causando desgastes superficiais ou danos em paredes metálicas por erosão. Os danos podem ser severos a ponto de destruir uma máquina fabricada com material quebradiço, de baixa resistência. Obviamente, a cavitação deve ser evitada, também, para assegurar longa vida para a máquina.

Numa bomba, a cavitação tende a começar na seção onde o escoamento é acelerado para dentro do impulsor. A cavitação numa turbina começa onde a pressão é mais baixa. A tendência a cavitar aumenta à medida que a velocidade do escoamento local aumenta; isso ocorre sempre que a vazão ou a velocidade de operação da máquina é aumentada.

A cavitação pode ser evitada se a pressão em todos os pontos da máquina for mantida acima da pressão de vapor do líquido de operação. A velocidade constante, isso requer que uma pressão algo maior do que a pressão de vapor do líquido seja mantida na entrada da bomba (a *sucção* ou *aspiração*). Por causa das perdas de pressão na tubulação de entrada, a pressão de aspiração pode estar abaixo da atmosférica. Por isso, é importante limitar cuidadosamente a queda de pressão na tubulação de sucção.

A *altura de sucção positiva líquida (NPSH)* é definida como a diferença entre a pressão absoluta de estagnação no escoamento na aspiração da bomba e a pressão de vapor do líquido, expressa em altura de líquido em escoamento [15].[6] A *altura de sucção positiva líquida requerida* (*NPSHR*) por uma bomba específica para suprimir cavitação varia com o líquido bombeado, com a sua temperatura e com a condição da bomba (por exemplo, com o modo como as características geométricas críticas da bomba são afetadas pelo desgaste). O *NPSHR* pode ser medido numa bancada de teste de bombas controlando-se a pressão na entrada. Os resultados são plotados sobre a curva de desempenho. Curvas características típicas de bombas para três impulsores testados na mesma carcaça são mostradas na Fig. 10.8. As curvas de *NPSHR* determinadas experimentalmente para os impulsores de maior e menor diâmetro estão plotadas na parte inferior da figura.

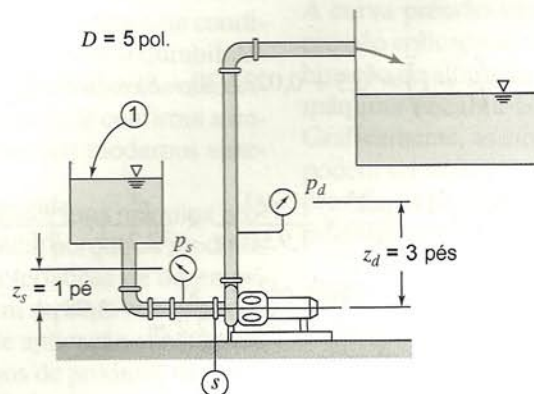
A *altura de sucção positiva líquida disponível* (*NPSHA*) na entrada da bomba deve ser maior do que o *NPSHR* para suprimir cavitação. A queda de pressão na tubulação de aspiração e na entrada da bomba aumenta com o aumento da vazão. Dessa forma, para qualquer sistema, o *NPSHA* diminui quando a vazão é aumentada. O *NPSHR* da bomba aumenta quando a vazão é aumentada. Por conseguinte, à medida que a vazão do sistema aumenta, as curvas de *NPSHA* e *NPSHR versus* vazão cruzam-se em algum ponto. Para qualquer sistema de admissão, existe uma vazão que não pode ser excedida se o escoamento através da bomba deve permanecer livre de cavitação. As perdas de pressão na entrada da bomba podem ser reduzidas aumentando-se o diâmetro do tubo de aspiração; por essa razão, muitas bombas centrífugas têm flanges ou conexões maiores na entrada do que na saída.

[6] O *NPSH* pode ser expresso em qualquer unidade de medida conveniente, como altura do líquido em escoamento, por exemplo, metros de água (daí o termo *altura de sucção*), psia, ou kPa (abs). Quando expresso como *altura*, o *NPSH* é medido com relação à linha de centro do impulsor.

EXEMPLO 10.8 — Cálculo da Altura de Sucção Positiva Líquida (*NPSH*)

Uma bomba centrífuga Peerless Tipo 4AE11 (Fig. D.3, Apêndice D) é testada a 1750 rpm usando um sistema de escoamento com o *layout* do Problema-Exemplo 10.3. O nível de água no reservatório de suprimento está 3,5 pés acima da linha de centro da bomba; a tubulação de admissão consiste de 6 pés de tubo de ferro fundido reto de 5 pol. de diâmetro, um cotovelo padrão e uma válvula gaveta totalmente aberta. Calcule a altura de sucção positiva líquida disponível (*NPSHA*) na entrada da bomba para uma vazão volumétrica de 1000 gpm de água a 80°F. Compare com a altura de sucção positiva líquida requerida (*NPSHR*) pela bomba para essa vazão. Plote *NPSHA* e *NPSHR* para água a 80°F e 180°F *versus* vazão volumétrica.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.8

DADOS: Uma bomba centrífuga Peerless Tipo 4AE11 (Fig. D.3, Apêndice D) é testada a 1750 rpm usando um sistema de escoamento com o *layout* do Problema-Exemplo 10.3. O nível de água no reservatório de suprimento está 3,5 pés acima da linha de centro da bomba; a tubulação de admissão tem 6 pés de tubo de ferro fundido reto de 5 pol. de diâmetro, um cotovelo padrão e uma válvula gaveta totalmente aberta.

DETERMINAR: **(a)** O *NPSHA* para $Q = 1000$ gpm de água a 80°F.
(b) A comparação com o *NPSHR* para essa bomba para $Q = 1000$ gpm.
(c) O gráfico de *NPSHA* e *NPSHR* para água a 80°F e 180°F *versus* vazão volumétrica.

SOLUÇÃO:

A altura de sucção positiva líquida (*NPSH*) é definida como a diferença entre a pressão absoluta de estagnação no escoamento na sucção da bomba e a pressão de vapor do líquido, expressa em altura de líquido em escoamento. Portanto, é necessário calcular a altura na sucção da bomba.

Aplique a equação de energia para escoamento incompressível em regime permanente a fim de calcular a pressão na entrada da bomba e, em seguida, o *NPSHA*. Denote o nível de reservatório como ① e o nível da sucção da bomba como S, conforme mostrado anteriormente.

Equação de cálculo:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \underbrace{\bar{V}_1^2}_{\approx 0} + \rho g z_1 = p_s + \frac{1}{2}\rho \bar{V}_s^2 + \rho g_s + \rho h_{\ell_T}$$

Consideração: $\bar{V}_1$ é desprezível
Então

$$p_s = p_1 + \rho g(z_1 - z_s) - \tfrac{1}{2}\rho \bar{V}_s^2 - \rho h_{\ell_T} \tag{1}$$

A perda de carga total é

$$h_{\ell_T} = \left(\sum K + \sum f\frac{L_e}{D} + f\frac{L}{D}\right)\frac{1}{2}\rho \bar{V}_s^2 \tag{2}$$

Substituindo a Eq. 2 na Eq. 1 e dividindo por ρg,

$$H_s = H_1 + z_1 - z_s - \left(\sum K + \sum f\frac{L_e}{D} + f\frac{L}{D} + 1\right)\frac{\bar{V}_s^2}{2g}$$

Avaliando o fator de atrito e a perda de carga,

$$f = f(Re, e/D); \; Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{\nu}; \; \bar{V} = \frac{Q}{A}; \; A = \frac{\pi D^2}{4}$$

Para tubo de 5 pol. (nominal), $D = 5{,}047$ pol.

$$D = 5{,}047\,\text{pol.} \times \frac{\text{pé}}{12\,\text{pol.}} = 0{,}421\,\text{pé}; \; A = \frac{\pi D^2}{4} = 0{,}139\,\text{pé}^2$$

$$\bar{V} = 1000\,\frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48\,\text{gal}} \times \frac{1}{0{,}139\,\text{pé}^2} \times \frac{\text{min}}{60\,\text{s}} = 16{,}0\,\text{pé/s}$$

Da Tabela A7, para água a $T = 80°\text{F}$, $\nu = 0{,}927 \times 10^{-5}$ pé²/s.
O número de Reynolds é

$$Re = \frac{\bar{V} D}{\nu} = 16{,}0\,\frac{\text{pé}}{\text{s}} \times 0{,}421\,\text{pé} \times \frac{\text{s}}{0{,}927 \times 10^{-5}\,\text{pé}^2} = 7{,}27 \times 10^5$$

Da Tabela 8.1, $e = 0{,}00085$ pé, logo $e/D = 0{,}00202$. Da Fig. 8.13, $f = 0{,}0237$. Os coeficientes de perdas localizadas são

Entrada	$K = 0{,}5$
Cotovelo padrão	$f\frac{L_e}{D} = 30$
Válvula gaveta aberta	$f\frac{L_e}{D} = 8$

Substituindo,

$$\left(\sum K + \sum f\frac{L_e}{D} + f\frac{L}{D} + 1\right) = 0{,}5 + 0{,}0237(30 + 8) + 0{,}0237\left(\frac{6}{0{,}421}\right) + 1 = 2{,}74$$

As alturas de carga são

$$H_1 = \frac{p_{atm}}{\rho g} = 14{,}7\,\frac{\text{lbf}}{\text{pol}^2} \times 144\,\frac{\text{pol}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{1{,}93\,\text{slug}} \times \frac{\text{s}^2}{32{,}2\,\text{pé}} \times \frac{\text{slug}\cdot\text{pé}}{\text{lbf}\cdot\text{s}^2} = 34{,}1\,\text{pé (abs)}$$

$$\frac{\bar{V}_s^2}{2g} = \frac{1}{2} \times (16{,}0)^2\,\frac{\text{pé}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{s}^2}{32{,}2\,\text{pé}} = 3{,}98\,\text{pé}$$

Assim

$$H_s = 34{,}1\,\text{pé} + 3{,}5\,\text{pé} - (2{,}74)3{,}98\,\text{pé} = 26{,}7\,\text{pé (abs)}$$

Para obter *NPSHA*, some a altura de velocidade e subtraia a altura de pressão de vapor. Dessa maneira

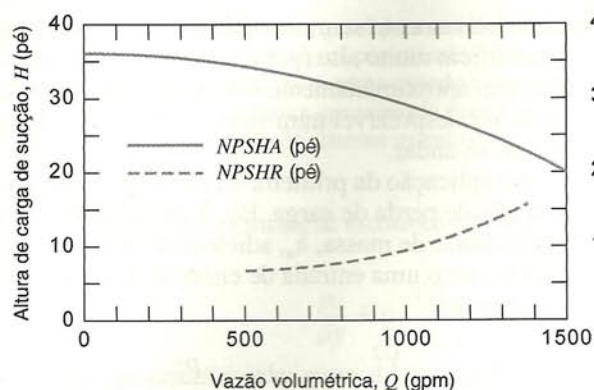
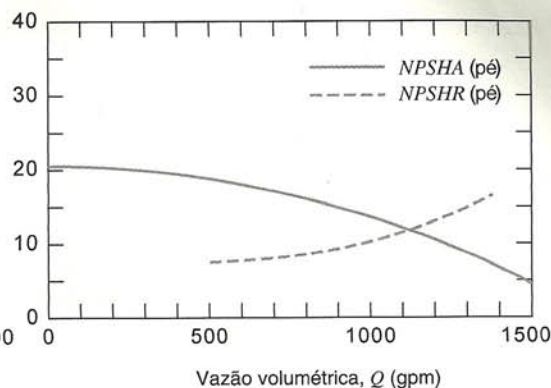
$$NPHSA = H_s + \frac{\bar{V}_s^2}{2g} - H_v$$

A pressão de vapor da água a 80°F é $p_v = 0{,}507$ psia. A altura correspondente é $H_v = 1{,}17$ pé de água. Assim

$$NPSHA = 26{,}7 + 3{,}98 - 1{,}17 = 29{,}5\,\text{pés} \longleftarrow \quad NPSHA$$

A curva da bomba (Fig. D.3, Apêndice D) mostra que para 1000 gpm a bomba requer

$$NPSHR = 10{,}0\,\text{pés} \longleftarrow \quad NPSHR$$

Resultados de cálculos semelhantes para água a 80°F são plotados à esquerda na figura abaixo. (Valores de *NPSHR* são obtidos das curvas da bomba na Fig. D.3, Apêndice D.)

(*a*) Altura de carga de sucção positiva líquida, água a 80°F (*b*) Altura de carga de sucção positiva líquida, água a 180°F

Resultados de cálculos para água a 180°F são plotados à direita na figura anterior. A pressão de vapor para água a 180°F é p_v = 7,51 psia. A altura correspondente é H_v = 17,3 pés de água. Essa pressão alta de vapor reduz o *NPSHA*, como mostrado no gráfico.

Os gráficos mostram que o *NPSHA* decresce à medida que a vazão volumétrica aumenta, como um resultado das perdas de carga no sistema de admissão da bomba.

O *NPSHR* para qualquer bomba aumenta com o aumento da vazão volumétrica por causa do aumento das velocidades locais do fluido dentro da bomba, criando pressões localmente reduzidas e uma tendência à cavitação. O *NPSHA* deve exceder o *NPSHR* para prevenir cavitação e permitir operação satisfatória da bomba.

Para água a 80°F, a curva de *NPSHA* encontra-se confortavelmente acima do *NPSHR* da bomba para todas as vazões. (De acordo com a Fig. D.3, a bomba tem melhor eficiência em torno de 900 gpm; ela provavelmente não seria operada acima de 1000 gpm.)

Para água a 180°F, as curvas de *NPSHA* e de *NPSHR* cruzam-se em aproximadamente 1100 gpm. Portanto, a operação dessa bomba e do sistema de escoamento seria satisfatório, mesmo com água a 180°F.

10.5 APLICAÇÕES A SISTEMAS DE FLUIDOS

Definimos um *sistema de fluido* como a combinação de uma máquina de fluxo e uma rede de tubos ou canais que conduzem o fluido. A aplicação técnica de máquinas de fluxo em um sistema real exige uma combinação adequada das características da máquina com as do sistema, e atendimento simultâneo de condições de eficiência energética, economia de capital e durabilidade. Já fizemos menção à enorme gama de equipamentos oferecidos por fabricantes competidores; essa variedade confirma a importância comercial das máquinas de fluxo nos modernos sistemas de engenharia.

Usualmente, é mais econômico especificar uma máquina produzida em série do que uma sob encomenda, porque os produtos de fabricantes já estabelecidos têm características de desempenho conhecidas e publicadas, e eles devem ser duráveis para que sobrevivam no mercado. A engenharia de aplicação consiste em fazer a melhor seleção a partir de catálogos de produtos disponíveis. Além de curvas características de máquinas, todos os fabricantes fornecem abundantes dados dimensionais, configurações alternativas e esquemas de montagem, e boletins técnicos de orientação quanto à aplicação dos seus produtos.

Esta seção consiste de uma breve revisão da teoria relevante, seguida de exemplos de aplicações usando dados tirados de literatura dos fabricantes. Duas seções tratam de máquinas que absorvem trabalho (bombas, ventiladores, sopradores, compressores e hélices) e de máquinas que produzem trabalho (turbinas e moinhos). Curvas de desempenho selecionadas para bombas centrífugas e ventiladores são apresentadas no Apêndice D. Elas podem ser estudadas como exemplos típicos de dados de desempenho fornecidos por fabricantes. As curvas também podem ser empregadas para ajudar na seleção de equipamentos e na solução de problemas de projeto de sistemas no final do capítulo.

10.5.1 Máquinas Absorvedoras de Trabalho

A curva pressão-vazão do sistema representa a relação entre a pressão aplicada ao sistema e à vazão. O sistema operará na combinação de altura de carga e vazão para a qual o desempenho da máquina encaixa-se exatamente com o requisito do sistema. Graficamente, as curvas pressão-vazão do sistema e da máquina podem ser superpostas.[7] Dessa maneira, a interseção da curva de pressão-vazão do sistema com a curva de pressão-capacidade da máquina define o ponto de operação da máquina e do sistema.

O requisito de pressão do sistema, para uma dada vazão, é composto da queda de pressão por atrito (perdas distribuídas devidas ao atrito em trechos retos de área constante e perdas localizadas devidas a entradas, acessórios, válvulas e saídas) e das variações de pressão decorrentes da gravidade (a elevação estática pode ser positiva ou negativa). É útil discutir os dois casos limite, de atrito puro e de elevação pura, antes de considerar suas combinações.

A curva de pressão *versus* vazão do sistema de *atrito puro*, sem elevação estática, começa com vazão e altura de carga nulas, conforme mostrado na Fig. 10.19*a*. A queda de pressão por atrito no escoamento turbulento (o regime usual nos sistemas de engenharia), varia conforme a vazão elevada a uma potência entre

[7] Para fins de ilustração, usamos a noção de superpor graficamente as curvas. A combinação do sistema de fluido também pode ser feita analítica ou numericamente, aplicando equações de ajuste à curva de pressão-vazão do sistema e à curva característica da máquina.

(a) Queda de pressão puramente por atrito

(b) Combinação de variações de pressão por atrito e por gravidade

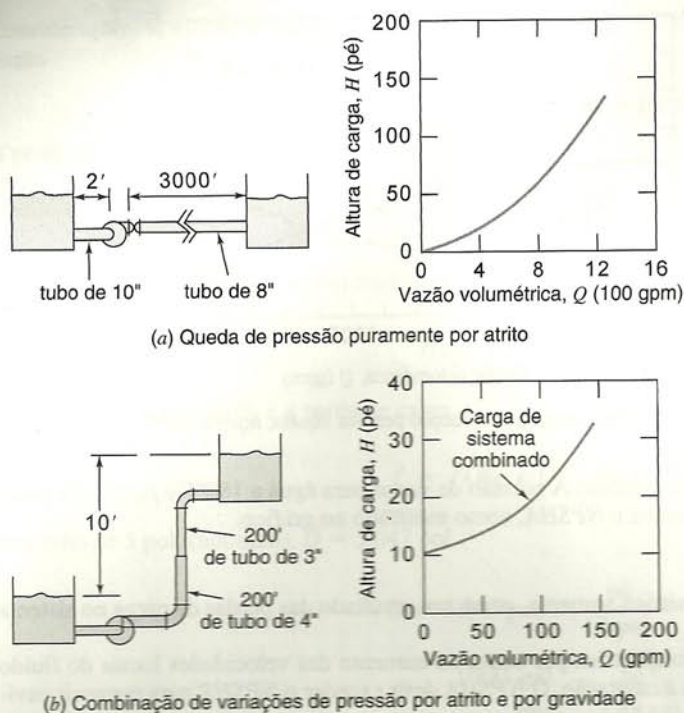



Fig. 10.19 Diagramas esquemáticos ilustrando os tipos básicos de curvas de altura de carga *versus* vazão de sistemas (adaptados de [8]).

1,75 e 2; logo, essa curva de sistema é aproximadamente parabólica. A curva de sistema com atrito puro torna-se mais íngreme à medida que a vazão aumenta. Para desenvolver a curva de atrito, as perdas são calculadas para diversas vazões e em seguida plotadas.

A variação de pressão decorrente da diferença de cotas é independente da vazão. Assim, a curva pressão-vazão para o sistema de *elevação pura* é uma linha reta horizontal. A pressão decorrente da gravidade é avaliada a partir da variação de cota do sistema.

Todos os sistemas reais têm alguma queda de pressão por atrito e alguma variação de cota. Assim, todas as curvas pressão-vazão de sistemas podem ser consideradas como a soma de uma componente de atrito e outra de diferença de cota. A altura de carga para o sistema completo, para qualquer vazão, é a soma das alturas de carga de atrito e de diferença de cota. A curva pressão-vazão de um sistema completo é apresentada na Fig. 10.19*b*.

Se a curva resultante é *íngreme* ou *plana* depende da importância relativa do atrito e da gravidade. A queda por atrito pode ser relativamente sem importância no suprimento de água para um edifício muito alto (por exemplo, a Torre Sears em Chicago, que tem aproximadamente 400 m de altura); a diferença de cota pode ser desprezível num sistema de ventilação de um edifício de um só andar.

Na aplicação da primeira lei da termodinâmica (empregando a noção de perda de carga, Eq. 8.28) ao sistema total, a energia por unidade de massa, h_a, adicionada pela máquina deve ser incluída como uma entrada de energia. A equação de cálculo torna-se então

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + g z_1 + h_a = \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2} + g z_2 + h_{l_T} \tag{10.24a}$$

Dividindo por g obtém-se

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + z_1 + H_a = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + \frac{h_{l_T}}{g} \tag{10.24b}$$

onde H_a é a energia por unidade de peso (isto é, a carga, com dimensões de L) adicionada pela máquina.

a. Bombas

O ponto de operação de uma bomba é definido pela superposição da curva do sistema e da curva de desempenho da máquina, conforme mostrado na Fig. 10.20. O ponto de interseção é a única situação em que as vazões e as alturas de carga do sistema e da bomba são iguais simultaneamente. O procedimento usado para determinar o ponto de operação de um sistema de bombeamento é ilustrado no Problema-Exemplo 10.9.

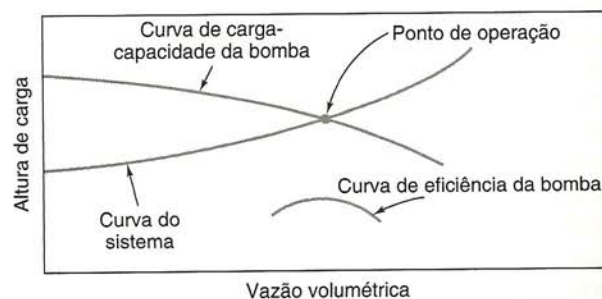



Fig. 10.20 Curvas superpostas de altura-vazão para o sistema e de altura-capacidade para a bomba.

EXEMPLO 10.9 — Determinando o Ponto de Operação de um Sistema de Bombeamento

A bomba do Problema-Exemplo 10.7, operando a 1750 rpm, é usada para bombear água através do sistema da Fig. 10.19*a*. Desenvolva uma expressão algébrica para a forma geral da curva de resistência do sistema. Calcule e plote a curva de resistência do sistema. Resolva graficamente para o ponto de operação do sistema. Obtenha uma expressão analítica aproximada para a curva de resistência do sistema. Resolva analiticamente para o ponto de operação do sistema.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.9

DADOS: Bomba do Problema-Exemplo 10.7, operando a 1750 rpm, com $H = H_0 - AQ^2$, onde $H_0 = 55{,}9$ pés e $A = 3{,}44 \times 10^{-5}$ pé/(gpm)². Sistema da Fig. 10.19*a*, onde $L_1 = 2$ pés de tubo com $D_1 = 10$ pol. e $L_2 = 3000$ pés de tubo com $D_2 = 8$ pol., transportando água entre dois grandes reservatórios cujas superfícies estão no mesmo nível.

DETERMINAR: (a) Uma expressão algébrica geral para a curva de carga do sistema.
(b) A curva de carga do sistema por cálculo direto.
(c) O ponto de operação do sistema usando uma solução gráfica.
(d) Uma expressão analítica *aproximada* para a curva de carga do sistema.
(e) O ponto de operação do sistema usando a expressão analítica determinada em (d).

SOLUÇÃO:
Aplique a equação da energia para o sistema de escoamento da Fig. 10.19*a*.
Equações de cálculo:

$$\frac{p_0}{\rho g} + \alpha_0 \frac{\bar{V}_0^2}{2g} + z_0 + H_a = \frac{p_3}{\rho g} + \alpha_3 \frac{\bar{V}_3^2}{2g} + z_3 + \frac{h_{l_T}}{g} \qquad (10.24b)$$

onde z_0 e z_3 são as cotas das superfícies dos reservatórios de suprimento e de descarga, respectivamente.

Considerações: (1) $p_0 = p_3 = p_{atm}$
(2) $V_0 = V_3 = 0$
(3) $z_0 = z_3$ (dados)

Somando, obtemos

$$H_a = \frac{h_{l_T}}{g} = \frac{h_{lT_{01}}}{g} + \frac{h_{lT_{23}}}{g} = H_{l_T}$$

onde seções ① e ② são localizadas justo a montante e a jusante da bomba, respectivamente.
O total das perdas de carga é a soma das perdas distribuídas com as perdas localizadas, logo

$$h_{lT_{01}} = K_{ent} \frac{\bar{V}_1^2}{2} + f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{\bar{V}_1^2}{2} = \left(K_{ent} + f_1 \frac{L_1}{D_1}\right) \frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

$$h_{lT_{23}} = f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{\bar{V}_2^2}{2} + K_{saída} \frac{\bar{V}_2^2}{2} = \left(f_2 \frac{L_2}{D_2} + K_{saída}\right) \frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

Da continuidade, $\bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_2 A_2$, logo $\bar{V}_1 = \bar{V}_2 \frac{A_2}{A_1} = \bar{V}_2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$.

Substituindo dá

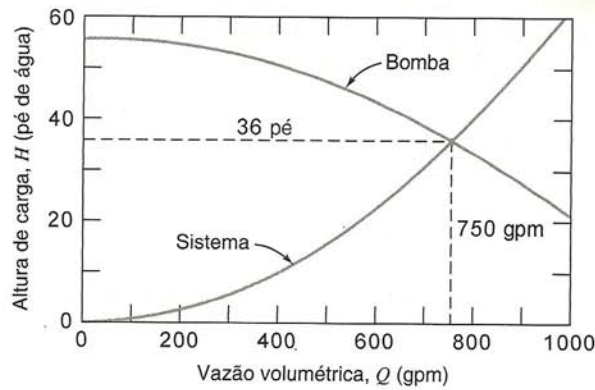
$$H_a = \left(K_{ent} + f_1 \frac{L_1}{D_1}\right) \frac{\bar{V}_2^2}{2g} \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 + \left(f_2 \frac{L_2}{D_2} + K_{saída}\right) \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

ou, após simplificação,

$$H_a = \left[\left(K_{ent} + f_1 \frac{L_1}{D_1}\right)\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 + f_2 \frac{L_2}{D_2} + K_{saída}\right] \frac{\bar{V}_2^2}{2g} \qquad H_a$$

Essa é a relação geral para a curva de carga do sistema. Ela mostra que a altura de carga adicionada pela bomba deve igualar a perda de carga total do sistema, a qual é a soma das perdas de carga de atrito no sistema. Calcule e tabule para diversas vazões em volume:

Q (gpm)	$\bar{V}_1$ (pé/s)	Re_1 (1000)	f_1 (—)	$\bar{V}_2$ (pé/s)	Re_2 (1000)	f_2 (—)	H_a (pé)
0	0,00	0	—	0,00	0	—	0
100	0,41	32	0,026	0,64	40	0,026	1
200	0,82	63	0,023	1,28	79	0,024	3
300	1,23	95	0,022	1,91	119	0,023	6
400	1,63	127	0,022	2,55	158	0,022	10
500	2,04	158	0,021	3,19	198	0,022	16
600	2,45	190	0,021	3,83	238	0,022	23
700	2,86	222	0,021	4,47	277	0,022	31
800	3,27	253	0,021	5,11	317	0,022	40
900	3,68	285	0,021	5,74	356	0,022	51
1000	4,09	317	0,021	6,38	396	0,022	62
1100	4,49	348	0,021	7,02	435	0,021	75
1200	4,90	380	0,021	7,66	475	0,021	89
1300	5,31	412	0,020	8,30	515	0,021	105
1400	5,72	443	0,020	8,94	554	0,021	121
1500	6,13	475	0,020	9,57	594	0,021	139

As curvas da bomba e de resistência do sistema estão plotadas abaixo:

A solução gráfica é mostrada na figura. No ponto de operação, $H \approx 36$ pés e $Q \approx 750$ gpm.

A expressão analítica aproximada para a curva de carga do sistema é deduzida como segue. Se o escoamento tiver número de Reynolds elevado, ele estará no regime totalmente rugoso. Então, os fatores de atrito serão constantes e

$$H = Z_0 + CQ^2$$

onde $Z_0 = z_3 - z_0$ e $C = 8/\pi^2 D_2^4 g$ vezes o termo entre colchetes da equação geral de H, dada anteriormente. Para este escoamento, $Z_0 = 0$ e $C = 6{,}17 \times 10^{-5}$ pé/(gpm)^2. Assim, a expressão analítica para a curva do sistema é

$$H = 6{,}17 \times 10^{-5}\ \text{pé/(gpm)}^2 [Q\ \text{(gpm)}]^2 \qquad H$$

A equação da curva da bomba e a equação da curva de carga do sistema são resolvidas simultaneamente a fim de determinar o ponto de operação do sistema. Dessa forma

$$H_p = H_0 - A\,Q^2 = C\,Q^2$$

Resolvendo para Q, a vazão em volume no ponto de operação, obtém-se

$$Q = \left[\frac{H_0}{A + C}\right]^{1/2}$$

Para este caso,

$$Q = \left[55{,}9\ \text{pé} \times \frac{\text{(gpm)}^2}{(3{,}44 \times 10^{-5} + 6{,}17 \times 10^{-5})\ \text{pé}}\right]^{1/2} = 763\ \text{gpm} \qquad Q$$

A vazão em volume pode ser levada em qualquer uma das expressões da carga para calcular a altura de carga no ponto de operação como

$$H = C\,Q^2 = 6{,}17 \times 10^{-5}\ \frac{\text{pé}}{\text{(gpm)}^2}\ (763)^2\ \text{(gpm)}^2 = 35{,}9\ \text{pé} \qquad H$$

A comparação dos resultados mostra que as duas soluções diferem de cerca de 0,3% na altura de carga e de 1,7% na vazão mássica. Quando recordamos que o cálculo da carga do sistema dependia de coeficientes de fluxo em tubos com precisão de aproximadamente ± 10%, concluímos que isso é aceitável.

{O propósito desse problema foi ilustrar os procedimentos usados para determinar o ponto de operação de uma bomba e de um sistema de escoamento usando métodos de solução analíticos e gráficos. O exemplo mostra que qualquer um dos métodos pode ser utilizado para obter resultados dentro da precisão de engenharia.}

As formas de ambas as curvas, da bomba e do sistema, podem ser importantes para a estabilidade do sistema em certas aplicações. A curva da bomba mostrada na Fig. 10.20 é típica daquela para uma bomba centrífuga nova, de velocidade específica intermediária, para a qual a pressão ou altura de carga decresce suave e regularmente à medida que a vazão é aumentada, a partir da condição de bloqueio. Dois efeitos ocorrem gradualmente à medida que o sistema envelhece: a bomba desgasta-se e seu desempenho cai (a curva da bomba move-se gradualmente para baixo no sentido de uma pressão mais baixa, para cada valor de vazão) e a resistência do sistema aumenta (a curva do sistema move-se gradualmente para cima no sentido de uma pressão mais alta, para cada valor de vazão, por causa do envelhecimento dos tubos[8]). O efeito dessas alterações com o tempo é mover o ponto de operação no sentido de vazões mais baixas. A magnitude da alteração na vazão depende das formas das curvas da bomba e do sistema.

Os efeitos do desgaste da bomba sobre sua capacidade são comparados, na Fig. 10.21, para curvas de sistema íngreme e

[8] Com o envelhecimento dos tubos, depósitos minerais formam-se nas paredes (veja a Fig. 8.14), aumentando a rugosidade relativa e reduzindo o diâmetro do tubo, quando comparado com a condição de novo. Veja o Problema 10.57 para dados típicos de fator de atrito.

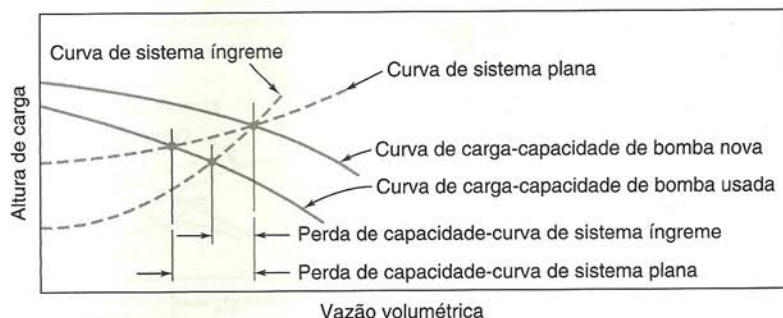
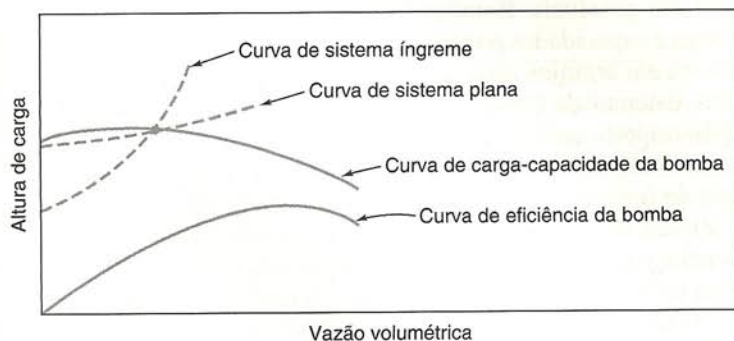



Fig. 10.21 Efeito do desgaste da bomba na vazão para o sistema.

plana. A perda na capacidade é maior para o sistema de curva plana do que para aquele de curva íngreme.

A curva de eficiência da bomba também está traçada na Fig. 10.20. O ponto de operação original do sistema é geralmente escolhido de modo a coincidir com a eficiência máxima, por meio de uma cuidadosa escolha do tamanho da bomba e da sua velocidade. O desgaste da bomba aumenta os vazamentos internos, com conseqüentes reduções da vazão e da eficiência máxima. Além disso, conforme mostrado na Fig. 10.21, o ponto de operação move-se no sentido de vazões mais baixas, afastado do ponto de eficiência máxima. Desta forma, a redução do desempenho do sistema pode não ser acompanhada de redução no consumo de energia.

Às vezes é necessário satisfazer um requisito de altura de carga elevada e baixa vazão; isto força a seleção de uma bomba com baixa velocidade específica. Tal bomba pode ter uma curva de desempenho com uma altura de carga ligeiramente ascendente próximo da condição de bloqueio, conforme mostrado na Fig. 10.22. Quando a curva do sistema é íngreme, o ponto de operação é bem definido e não deveriam surgir problemas com a operação. No entanto, o uso dessa bomba com um sistema de curva plana poderia facilmente causar problemas, em particular se a curva real do sistema estivesse ligeiramente acima da curva calculada, ou a vazão da bomba estivesse abaixo do desempenho previsto no gráfico de altura *versus* vazão.

Se houver dois pontos de interseção das curvas da bomba e do sistema, esse poderá operar em qualquer um deles, dependendo das condições de partida (*startup*); uma perturbação poderia causar a mudança para o segundo ponto de interseção. Sob certas condições, o ponto de operação do sistema pode alternar entre os dois pontos de interseção, provocando escoamento não permanente e desempenho insatisfatório.

Em vez de uma só bomba de baixa velocidade específica, uma bomba de múltiplos estágios pode ser empregada nessa situação. Uma vez que a vazão através de todos os estágios é a mesma, mas a altura de carga por estágio é menor do que aquela na unidade de um só estágio, a velocidade específica da bomba de estágios múltiplos é maior (veja a Eq. 7.6a).

A curva característica altura-vazão de algumas bombas de alta velocidade específica mostra um declive para capacidades abaixo do ponto de eficiência máxima, conforme mostrado na Fig. 10.23. É preciso cuidado na aplicação de tais bombas se for necessário operá-las no declive da curva de altura de carga *versus* vazão ou próximo dele. Nenhum problema deve ocorrer se a característica do sistema for íngreme, visto que haverá apenas um ponto de interseção com a curva da bomba. A menos que a interseção seja próxima do ponto *B*, o sistema retornará à operação estável, em regime permanente, após qualquer perturbação transiente.

A operação com uma curva de sistema plana é mais problemática. É possível ter um, dois ou mais pontos de interseção das curvas da bomba e do sistema, como sugerido na figura. Com a curva de sistema plana, a bomba pode oscilar, periodicamente ou não.

Diversos outros fatores podem influenciar adversamente o desempenho da bomba: bombear líquidos quentes com vapor entranhado e líquidos de alta viscosidade. De acordo com [5], a presença de pequenas quantidades de gás arrastado pode reduzir o desempenho drasticamente. Apenas 4% de vapor podem reduzir a capacidade da bomba em mais de 40%. O ar pode penetrar pelo lado da aspiração do circuito de bombeamento, onde a pressão é inferior à atmosférica, se houver qualquer vazamento presente.

É necessária uma submersão adequada do tubo de aspiração a fim de impedir a entrada de ar. Submersão insuficiente pode

Fig. 10.22 Operação de bomba de baixa velocidade específica próximo da condição de bloqueio.

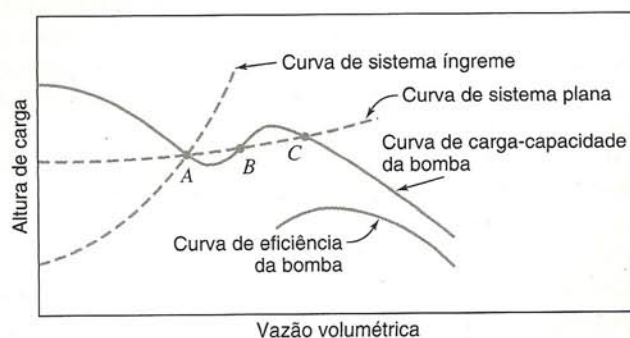



Fig. 10.23 Operação de uma bomba de alta velocidade específica próximo do declive.

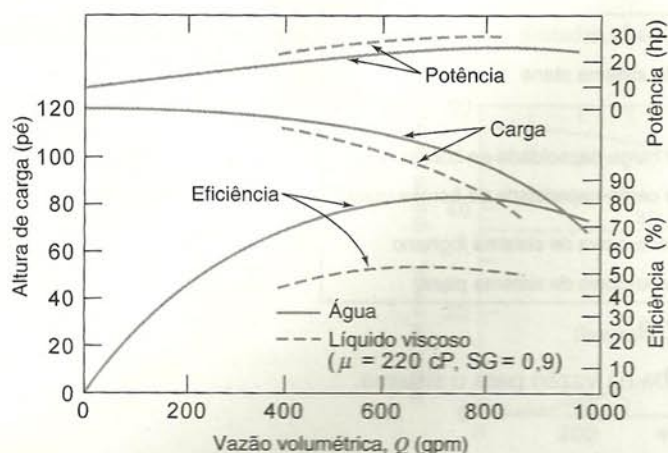



Fig. 10.24 Efeito da viscosidade do líquido no desempenho de uma bomba centrífuga [5].

causar um vórtice no tubo de entrada. Se o vórtice for intenso, poderá haver penetração de ar no tubo de sucção. As referências 16 e 17 dão diretrizes gerais para um projeto adequado do poço de aspiração com o objetivo de eliminar a probabilidade de formação de vórtices.

O aumento de viscosidade do fluido pode reduzir drasticamente o desempenho de uma bomba centrífuga [17]. Resultados de testes experimentais típicos são apresentados graficamente na Fig. 10.24. Na figura, o desempenho da bomba com água ($\nu = 1$ cP) é comparado com o desempenho no bombeamento de um líquido mais viscoso ($\nu = 220$ cP). O aumento de viscosidade reduz a altura de carga produzida pela bomba. Ao mesmo tempo, o requisito de potência de alimentação da bomba é aumentado. O resultado é uma queda acentuada na eficiência da máquina para todos os valores de vazão.

O aquecimento de um líquido eleva a sua pressão de vapor. Dessa forma, o bombeamento de um líquido quente requer pressão adicional na admissão da bomba para prevenir cavitação. (Veja Problema-Exemplo 10.8.)

Em alguns sistemas, tais como o abastecimento de água em cidades ou circulação de água gelada, pode haver uma larga faixa na demanda com uma resistência de sistema relativamente constante. Nesses casos, é possível operar bombas de velocidade constante em série ou em paralelo, a fim de atender aos requisitos do sistema, sem dissipação excessiva de energia no estrangulamento da descarga. Duas ou mais bombas podem ser operadas em paralelo ou em série de modo a fornecer vazão para condições de alta demanda, e um número menor de unidades pode ser usado quando a demanda for baixa.

Para bombas em *série*, a curva combinada de desempenho é obtida somando os aumentos de pressão ou altura para cada vazão (Fig. 10.25). O ganho na vazão quando se opera bombas em série, depende da resistência do sistema que está sendo suprido. Para duas bombas em série, a vazão aumentará para qualquer altura de carga do sistema. As curvas características para uma bomba e para duas bombas idênticas em série são:

$$H_1 = H_0 - A\,Q^2$$

e

$$H_{2s} = 2(H_0 - A\,Q^2) = 2H_0 - 2A\,Q^2$$

A Fig. 10.25 é uma ilustração esquemática da aplicação de duas bombas idênticas em série. Um ajuste razoável ao requisito do

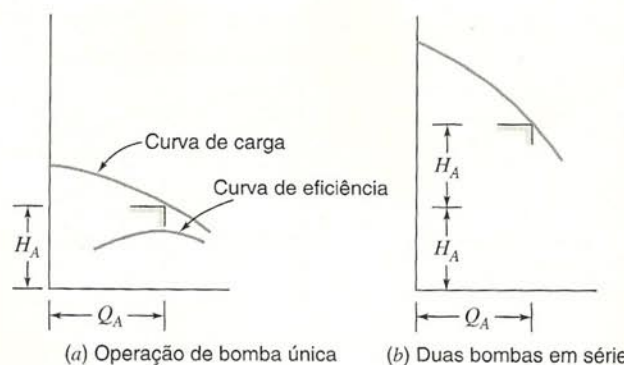



Fig. 10.25 Operação de duas bombas centrífugas em série.

sistema é possível — ao mesmo tempo que a eficiência é manti da elevada — se a curva do sistema for relativamente íngreme

Num sistema real, não é apropriado simplesmente conecta duas bombas em série. Se apenas uma bomba fosse motorizada o escoamento através da segunda, não motorizada, causaria per das adicionais, aumentando a resistência do sistema. Também conveniente arranjar as bombas e a tubulação de forma que cad bomba possa ser retirada do circuito para manutenção, reparo ou substituição, quando necessário. Assim, um sistema de con torno ou de *bypass*, com válvulas de bloqueio e de retenção, pod ser necessário numa instalação real [13, 17].

Bombas podem ser combinadas em *paralelo* também. A cur va resultante de desempenho, mostrada na Fig. 10.26, é obtid pela adição das capacidades de cada bomba, para cada valor d altura de carga. As curvas características para uma bomba e par duas bombas idênticas em paralelo, são:

$$H_1 = H_0 - A\,Q^2$$

e

$$H_{2p} = H_0 - A\left(\frac{Q}{2}\right)^2 = H_0 - \frac{1}{4}A\,Q^2$$

O esquema na Fig. 10.26 mostra que a combinação em paralel pode ser utilizada de modo mais efetivo para aumentar a capacidade do sistema quando a curva deste é relativamente plana.

Uma instalação real com bombas em paralelo também reque mais imaginação para permitir operação satisfatória com apenas uma bomba motorizada. É necessário impedir o refluxo através da bomba que não é motorizada. Para prevenir refluxo e para permitir a remoção da bomba, uma configuração de tubulação mais complexa e dispendiosa é necessária.

Muitos outros arranjos de tubulação e combinações de bombas são possíveis. Bombas de diferentes tamanhos, alturas de carga e capacidades podem ser combinadas em série, em paralelo, ou em arranjos série-paralelo. Obviamente, a complexidade dos sistemas de tubulação e de controle aumenta rapidamente. Não importa qual o arranjo ou o número de bombas, um sistema com bombas distintas operada a velocidade constante não é capaz de fornecer vazão continuamente variada sem o emprego de válvulas de estrangulamento. O controle sem válvulas só é possível em passos discretos, de acordo com a combinação específica de bombas acionadas por motor a qualquer tempo.

O uso de operação de velocidade variável permite controle infinitamente variável da vazão no sistema com alta eficiência energética e sem a complexidade de encanamentos extras. Uma outra vantagem é que um sistema de acionamento com velocidade

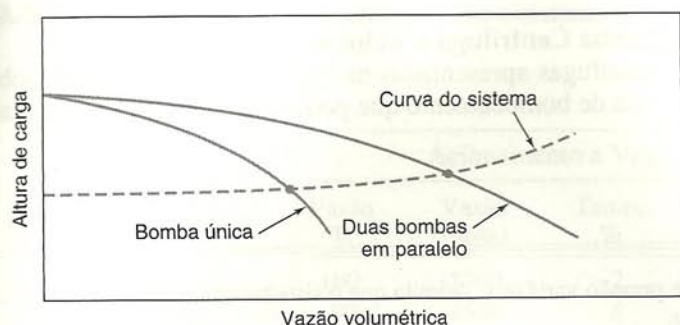



Fig. 10.26 Operação de duas bombas centrífugas em paralelo.

variável oferece controle de vazão no sistema mais simplificado. O custo de sistemas eficientes de acionamento com velocidade variável continua a decrescer por causa dos progressos em circuitos e componentes de eletrônica de potência. A vazão no sistema pode ser controlada pela variação da velocidade de operação da bomba com expressiva economia de potência de bombeamento e de consumo de energia. A Tabela 10.1 [18] ilustra a redução de potência de alimentação oferecida pelo acionamento a velocidade variável. Para 1100 gpm, a potência de entrada é reduzida de quase 54% para o sistema de velocidade variável; para 600 gpm, a redução na potência é superior a 75%.

A redução no requisito de potência, nas pequenas vazões, com o acionamento a velocidade variável, é impressionante. A economia de energia e, por conseguinte, de custos, depende do ciclo de serviço específico no qual a máquina opera. A referência 18 apresenta informações sobre o ciclo médio de serviço para bombas centrífugas usadas na indústria de processo químico; a Fig. 10.27 mostra o histograma desses dados. O gráfico mostra que, embora o sistema deva ser projetado e instalado para oferecer capacidade nominal plena, isso raramente ocorre. Em vez disso, mais da metade do tempo o sistema opera a 70% de sua capacidade ou abaixo. A economia de energia que resulta do emprego de um acionamento a velocidade variável para esse ciclo de serviço é calculado no Problema-Exemplo 10.10.

Tabela 10.1 Requisitos de Potência para Bombas Acionadas a Velocidade Constante e a Velocidade Variável

Controle de Válvula de Estrangulamento com Motor de Velocidade Constante (1750 rpm)

Vazão (gpm)	Carga do Sistema (pé)	Eficiência da Válvula[a] (%)	Carga da Bomba (pé)	Eficiência da Bomba (%)	Potência da Bomba (bhp)	Eficiência do Motor (%)	Alimentação do Motor (hp)	Potência de Alimentação[b] (hp)
1700	180	100,0	180	80,0	96,7	90,8	106,5	106,7
1500	150	78,1	192	78,4	92,9	90,7	102,4	102,6
1360	131	66,2	198	76,8	88,6	90,7	97,7	97,9
1100	102	49,5	206	72,4	79,1	90,6	87,3	87,5
900	83	39,5	210	67,0	71,3	90,3	79,0	79,1
600	62	29,0	214	54,0	60,1	90,0	66,8	66,9

Acionamento a Velocidade Variável com Motor Eficiente

Vazão (gpm)	Carga de Bomba/Sistema (pé)	Eficiência da Bomba (%)	Potência da Bomba (bhp)	Velocidade do Motor (rpm)	Eficiência do Motor (%)	Alimentação do Motor (hp)	Eficiência do Controle (%)	Potência de Alimentação[b] (hp)
1700	180	80,0	96,7	1750	93,7	103,2	97,0	106,4
1500	150	79,6	71,5	1580	94,0	76,0	96,1	79,1
1360	131	78,8	57,2	1470	93,9	60,9	95,0	64,1
1100	102	78,4	36,2	1275	93,8	38,6	94,8	40,7
900	83	77,1	24,5	1140	92,3	26,5	92,8	28,6
600	62	72,0	13,1	960	90,0	14,5	89,1	16,3

[a]A eficiência da válvula é a razão entre a pressão do sistema e a pressão da bomba.
[b]A potência de alimentação é a potência do motor dividida pela eficiência de 0,998 do dispositivo de partida.

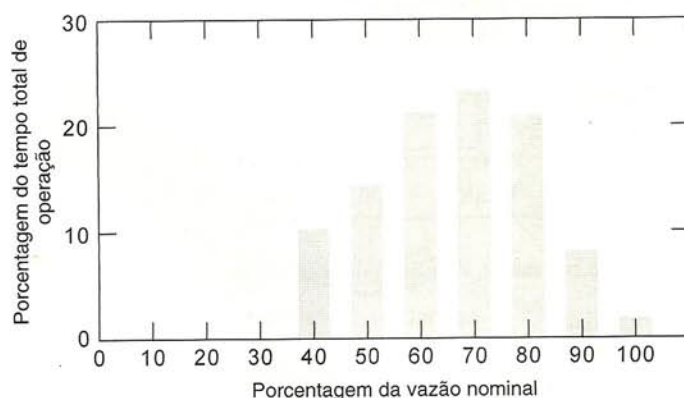



Fig. 10.27 Ciclo médio de serviço para bombas centrífugas nas indústrias química e do petróleo [18].

EXEMPLO 10.10 — Economia de Energia com Acionamento de Bomba Centrífuga a Velocidade Variável

Combine as informações sobre o ciclo médio de serviço de bombas centrífugas apresentadas na Fig. 10.27 com os dados sobre acionamento da Tabela 10.1. Estime a economia anual de custo de energia de bombeamento que poderia ser obtida implementando-se um sistema de acionamento a velocidade variável.

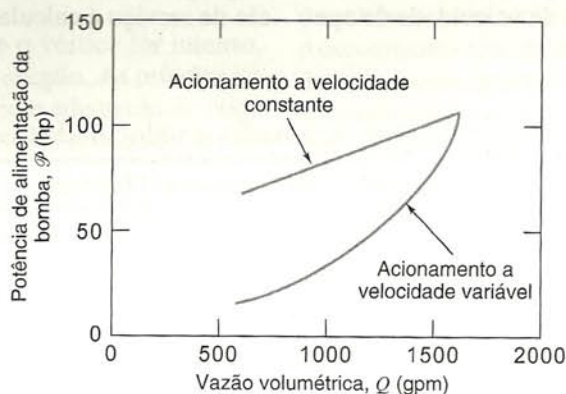
PROBLEMA-EXEMPLO 10.10

DADOS: Considere o sistema de bombeamento da Tabela 10.1, com vazão e pressão variáveis. Admita que o sistema opera no ciclo de serviço típico mostrado na Fig. 10.27, 24 horas por dia, durante todo o ano.

DETERMINAR: **(a)** Uma estimativa da redução anual de consumo de energia obtida com o acionamento a velocidade variável.
(b) Os custos de energia e a economia nos custos decorrentes da operação a velocidade variável.

SOLUÇÃO:

A operação em tempo integral significa 365 dias × 24 horas por dia, ou 8760 horas por ano. Assim, as porcentagens da Fig. 10.27 devem ser multiplicadas por 8760 para dar as horas de operação por ano.

Em primeiro lugar, trace um gráfico da potência absorvida pela bomba *versus* vazão, usando os dados da Tabela 10.1, a fim de permitir interpolação, conforme mostrado abaixo.

Ilustre o procedimento usando operação a 70% da vazão, como amostra de cálculo. Para vazão de 70%, a bomba fornece 0,7 × 1700 gpm = 1190 gpm. Do gráfico, a potência requerida pela bomba, para essa vazão, é de 91 hp para o acionamento a velocidade constante. Com essa vazão, a bomba opera 23% do tempo, ou 0,23 × 8760 = 2010 horas por ano. A energia total consumida nesse ponto de serviço é de 91 hp × 2010 h = $1{,}91 \times 10^5$ hp·h. A energia elétrica consumida é

$$E = 1{,}83 \times 10^5 \text{ hp} \cdot \text{h} \times \frac{0{,}746 \text{ kW} \cdot \text{h}}{\text{hp} \cdot \text{h}} = 1{,}37 \times 10^5 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

O custo correspondente de eletricidade [a \$0,08/(kW·h)] é

$$C = 1{,}37 \times 10^5 \text{ kW} \cdot \text{h} \times \frac{\$0{,}08}{\text{kW} \cdot \text{h}} = \$11.000$$

As seguintes tabelas foram preparadas usando cálculos semelhantes:

Acionamento a Velocidade Constante, 8760 h/ano					
Vazão (%)	Vazão (gpm)	Tempo (%)	Tempo (h)	Potência (hp)	Energia (hp·h)
100	1700	2	175	106	$1{,}86 \times 10^4$
90	1530	8	701	102	$7{,}15 \times 10^4$
80	1360	21	1840	98	$18{,}0 \times 10^4$
70	1190	23	2010	91	$18{,}3 \times 10^4$
60	1020	21	1840	83	$15{,}3 \times 10^4$
50	850	15	1310	77	$10{,}1 \times 10^4$
40	680	10	876	70	$6{,}13 \times 10^4$
				Total:	$76{,}8 \times 10^4$

O somatório da última coluna da tabela mostra que, para o sistema a velocidade constante, o consumo anual de energia é de $7{,}68 \times 10^5$ hp·h. O consumo de energia elétrica é

$$E = 7{,}68 \times 10^5 \text{ hp} \cdot \text{h} \times \frac{0{,}746 \text{ kW} \cdot \text{h}}{\text{hp} \cdot \text{h}} = 573.000 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

E_{VSD}

A \$0,08 por kW·h, o custo da energia para o sistema com acionamento a velocidade constante é

$$C = 573.000 \text{ kW} \cdot \text{h} \times \frac{\$0{,}08}{\text{kW} \cdot \text{h}} = \$45.800 \longleftarrow C_{VSD}$$

Acionamento a Velocidade Variável, 8760 h/ano

Vazão %	Vazão (gpm)	Tempo %	Tempo (h)	Potência (hp)	Energia (hp · h)
100	1700	2	175	106	$1{,}86 \times 10^4$
90	1530	8	701	83	$5{,}82 \times 10^4$
80	1360	21	1840	64	$11{,}8 \times 10^4$
70	1190	23	2010	49	$9{,}85 \times 10^4$
60	1020	21	1840	35	$6{,}44 \times 10^4$
50	850	15	1310	25	$3{,}28 \times 10^4$
40	680	10	876	19	$1{,}66 \times 10^4$
				Total:	$40{,}7 \times 10^4$

O somatório da última coluna da tabela mostra que, para o sistema com acionamento a velocidade variável, o consumo anual de energia é de $4{,}07 \times 10^5$ hp·h. O consumo de energia elétrica é

$$E = 4{,}07 \times 10^5 \text{ hp} \cdot \text{h} \times 0{,}746 \frac{\text{kW} \cdot \text{h}}{\text{hp} \cdot \text{h}} = 304.000 \text{ kW} \cdot \text{h} \longleftarrow E_{VSD}$$

A \$0,08 por kW·h, o custo da energia para o sistema com acionamento a velocidade variável é

$$C = 304.000 \text{ kW} \cdot \text{h} \times \frac{\$0{,}08}{\text{kW} \cdot \text{h}} = \$24.300 \longleftarrow C_{VSD}$$

Deste modo, nessa aplicação, o acionamento a velocidade variável reduz o consumo de energia em 269.000 kW·h (47%). A economia em custos financeiros é a expressiva quantia de \$21.500 por ano. Seria vantajosa a instalação de um sistema a velocidade variável mesmo a custo elevado. A economia de energia por ano é apreciável e continua por toda a vida do sistema.

O propósito desse problema foi ilustrar as economias de custo e de energia que podem ser obtidas com o emprego do acionamento de bombas a velocidade variável. Verificamos que os benefícios específicos dependem do sistema e do seu ciclo operacional.

b. Ventiladores, Sopradores e Compressores

Os ventiladores são projetados para trabalhar com ar ou vapor. Os tamanhos dos ventiladores variam desde aquele do resfriamento de um equipamento eletrônico, que move um metro cúbico de ar por hora e exige alguns watts de potência, até a máquina de ventilação de uma mina, que move milhares de metros cúbicos de ar por minuto e necessita de muitas centenas de quilowatts de potência. Os ventiladores são produzidos em variedades similares às das bombas: variam do fluxo radial (centrífugos) ao fluxo axial. Como as bombas, as formas da curva característica dependem do tipo de ventilador. Algumas curvas típicas de desempenho de ventiladores centrífugos são apresentadas no Apêndice D. Elas podem ser usadas na escolha de ventiladores para resolver alguns dos problemas de seleção de equipamento e projeto de sistema no final do capítulo.

Uma vista explodida de um ventilador centrífugo de tamanho médio é mostrada na Fig. 10.28. Nessa figura é apresentada alguma terminologia de uso comum para este tipo de máquina.

O aumento de pressão produzido por ventiladores é várias ordens de grandeza inferior ao provocado por bombas. Uma outra dife-

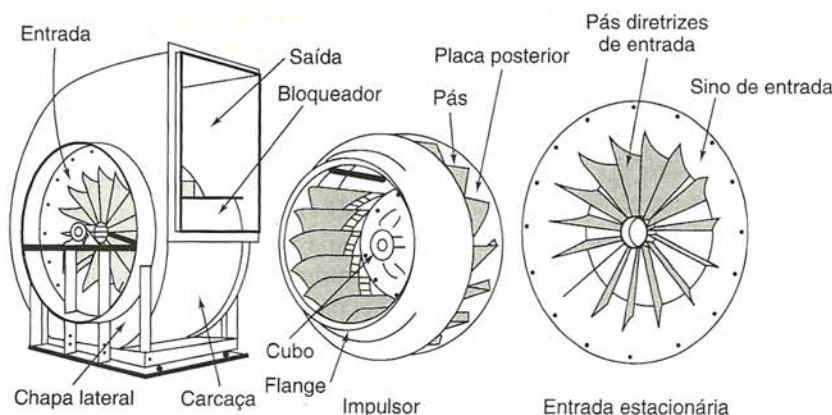



Fig. 10.28 Vista explodida de um ventilador centrífugo típico [19].

rença entre ventiladores e bombas é que a medição de vazão é mais difícil em gases e vapores do que em líquidos. Não há um método conveniente análogo ao "coletar o escoamento num balde" que pode testes de ventiladores exigem instalações e procedimentos especiais [6, 20]. Como o aumento de pressão causado por um ventilador é pequeno, é, em geral, impraticável medir a vazão com um dispositivo de restrição do fluxo, como uma placa de orifício, bocal medidor ou venturi. Pode ser necessário utilizar um ventilador auxiliar para desenvolver um aumento de pressão suficiente, de modo a permitir a medição da vazão com precisão aceitável com dispositivos de restrição. Uma alternativa é usar um duto instrumentado no qual a vazão é calculada por meio de um pitot transverso. Normas apropriadas devem ser consultadas para obter informações completas sobre métodos específicos de testes de ventiladores e procedimentos de redução de dados para cada aplicação [6, 20].

Por causa da pequena variação de pressão através de um ventilador, a pressão dinâmica na sua saída pode ser uma fração apreciável do aumento de pressão. Conseqüentemente, é necessário especificar com muito cuidado as bases sobre as quais as medições de pressão são feitas. Dados para aumentos de pressão estática e total, e para eficiência, baseada em ambos os aumentos de pressão, são, com freqüência, plotados no mesmo gráfico característico (Fig. 10.29).

As coordenadas podem ser plotadas em unidades físicas (p. ex., milímetros de água, metros cúbicos por minuto e quilowatt) ou como coeficientes adimensionais de fluxo e de pressão. A diferença entre as pressões total e estática é a pressão dinâmica, de modo que a distância vertical entre essas duas curvas é proporcional a Q^2.

Ventiladores centrífugos são utilizados com muita freqüência, por isso serão usados como exemplos. O ventilador centrífugo evoluiu dos projetos de rodas de pás simples, nos quais a roda consistia de um disco portando placas planas, radiais. (Essa forma primitiva ainda é empregada em ventiladores livres de depósitos de sujeira, como nos secadores comerciais de roupas.) Refinamentos levaram aos três tipos genéricos mostrados na Fig. 10.30*a* a *c*, com pás curvadas para trás, radiais encurvadas e curvadas para frente. Todos os ventiladores mostrados têm pás que são encurvadas nas suas bordas de admissão, a fim de aproximar-se do escoamento sem choque entre a pá e a direção do fluxo de entrada. Esses três projetos são típicos de ventiladores com pás de chapa metálica fina, que são relativamente simples de fabricar e, portanto, relativamente baratos. O projeto de pás curvadas para frente, ilustrado na figura, apresenta lâminas muito próximas; é muitas vezes chamado de ventilador tipo *gaiola de esquilo* por causa da sua semelhança com as rodas de exercício encontradas em gaiolas de animais.

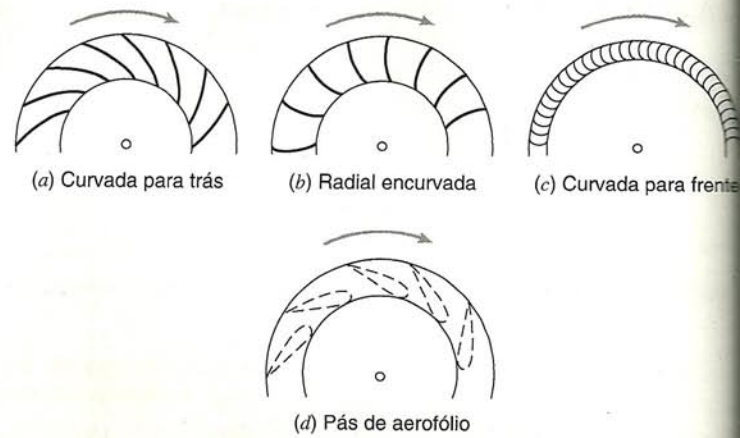



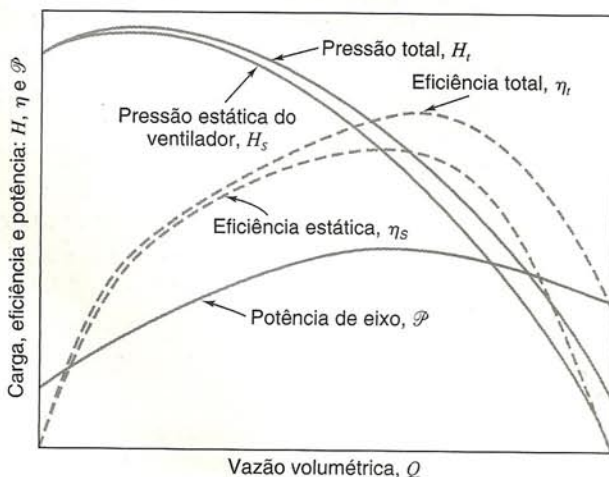
Fig. 10.30 Disposições típicas de pás utilizadas nos rotores de ventiladores centrífugos [21].

Fig. 10.29 Curvas características típicas para um ventilador com pás curvadas para trás [21].

À medida que os ventiladores tornam-se maiores em tamanho e em demanda de potência, a eficiência torna-se mais importante. As *pás de aerofólio* carenadas, mostradas na Fig. 10.30*d*, são muito menos sensíveis à direção do fluxo de entrada e aumentam a eficiência de forma notável, em comparação com as pás de chapa fina mostradas nos diagramas *a* a *c*. O custo adicional de pás de aerofólio para grandes ventiladores metálicos pode ser compensador dentro do ciclo de vida útil da máquina. As pás de aerofólio estão sendo empregadas com mais freqüência em pequenos ventiladores, à medida que impulsores de plástico moldado tornam-se comuns.

Como nas bombas, o aumento de pressão total através de um ventilador é aproximadamente proporcional à velocidade absoluta do fluido na saída do rotor. Por conseguinte, as curvas características produzidas pelas formas básicas de pás tendem a diferir umas das outras. As formas típicas das curvas são mostradas na Fig. 10.31, onde tanto o aumento de pressão quanto os requisitos de potência estão esboçados. Ventiladores com extremidades de pás curvadas para trás têm tipicamente uma curva de potência que atinge um máximo e em seguida decresce, à medida que a vazão aumenta. Se o motor do ventilador for dimensionado adequadamente de modo a comportar o pico de potência, é impossível sobrecarregá-lo com esse tipo de ventilador.

As curvas de potência para ventiladores com pás radiais e curvadas para frente sobem à medida que a vazão aumenta. Se o ponto de operação do ventilador for mais alto do que a vazão de projeto, o motor poderá ser sobrecarregado. Esses ventiladores não podem funcionar por longos períodos com baixos valores de contrapressão.

Ventiladores com pás curvadas para trás são melhores para instalações com elevada demanda de potência e operação contínua. O ventilador de pá curvada para frente é preferido quando o baixo custo inicial de instalação e o tamanho reduzido forem preponderantes, e o serviço for intermitente. As pás curvadas para frente requerem velocidades menores nas suas extremidades para produzir uma determinada altura de carga; uma menor velocidade periférica nas pás significa ruído reduzido. Dessa maneira, pás curvadas para frente podem ser especificadas para aplicações em aquecimento e ar condicionado a fim de minimizar o barulho.

(a) Pás curvadas para trás

(b) Pás radiais encurvadas

(c) Pás curvadas para frente

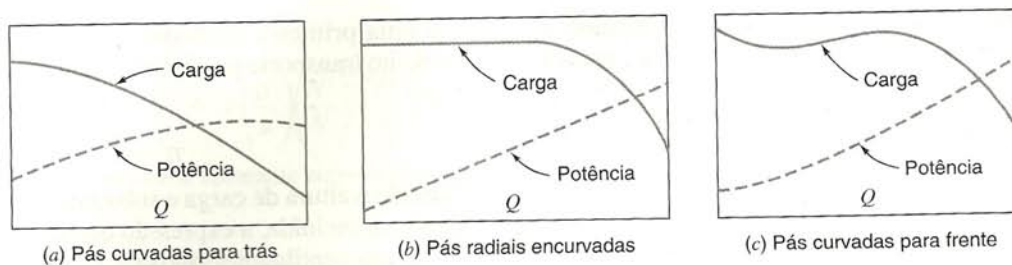



Fig. 10.31 Características gerais das curvas de desempenho para ventiladores centrífugos com pás curvadas para trás, radiais e curvadas para frente [21].

As curvas características para ventiladores de fluxo axial (*hélices*) diferem notavelmente daquelas dos ventiladores centrífugos. A curva de potência, Fig. 10.32, é especialmente diferente, visto que tende a decair continuamente à medida que a vazão aumenta. Dessa maneira, é impossível sobrecarregar um motor adequadamente dimensionado para um ventilador de fluxo axial.

O ventilador de hélice é utilizado com freqüência para ventilação; pode ser do tipo pedestal ou montado numa abertura, como um ventilador de exaustão de cozinha, sem dutos de entrada e de saída. Os ventiladores de fluxo axial em dutos têm sido estudados extensivamente e evoluíram para máquinas de alta eficiência [22]. Os projetos modernos, com pás de aerofólio, montados em dutos e muitas vezes dispondo de pás diretrizes, podem fornecer grandes volumes contra elevadas resistências e com alta eficiência. A deficiência primária do ventilador de fluxo axial é a inclinação não monotônica da curva característica de pressão: em certas faixas de vazão o ventilador pode pulsar. Devido ao fato de os ventiladores de fluxo axial tenderem a ter elevada velocidade de rotação, eles podem ser barulhentos.

A seleção e a instalação de um ventilador sempre requerem compromisso. Para minimizar o consumo de energia, é desejável operar um ventilador no seu ponto de eficiência máxima. Para reduzir o tamanho da máquina para uma dada capacidade, é tentador operar a uma vazão maior do que aquela da eficiência máxima. Numa instalação real, esta barganha deve ser feita levando em consideração fatores como espaço disponível, custo inicial e horas de operação por ano. Não é de bom senso operar um ventilador a uma vazão abaixo da eficiência máxima. Tal ventilador seria maior do que o necessário e alguns projetos, particularmente aqueles com pás curvadas para frente, podem ser instáveis e ruidosos quando operados nesta região.

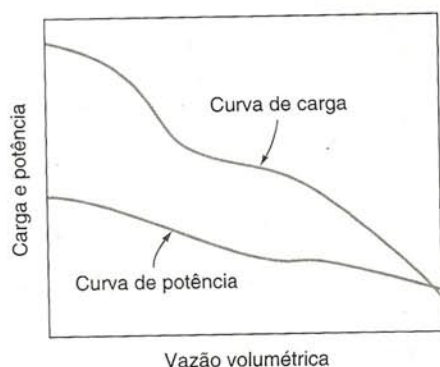



Fig. 10.32 Curvas características para um ventilador de fluxo axial típico [21].

É necessário considerar o sistema de duto tanto na entrada quanto na saída do ventilador a fim de desenvolver uma instalação satisfatória. Qualquer coisa que interrompa o escoamento uniforme na admissão do ventilador irá provavelmente prejudicar o desempenho. Um escoamento não uniforme na admissão causa operação assimétrica do rotor, podendo diminuir a capacidade drasticamente. Os redemoinhos também afetam adversamente o desempenho do ventilador. Quando ocorrem na direção da rotação, reduzem a pressão desenvolvida; na direção oposta à rotação, podem aumentar a potência de acionamento requerida.

O especialista em ventiladores pode não ter liberdade total para projetar o melhor sistema de escoamento para um ventilador. Algumas vezes um sistema deficiente de escoamento pode ser melhorado sem muito esforço acrescentando-se repartidores de fluxo ou retificando as palhetas de admissão. Alguns fabricantes oferecem pás diretrizes que podem ser instaladas com este propósito.

As condições de escoamento na descarga do ventilador também afetam o desempenho instalado. Todo ventilador produz escoamento não uniforme na descarga. Quando ligado a um trecho de duto reto, o escoamento torna-se mais uniforme e algum excesso de energia cinética é transformado em pressão estática. Se o ventilador descarregar diretamente num grande espaço, sem duto, o excesso de energia cinética do escoamento não uniforme é dissipado. Um ventilador, num sistema de escoamento sem duto de descarga, pode ficar bem aquém do desempenho medido em uma bancada de testes de laboratório.

A forma do escoamento na descarga do ventilador pode ser afetada pela quantidade de resistência presente a jusante. O efeito do sistema sobre o desempenho do ventilador pode ser diferente para os diversos pontos ao longo da curva de pressão *versus* vazão. Deste modo, pode não ser possível prever acuradamente o desempenho de um ventilador, *como instalado,* com base nas curvas medidas no laboratório.

As leis de escala podem ser aplicadas aos ventiladores, tanto para dimensões quanto para velocidades, usando os mesmos princípios básicos desenvolvidos para as máquinas de fluxo no Cap. 7. É possível que dois ventiladores operem com fluidos de massa específica significativamente diferentes[9] e, nesse caso, a pressão deve substituir a altura de carga como parâmetro dependente e a massa específica deve ser mantida nos grupos adimensionais. Os grupos adimensionais apropriados para análise de escala de ventilador são

$$\Pi_1 = \frac{Q}{\omega D^3}, \quad \Pi_2 = \frac{p}{\rho\omega^2 D^2}, \quad \text{e} \quad \Pi_3 = \frac{\mathscr{P}}{\rho\omega^3 D^5} \qquad (10.25)$$

[9] A massa específica dos gases de combustão que passam por um ventilador de tiragem induzida numa termoelétrica a vapor pode ser 40% inferior à massa específica do ar que passa pelo ventilador de tiragem forçada na mesma instalação.

Uma vez mais, a semelhança dinâmica é garantida quando os coeficientes de escoamento são igualados. Deste modo, quando

$$Q' = Q\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)\left(\frac{D'}{D}\right)^3 \qquad (10.26a)$$

então

$$p' = p\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{D'}{D}\right)^2 \qquad (10.26b)$$

e

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^3\left(\frac{D'}{D}\right)^5 \qquad (10.26c)$$

Como uma primeira aproximação, a eficiência do ventilador definido no transporte por escala é suposta permanecer constante, logo

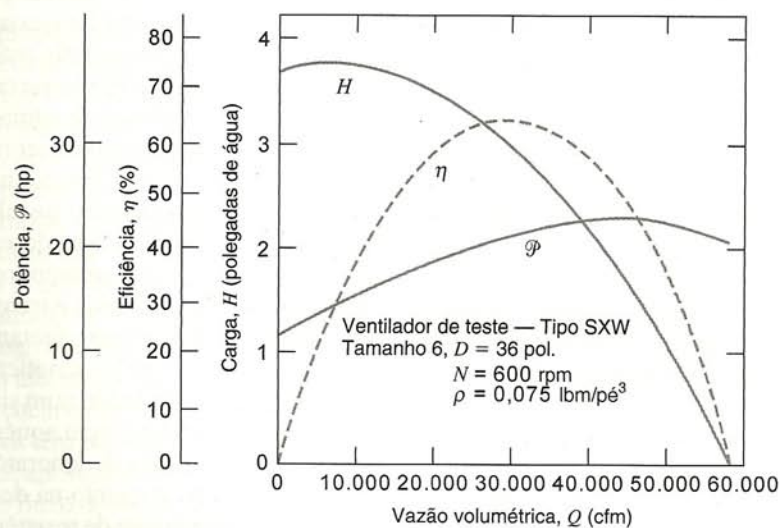
$$\eta' = \eta \qquad (10.26d)$$

Quando a altura de carga é substituída pela pressão e a massa específica é incluída, a expressão que define a velocidade específica de um ventilador torna-se

$$N_s = \frac{\omega Q^{1/2}\rho^{3/4}}{p^{3/4}} \qquad (10.27)$$

A aplicação das leis de escala a um ventilador com variação de massa específica é o assunto do Problema-Exemplo 10.11.

EXEMPLO 10.11 — Transportando por Escala o Desempenho de um Ventilador

Curvas de desempenho são dadas a seguir [21] para um ventilador centrífugo com $D = 36$ pol. e $N = 600$ rpm, conforme medido numa bancada de testes usando o ar com massa específica padrão ($\rho = 0{,}075$ lbm/pé^3). Transporte os dados por escala para prever o desempenho de um ventilador semelhante com $D' = 42$ pol., $N' = 1150$ rpm, e $\rho' = 0{,}045$ lbm/pé^3. Estime a vazão e a potência do ventilador maior quando ele opera a uma pressão de sistema equivalente a 7,4 pol. de H_2O. Verifique a velocidade específica do ventilador no novo ponto de operação.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.11

DADOS: Dados de desempenho, conforme mostrado, para o ventilador centrífugo com $D = 36$ pol., $N = 600$ rpm e $\rho = 0{,}075$ lbm/pé^3.

DETERMINAR: (a) O desempenho previsto de um ventilador geometricamente semelhante com $D' = 42$ pol., $N' = 1150$ rpm e com $\rho' = 0{,}045$ lbm/pé^3.
(b) Uma estimativa da vazão liberada e da potência requerida, se o ventilador maior operar contra uma resistência do sistema de 7,4 pol. de H_2O.
(c) A velocidade específica do ventilador maior nesse ponto de operação.

SOLUÇÃO:

Desenvolva as curvas de desempenho para a nova condição de operação transpondo os dados dos testes ponto por ponto. Usando as Eqs. 10.26 e os dados das curvas para $Q = 30.000$ cfm (pé^3/min.),* a nova vazão em volume é

$$Q' = Q\left(\frac{N'}{N}\right)\left(\frac{D'}{D}\right)^3 = 30.000 \text{ cfm}\left(\frac{1150}{600}\right)\left(\frac{42}{36}\right)^3 = 91.300 \text{ cfm}$$

O aumento de pressão do ventilador é

$$p' = p\frac{\rho'}{\rho}\left(\frac{N'}{N}\right)^2\left(\frac{D'}{D}\right)^2 = 2{,}96 \text{ pol.}H_2O\left(\frac{0{,}045}{0{,}075}\right)\left(\frac{1150}{600}\right)^2\left(\frac{42}{36}\right)^2 = 8{,}88 \text{ pol.}H_2O$$

* A unidade de vazão cfm (*cubic feet per minute*) será mantida no texto por ser de uso comum na engenharia. (*N.T.*)

e a nova potência requerida é

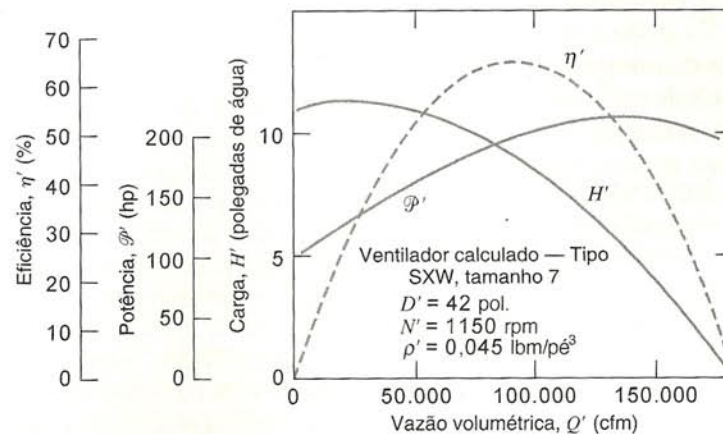
$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)\left(\frac{N'}{N}\right)^3\left(\frac{D'}{D}\right)^5 = 21{,}4\ \text{hp}\left(\frac{0{,}045}{0{,}075}\right)\left(\frac{1150}{600}\right)^3\left(\frac{42}{36}\right)^5 = 195\ \text{hp}$$

Admitimos que a eficiência permanece constante entre os dois pontos, logo

$$\eta' = \eta = 0{,}64$$

Cálculos similares para outros pontos de operação dão os resultados tabelados abaixo:

Q (cfm)	p (pol. H_2O)	$\mathcal{P}$ (hp)	η (%)	Q' (cfm)	p' (pol. H_2O)	$\mathcal{P}'$ (hp)
0	3,68	11,1	0	0	11,0	101
10.000	3,75	15,1	37	30.400	11,2	138
20.000	3,50	18,6	59	60.900	10,5	170
30.000	2,96	21,4	65	91.300	8,88	195
40.000	2,12	23,1	57	122.000	6,36	211
50.000	1,02	23,1	34	152.000	3,06	211
60.000	0	21,0	0	177.000	0	192

Para permitir a interpolação entre os pontos de referência, é conveniente traçar curvas dos resultados:

Da curva de pressão *versus* capacidade, o ventilador maior deveria fornecer 110.000 cfm a 7,4 pol. de H_2O de pressão no sistema, com uma eficiência de aproximadamente 61%.

Este ponto de operação está ligeiramente à direita do pico de eficiência para esse ventilador, logo é um ponto razoável de operação. A velocidade específica do ventilador nesse ponto de operação (em unidades usuais nos Estados Unidos) é

$$N_{s_{cu}} = \frac{(1150\ \text{rpm})(110.000\ \text{cfm})^{1/2}(0{,}045\ \text{lbm/pé}^3)^{3/4}}{(7{,}4\ \text{pol. H}_2\text{O})^{3/4}} = 8310 \qquad N_{s_{cu}}$$

Unidades adimensionais (SI),

$$N_s = \frac{(120\ \text{rad/s})(3110\ \text{m}^3/\text{s})^{1/2}(0{,}721\ \text{kg/m}^3)^{3/4}}{(1{,}84 \times 10^3\ \text{N/m}^2)^{3/4}} = 18{,}6 \qquad N_s(\text{SI})$$

{ O propósito desse problema foi ilustrar o procedimento de transpor por escala o desempenho de ventiladores que operam com gases com duas massas específicas diferentes. }

Três métodos são disponíveis para controlar vazão de ventilador: controle de velocidade do motor, venezianas ou abafadores (*dampers*) na entrada e estrangulamento na saída. O controle de velocidade foi amplamente abordado na seção sobre bombas. Os mesmos benefícios de consumo de energia e ruído reduzidos são obtidos com ventiladores, e os custos de sistemas de acionamento a velocidade variável continuam a decrescer.

Dampers na admissão podem ser usados com eficácia em alguns ventiladores centrífugos grandes. Entretanto, eles reduzem a eficiência e não podem ser empregados para diminuir a vazão do ventilador abaixo de cerca de 40% da capacidade nominal. O estrangulamento da descarga é barato mas desperdiça energia. Para maiores detalhes, consulte as referências 19 ou 21; ambas apresentam uma ampla abordagem do assunto. Osborne [23] também trata de ruídos, vibração e do projeto mecânico de ventiladores.

Ventiladores também podem ser combinados em série, em paralelo ou em arranjos mais complexos, de modo a casar resis-

tências variáveis do sistema com requisitos de vazão. Essas combinações podem ser analisadas usando-se os métodos descritos para bombas. As referências 24 e 25 são fontes excelentes de dados de perdas em sistemas de escoamento de ar.

Os *sopradores* têm características de desempenho semelhantes aos ventiladores, mas operam (tipicamente) a velocidades mais altas e promovem um maior aumento de pressão no fluido. Jorgensen [19] divide o território entre ventiladores e compressores por meio de um nível de pressão arbitrário que muda a massa específica do ar em 5%; ele não faz demarcação entre ventiladores e sopradores.

Os compressores podem ser centrífugos ou axiais, dependendo da velocidade específica. Os encontrados em turbocarregadores automotivos, pequenas turbinas a gás e nos elevadores de pressão em tubulações de gás natural (*boosters* de gasodutos) geralmente são centrífugos. Grandes turbinas a gás e motores de aviões a jato são, em geral, máquinas de fluxo axial.

O desempenho dos compressores depende da velocidade de operação, da vazão mássica e da massa específica do fluido de trabalho. É prática comum apresentar dados de desempenho de compressores nas coordenadas mostradas na Fig. 10.33, como *razão de pressão* versus *vazão mássica corrigida,* com *velocidade corrigida* como parâmetro. A normalização da vazão mássica por meio de $\sqrt{T}/p$, onde T e p são a temperatura e a pressão absolutas, remove os efeitos de variações da massa específica. A normalização da velocidade de operação do compressor por meio de $1/\sqrt{T}$, relaciona a velocidade periférica do impulsor do compressor com a velocidade do som (isso forma um número adimensional de Mach — veja o Cap. 11).

À primeira vista, as curvas de desempenho da Fig. 10.33 parecem incompletas. Dois fenômenos limitam a faixa de vazão em massa na qual um compressor pode operar a uma dada velocidade. A vazão em massa máxima é limitada pelo choque — a aproximação de $M = 1$ em algum ponto na máquina — veja o Cap. 12. O desempenho deteriora-se rapidamente quando há uma aproximação do limite de bloqueio.

A vazão em massa mínima é limitada pelo *estol de rotação* ou pelo *efeito surge* no compressor. O estol de rotação ocorre quando células de escoamento separado formam-se e bloqueiam um segmento do rotor do compressor. O efeito é a redução do desempenho e o desbalanceamento do rotor; isso causa vibração severa e pode levar a avarias rapidamente. Assim, é impossível operar um compressor com estol de rotação e este deve, portanto, ser evitado.

Os compressores centrífugos e axiais também podem ser limitados por *surge*, um fenômeno de pulsação cíclica que provoca a variação da vazão mássica através da máquina, podendo até mesmo revertê-la! O *surge* é acompanhado de ruídos elevados e pode danificar o compressor ou seus componentes; deve ser evitado também.

Em geral, quanto mais alto o desempenho, mais estreita é a faixa em que o compressor pode operar com êxito. Desta maneira, um compressor deve ser cuidadosamente casado com o seu sistema de escoamento para que se tenha uma operação satisfatória. A adequação de compressores em aplicações de linhas de gás natural é abordado por Vincent-Genod [26]. Talvez a aplicação mais comum hoje em dia de máquinas de fluxo de alta velocidade seja em turbocarregadores automotivos (aproximadamente 3 milhões de unidades em todo o mundo são vendidas a cada ano com turbocarregadores). O acoplamento de turbocarregadores automotivos é descrito na literatura dos fabricantes [27].

c. Bombas de Deslocamento Positivo

A pressão é desenvolvida em bombas de deslocamento positivo por reduções de volume causadas pelo movimento da fronteira na qual o líquido está confinado. Em contraste às turbomáquinas, as bombas de deslocamento positivo podem desenvolver altas pressões a velocidades relativamente baixas porque o efeito de bombeamento depende da variação de volume em vez da ação dinâmica.

Bombas de deslocamento positivo são freqüentemente usadas em sistemas hidráulicos a pressões de até 40 MPa (6000 psi). A principal vantagem da potência hidráulica é a alta *densidade de potência* (potência por peso de unidade ou tamanho de unidade) que pode ser obtida: para uma dada potência produzida, um sistema hidráulico pode ser mais leve e menor do que um sistema de acionamento elétrico típico.

Numerosos tipos de bombas de deslocamento positivo têm sido desenvolvidos. Alguns exemplos incluem bombas de pistão, bombas de palhetas e bombas de engrenagens. Dentro de cada tipo, as bombas podem ser de deslocamento fixo ou variável. Uma classificação abrangente dos tipos de bombas é dada em [16].

As características de desempenho da maioria das bombas de deslocamento positivo são similares; nesta seção focalizaremos as bombas de engrenagens. Esse tipo de bomba é empregado, tipicamente, para suprir óleo lubrificante pressurizado em motores de combustão interna. A Fig. 10.34 é um diagrama esque-

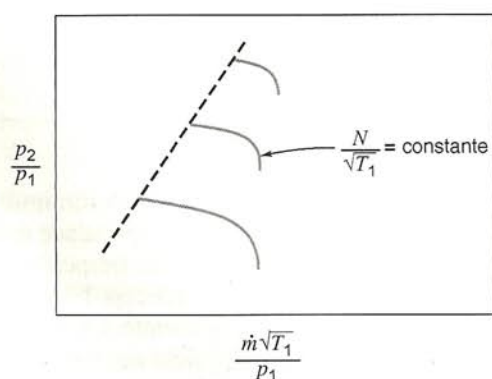



Fig. 10.33 Gráfico de desempenho típico para um compressor centrífugo [2].

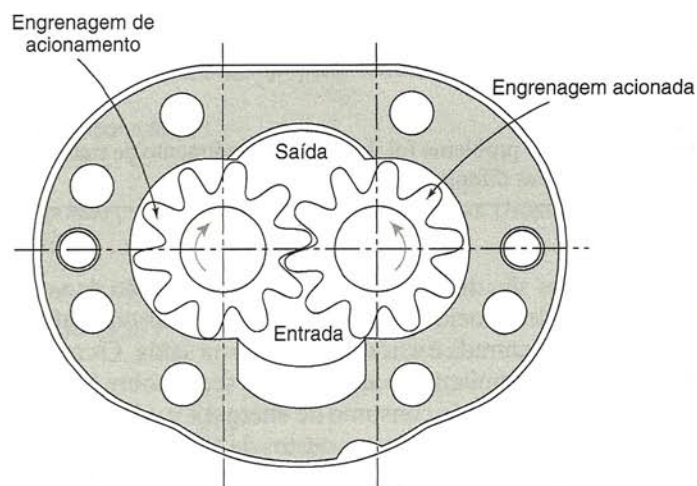



Fig. 10.34 Esquema de uma bomba de engrenagens típica [28].

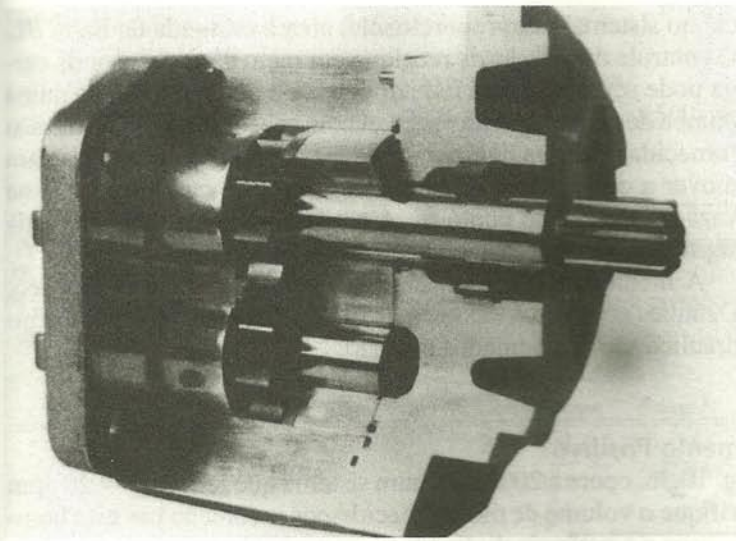



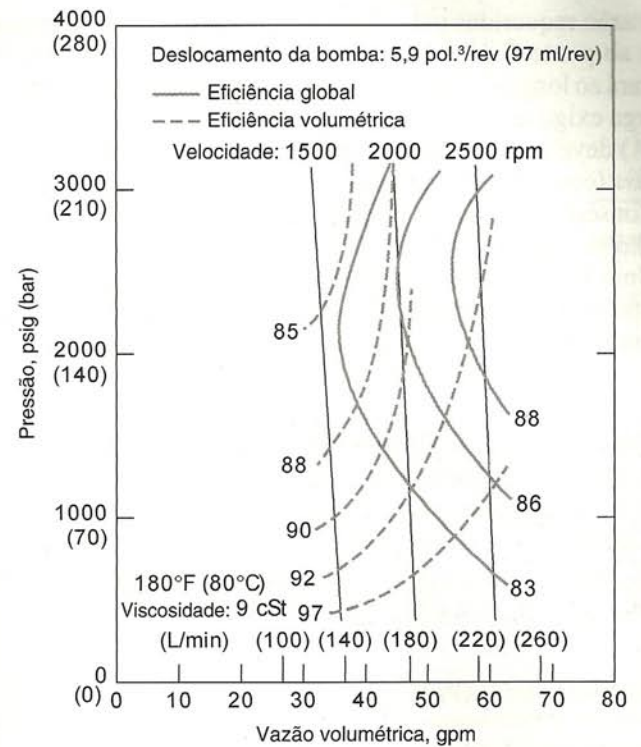
Fig. 10.35 Ilustração de bomba de engrenagens com placas laterais carregadas por pressão [28]. (Foto cortesia da Sauer Sundstrand Company.)

Fig. 10.36 Características de desempenho de uma bomba de engrenagens típica [28].

mático de uma bomba de engrenagens típica. O óleo entra no espaço entre as engrenagens no fundo da cavidade da bomba. Ele é levado para fora e para cima pelos dentes das engrenagens rotativas e sai através da portinhola existente no topo da cavidade. A pressão é gerada à medida que o óleo é forçado em direção à saída da bomba; vazamentos e refluxo são evitados pelo ajuste apertado dos dentes no centro da bomba e pelas pequenas folgas mantidas entre as faces laterais das engrenagens e da carcaça da bomba. Essas pequenas folgas exigem que o fluido hidráulico seja mantido extremamente limpo por filtragem plena do escoamento.

A Fig. 10.35 é uma fotografia mostrando as partes de uma bomba de engrenagens real; ela nos dá uma boa idéia da robustez da carcaça e dos rolamentos necessários para suportar as grandes forças de pressão desenvolvidas no interior da bomba. Ela também mostra placas laterais carregadas por pressão, projetadas para "flutuar" — para permitir a expansão térmica — enquanto mantêm a menor folga lateral possível entre engrenagens e carcaça. Muitos projetos engenhosos têm sido desenvolvidos para bombas; os detalhes estão além do escopo da nossa presente abordagem, a qual concentrará atenção nas características de desempenho. Para maiores detalhes consulte as referências 28 ou 29.

Curvas típicas de desempenho de pressão *versus* vazão para uma bomba de engrenagens para serviço médio são mostradas na Fig. 10.36. O tamanho da bomba é especificado pelo seu deslocamento por revolução e o fluido de trabalho é caracterizado por sua viscosidade e temperatura. Curvas de testes a três velocidades constantes são apresentadas no diagrama. Para cada velocidade, a vazão volumétrica diminui ligeiramente à medida que a pressão aumenta. A bomba desloca o mesmo volume, mas à medida que a pressão é aumentada, tanto os vazamentos quanto o refluxo aumentam, de modo que a vazão diminui levemente. O fluido vazado termina na carcaça da bomba, logo, uma caixa de dreno deve ser providenciada para retornar esse líquido ao reservatório do sistema.

A *eficiência volumétrica* — mostrada pelas curvas tracejadas — é definida como a vazão real dividida pelo deslocamento da bomba. A eficiência volumétrica diminui com o aumento da pressão ou com a redução da velocidade da bomba. A *eficiência global* — mostrada pelas curvas em linha cheia — é definida como a potência entregue ao fluido dividida pela potência absorvida pela bomba. A eficiência global tende a subir (e atinge um máximo numa pressão intermediária) com o aumento da velocidade da bomba.

Até aqui mostramos bombas de deslocamento positivo apenas. O custo extra e a complexidade de bombas de deslocamento variável são compensados pela economia de energia que elas permitem durante operação com vazões parciais. Numa bomba de deslocamento variável, a vazão pode ser alterada para acomodar a carga. Sensores de carga podem ser usados para reduzir a pressão da descarga de modo a reduzir ainda mais o gasto de energia durante a operação em carga parcial. Alguns projetos de bombas permitem alívio de pressão para uma redução adicional na perda de potência durante a operação sem carga (operação em *standby*).

A Fig. 10.37 ilustra perdas do sistema com uma bomba de deslocamento fixo comparadas com perdas para bombas de deslocamento variável e de pressão variável. Admita que a pressão

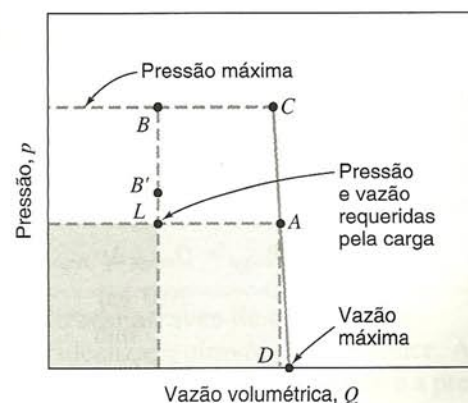



Fig. 10.37 Diagrama pressão-vazão ilustrando as perdas do sistema a carga parcial [28].

e a vazão requeridas pela carga em operação parcial correspondam ao ponto L na figura. Uma bomba de deslocamento fixo operará ao longo da curva CD; sua vazão estará no ponto A. Como a carga exige apenas a vazão no ponto L, a vazão restante (entre L e A) deve ser levada de volta ao reservatório por meio de um *bypass* (contorno). Sua pressão é dissipada por estrangulamento. Conseqüentemente, a perda de potência do sistema será a área abaixo da linha LA.

Uma bomba de deslocamento variável operando a pressão constante fornecerá vazão suficiente apenas para suprir a carga, porém na pressão representada pelo ponto B. A perda de potência no sistema será proporcional à área à esquerda da linha BL. O controle da pressão de recalque por meio de um sensor de carga pode ser usado para reduzir perda de potência. Como numa bomba de deslocamento variável com sensor de carga, a pressão fornecida é apenas ligeiramente superior àquela necessária para mover a carga. Uma bomba com sensor de carga operaria na vazão e pressão do ponto B'. A perda do sistema seria reduzida significativamente para a área à esquerda da linha $B'L$.

A melhor escolha do sistema depende do ciclo de serviço. Detalhes completos desses e de outros sistemas de potência hidráulica são apresentados em [28].

EXEMPLO 10.12 — Desempenho de uma Bomba de Deslocamento Positivo

Uma bomba hidráulica, com as características de desempenho da Fig. 10.36, opera a 2000 rpm num sistema que requer $Q = 20$ gpm a $p = 1500$ psig para a carga, numa certa condição de operação. Verifique o volume de óleo fornecido por revolução por esta bomba. Calcule a potência requerida pela bomba, a potência entregue à carga e a potência dissipada por estrangulamento nesta condição. Compare com a potência dissipada, usando (i) uma bomba de deslocamento variável a 3000 psig e (ii) uma bomba com sensor de carga que opera a 100 psig acima do requisito de carga.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.12

DADOS: Bomba hidráulica, com características de desempenho da Fig. 10.36, operando a 2000 rpm. O sistema requer $Q = 20$ gpm a $p = 1500$ psig.

DETERMINAR: **(a)** O volume de óleo por revolução entregue por essa bomba.
(b) A potência requerida pela bomba.
(c) A potência entregue à carga.
(d) A potência dissipada por estrangulamento nesta condição.
(e) A potência dissipada usando:
(i) uma bomba de deslocamento variável a 3000 psig, e
(ii) uma bomba com sensor de carga que opera a 100 psig acima dos requisitos de pressão da carga.

SOLUÇÃO:

Para estimar a vazão máxima, extrapole a curva de pressão *versus* vazão para pressão zero. Sob estas condições, $Q = 48{,}5$ pgm a $N = 2000$ rpm com Δp desprezível. Assim,

$$\forall = \frac{Q}{N} = 48{,}5\,\frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{2000\text{ rev}} \times 231\,\frac{\text{pol}^3}{\text{gal}} = 5{,}60\text{ pol}^3/\text{rev} \qquad \forall$$

A eficiência volumétrica da bomba na vazão máxima é

$$\eta_V = \frac{\forall_{\text{calc}}}{\forall_{\text{bomba}}} = \frac{5{,}60}{5{,}9} = 0{,}949$$

O ponto de operação da bomba pode ser determinado da Fig. 10.36. A 1500 psig, ela opera a $Q \approx 46{,}5$ gpm. A potência entregue ao fluido é

$$\mathcal{P}_{\text{fluido}} = \rho Q g H_p = Q\Delta p_p$$

$$= 46{,}5\,\frac{\text{gal}}{\text{min}} \times 1500\,\frac{\text{lbf}}{\text{pol}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48\text{ gal}} \times \frac{\text{min}}{60\text{ s}} \times 144\,\frac{\text{pol}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{hp}\cdot\text{s}}{550\text{ pé}\cdot\text{lbf}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{fluido}} = 40{,}7\text{ hp}$$

Do gráfico, neste ponto de operação, a eficiência da bomba é de aproximadamente $\eta = 0{,}84$. Então, a potência absorvida pela bomba é

$$\mathcal{P}_{\text{ent.}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{fluido}}}{\eta} = \frac{40{,}7\text{ hp}}{0{,}84} = 48\text{ hp} \qquad \mathcal{P}_{\text{ent.}}$$

A potência entregue à carga é

$$\mathcal{P}_{\text{carga}} = Q_{\text{carga}}\,\Delta p_{\text{carga}}$$

$$= 20{,}0\,\frac{\text{gal}}{\text{min}} \times 1500\,\frac{\text{lbf}}{\text{pol}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48\text{ gal}} \times \frac{\text{min}}{60\text{ s}} \times 144\,\frac{\text{pol}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{hp}\cdot\text{s}}{550\text{ pé}\cdot\text{lbf}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{carga}} = 17{,}5\text{ hp} \qquad \mathcal{P}_{\text{carga}}$$

A potência dissipada por estragulamento é

$$\mathcal{P}_{\text{dissipada}} = \mathcal{P}_{\text{fluido}} - \mathcal{P}_{\text{carga}} = 40{,}7 - 17{,}5 = 23{,}2\text{ hp} \qquad \mathcal{P}_{\text{dissipada}}$$

A dissipação com a bomba de deslocamento variável é

$$\mathcal{P}_{\text{des-var}} = Q_{\text{carga}}(p_{\text{oper}} - p_{\text{carga}})$$

$$= 20{,}0\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{(3000 - 1500)\ \text{lbf}}{\text{pol.}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48\ \text{gal}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times \frac{144\ \text{pol.}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{hp}\cdot\text{s}}{550\ \text{pé}\cdot\text{lbf}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{des-var}} = 17{,}5\ \text{hp} \longleftarrow \mathcal{P}_{\text{des-var}}$$

A dissipação com a bomba de deslocamento variável é, portanto, inferior aos 23,2 hp dissipados com a bomba de deslocamento constante e o estrangulamento. A economia é de aproximadamente 6 hp.

O cálculo final é para a bomba com sensor de carga. Se a pressão da bomba for 100 psi acima da requerida pela carga, a dissipação do excesso de energia é

$$\mathcal{P}_{\text{com sensor}} = Q_{\text{carga}}(p_{\text{oper}} - p_{\text{carga}})$$

$$= 20{,}0\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{100\ \text{lbf}}{\text{pol.}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{7{,}48\ \text{gal}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times \frac{144\ \text{pol.}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{hp}\cdot\text{s}}{550\ \text{pé}\cdot\text{lbf}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{com sensor}} = 1{,}17\ \text{hp} \longleftarrow \mathcal{P}_{\text{com sensor}}$$

O propósito desse problema foi contrastar o desempenho de um sistema com uma bomba de deslocamento constante com aquele de sistemas com bombas de deslocamento variável e com sensor de carga. A economia específica depende do ponto de operação do sistema e do seu ciclo de serviço.

d. Hélices

Tem sido sugerido que uma hélice seja considerada como uma máquina de fluxo axial sem uma carcaça [10]. Em comum com outros dispositivos de propulsão, uma hélice produz empuxo transmitindo quantidade de movimento a um fluido. A produção de empuxo sempre deixa a corrente com alguma energia cinética e quantidade de movimento angular que não são recuperáveis, de forma que o processo não é 100% eficiente.

O modelo de escoamento adimensional mostrado esquematicamente na Fig. 10.38 foi desenhado conforme visto por um observador que se move com a hélice, de modo que o escoamento é permanente. A hélice real foi substituída por um *disco atuador* delgado, através do qual a velocidade do escoamento é contínua, porém a pressão sobe repentinamente. Em relação à hélice, o escoamento a montante está na velocidade V e na pressão ambiente. A velocidade axial no disco atuador é $V + \Delta V/2$, com uma correspondente redução na pressão. A jusante, a velocidade é $V + \Delta V$ e a pressão retorna à ambiente. (É mostrado no Problema-Exemplo 10.13 que metade do aumento de velocidade ocorre antes e metade após o disco atuador.) A contração de área da corrente fluida para satisfazer à continuidade e o aumento de pressão através do disco da hélice aparecem na figura.

A figura não mostra as velocidades de redemoinho que resultam do torque necessário para girar a hélice. A energia cinética devida ao redemoinho presente na corrente também é perdida, a menos que seja removida por uma hélice de contra-rotação ou parcialmente recuperada por palhetas diretrizes estacionárias.

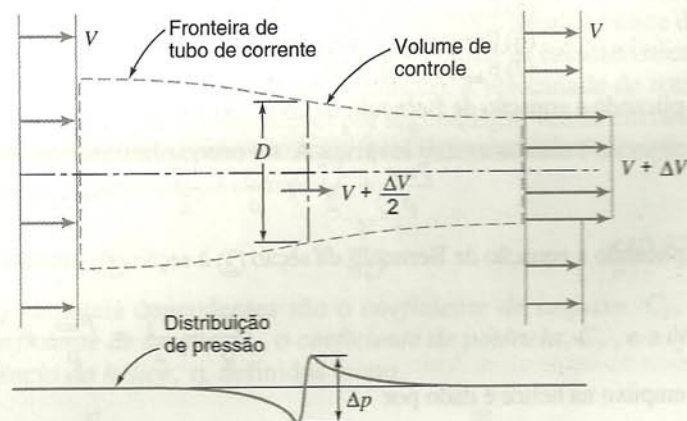



Fig. 10.38 Modelo de escoamento unidimensional e volume de controle utilizado para analisar uma hélice idealizada [10].

Como para todas as turbomáquinas, as hélices podem ser analisadas de duas maneiras. A aplicação de quantidade de movimento na direção axial, usando um volume de controle finito, proporciona relações globais entre a velocidade da corrente, o empuxo, a potência útil produzida e a energia cinética residual mínima na corrente. Uma teoria de *elemento de pá* mais detalhada é necessária para calcular a interação entre uma pá da hélice e a corrente fluida. Uma relação geral para a eficiência de propulsão ideal pode ser deduzida usando o enfoque de volume de controle, como mostrado no Exemplo 10.13 a seguir.

EXEMPLO 10.13 — Análise de Volume de Controle do Escoamento Idealizado através de uma Hélice

Considere o modelo unidimensional mostrado na Fig. 10.38 para o escoamento idealizado através de uma hélice. A hélice avança no ar tranqüilo com a velocidade constante V_1. Obtenha expressões para a pressão imediatamente a montante e a pressão imediatamente a jusante do disco atuador. Escreva o empuxo na hélice como o produto desta diferença de pressão vezes a área do disco. Equacione a expressão para o empuxo com uma obtida pela aplicação da equação da quantidade de movimento ao volume de controle. Mostre que metade do aumento de velocidade ocorre à frente e metade atrás do disco da hélice.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.13

DADOS: Uma hélice avançando no ar tranqüilo com velocidade V_1, conforme mostrado na Fig. 10.38.

DETERMINAR: (a) Expressões para as pressões imediatamente a montante e imediatamente a jusante do disco atuador.
(b) Expressão para a velocidade do ar no disco atuador. Em seguida, mostre que metade do aumento de velocidade ocorre à frente e metade atrás do disco atuador.

SOLUÇÃO:

Aplique a equação de Bernoulli e a componente x da quantidade de movimento usando o VC mostrado.

Equações básicas:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \cancel{gz}^{\approx 0(5)} = \text{constante}$$

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(5)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u_{xyz}\rho d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC} u_{xyz}\rho \vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) Escoamento permanente em relação ao VC
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(4) Escoamento sem atrito
(5) Escoamento horizontal: despreze variações em z; $F_{B_x} = 0$
(6) Escoamento uniforme em cada seção
(7) p_{atm} envolve o VC.

Aplicando a equação de Bernoulli da seção ① à seção ②, obtemos:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}; \quad p_{2(man.)} = \tfrac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_2^2)$$

Aplicando a equação de Bernoulli da seção ③ à seção ④, obtemos:

$$\frac{p_3}{\rho} + \frac{V_3^2}{2} = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{V_4^2}{2}; \quad p_{3(man.)} = \tfrac{1}{2}\rho(V_4^2 - V_3^2)$$

o empuxo na hélice é dado por

$$F_T = (p_3 - p_2)A = \tfrac{1}{2}\rho A(V_4^2 - V_1^2) \qquad (V_3 = V_2 = V)$$

Da equação da quantidade de movimento, usando velocidades *relativas*,

$$R_x = F_T = u_1\{-\dot{m}\} + u_4\{+\dot{m}\} = \rho VA(V_4 - V_1) \qquad \{u_1 = V_1, \quad u_4 = V_4\}$$

$$F_T = \rho VA(V_4 - V_1)$$

Equacionando estas duas expressões para F_T resulta

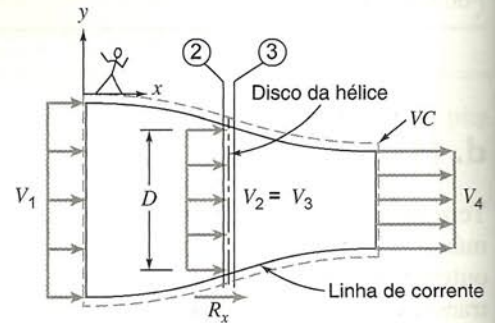
$$F_T = \tfrac{1}{2}\rho A(V_4^2 - V_1^2) = \rho VA(V_4 - V_1) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}(V_4 + V_1)(V_4 - V_1) = V(V_4 - V_1)$$

Assim, $V = 1/2\,(V_1 + V_4)$, logo

$$\Delta V_{12} = V - V_1 = \tfrac{1}{2}(V_1 + V_4) - V_1 = \tfrac{1}{2}(V_4 - V_1) = \frac{\Delta V}{2}$$

$$\Delta V_{34} = V_4 - V = V_4 - \tfrac{1}{2}(V_1 + V_4) = \tfrac{1}{2}(V_4 - V_1) = \frac{\Delta V}{2}$$

Aumento de Velocidade

O propósito desse problema foi aplicar as equações da continuidade, da quantidade de movimento e de Bernoulli a um modelo de escoamento idealizado de uma hélice, e verificar a teoria de Rankine, de 1885, segundo a qual metade da variação da velocidade ocorre de cada lado do disco da hélice.

As formulações para volume de controle das equações de continuidade e de quantidade de movimento foram aplicadas no Problema-Exemplo 10.13, ao escoamento através de uma hélice mostrada na Fig. 10.38. Os resultados obtidos são discutidos mais amplamente a seguir. O empuxo produzido é

$$F_T = \dot{m}\,\Delta V \tag{10.28}$$

Para escoamento incompressível, na ausência de atrito e transferência de calor, a equação da energia indica que a potência mínima requerida pela hélice é aquela necessária para aumentar a energia cinética do escoamento, que pode ser expressa como

$$\mathcal{P}_{\text{ent.}} = \dot{m}\left[\frac{(V+\Delta V)^2}{2} - \frac{V^2}{2}\right] =$$

$$= \dot{m}\left[\frac{2V\Delta V + (\Delta V)^2}{2}\right] = \dot{m}V\Delta V\left[1 + \frac{\Delta V}{2V}\right] \tag{10.29}$$

A potência útil produzida é o produto do empuxo pela velocidade de avanço, V; usando a Eq. 10.28, isto pode ser escrito como

$$\mathcal{P}_{\text{útil}} = F_T V = \dot{m}V\Delta V \tag{10.30}$$

Combinando as Eqs. 10.29 e 10.30, e simplificando, obtemos a eficiência de propulsão como

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{útil}}}{\mathcal{P}_{\text{ent.}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta V}{2V}} \tag{10.31}$$

As Eqs. 10.28 a 10.31 aplicam-se a qualquer dispositivo que cria empuxo pelo aumento da velocidade de uma corrente fluida. Portanto, elas aplicam-se igualmente bem a aviões de propulsão a hélice ou a jato, a barcos e a navios.

A Eq. 10.31 da eficiência de propulsão é de fundamental importância. Ela indica que a eficiência de propulsão pode ser aumentada pela redução de ΔV ou pelo aumento de V. Para empuxo constante, como mostrado pela Eq. 10.28, ΔV pode ser reduzido se $\dot{m}$ for aumentado, ou seja, se uma maior quantidade de fluido for acelerada com um menor aumento de velocidade. Uma maior quantidade de vazão em massa pode ser manipulada se o diâmetro da hélice for aumentado, mas o tamanho total e a velocidade periférica são fatores limitadores desse caminho. O mesmo princípio é aplicado para aumentar a eficiência de propulsão do motor de um *turboventilador* quando se usa um grande ventilador para mover uma vazão adicional de ar fora do núcleo do motor.

A eficiência de propulsão também pode ser melhorada aumentando-se a velocidade do movimento relativa ao fluido. A velocidade de avanço pode ser limitada pela cavitação em aplicações marítimas. A velocidade de vôo é limitada para aviões a hélice por efeitos de compressibilidade nas extremidades das hélices. No entanto, progressos têm sido feitos no projeto de hélices capazes de manter elevada eficiência, com baixos níveis de ruído, enquanto operam com escoamento transônico nas pontas das pás. Os aviões a jato podem voar muito mais rapidamente do que os aviões movidos a hélice, o que lhes dá eficiência de propulsão superior.

Uma teoria de *elemento de pá* mais detalhada pode ser usada para calcular a interação entre a pá da hélice e a corrente. Se o espaçamento entre pás for grande e o *carregamento de disco*[10] for leve, as pás podem ser consideradas independentes e relações podem ser deduzidas para o torque requerido e o empuxo produzido por uma hélice. Essas relações aproximadas são mais precisas para hélices de baixa solidez ou de baixa razão de área projetada.[11] As hélices de aviões são tipicamente de muito baixa solidez, tendo pás longas e estreitas.

Um diagrama esquemático de um elemento de uma pá de hélice rotativa é mostrado na Fig. 10.39. A pá está num ângulo θ em relação ao plano do disco da hélice.[12] O escoamento é mostrado conforme seria visto por um observador *sobre* a pá.

A velocidade relativa do escoamento, V_r, passando sobre o elemento de pá, depende tanto da velocidade periférica da pá, ωr, quanto da *velocidade de avanço*, V. Conseqüentemente, para um dado posicionamento da pá, o ângulo de ataque, α, depende *tanto* de V *quanto* de ωr. Assim, o desempenho de uma hélice é influenciado por ω e V.

Mesmo que a geometria da hélice seja ajustada para dar passo geométrico constante, o campo de escoamento no qual ela opera pode não ser uniforme. Dessa maneira, o ângulo de ataque ao longo dos elementos de pá pode divergir do ideal, só podendo ser calculado com o auxílio de um código computacional capaz de prever as direções e velocidades locais do escoamento.

As características de desempenho de hélices são, em geral, medidas experimentalmente. A Fig. 10.40 mostra características típicas medidas de uma hélice marítima [10] e de uma hélice de aeronave [30]. As variáveis usadas para plotar as características são quase adimensionais: por convenção, a velocidade de rotação, n, é expressa em revoluções por segundo (em vez de em radianos por segundo como ω). A variável independente é o *coeficiente de velocidade de avanço*, J,

$$J \equiv \frac{V}{nD} \tag{10.32}$$

As variáveis dependentes são o *coeficiente de empuxo*, C_F, o *coeficiente de torque*, C_T, o *coeficiente de potência*, C_P, e a *eficiência da hélice*, η, definidos como

$$C_F = \frac{F_T}{\rho n^2 D^4}, \quad C_T = \frac{T}{\rho n^2 D^5}, \quad C_P = \frac{\mathcal{P}}{\rho n^3 D^5},$$

$$\text{e} \quad \eta = \frac{F_T V}{\mathcal{P}_{\text{ent.}}} \tag{10.33}$$

As curvas de desempenho para ambas as hélices mostram tendências semelhantes. Ambos os coeficientes de empuxo e de

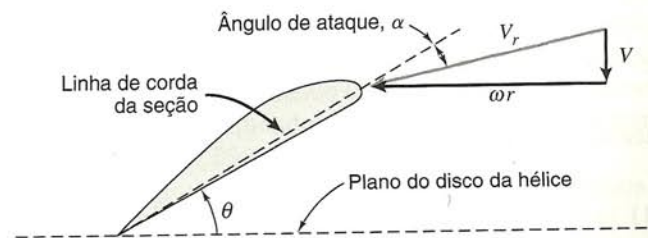



Fig. 10.39 Diagrama de elemento de pá e vetor velocidade relativa.

---

[10] *Carregamento de disco* é o empuxo da hélice dividido pela área de varredura do disco atuador.

[11] *Solidez* é definida como a razão entre a área projetada da pá e a área de varredura do disco atuador.

[12] O *passo* é definido como a distância que a hélice percorreria em fluido tranqüilo, por revolução, se ela avançasse ao longo da posição do ângulo da pá, θ. O passo, H, deste elemento de pá é igual a $2\pi r$ tg θ. Para obter passo constante ao longo da pá, θ deve seguir a relação, tg $\theta = H/2\pi r$, do centro à ponta da pá. Assim, o ângulo geométrico da pá é menor na ponta e aumenta continuamente em direção à raiz.

torque são mais altos e a eficiência é zero para velocidade de avanço nula. Isso corresponde ao maior ângulo de ataque para cada elemento de pá. A eficiência é zero porque nenhum trabalho útil está sendo realizado pela hélice estacionária. À medida que a velocidade de avanço aumenta, o empuxo e o torque diminuem suavemente. A eficiência aumenta até um máximo para uma velocidade de avanço ótima e depois cai a zero quando o empuxo tende para zero.

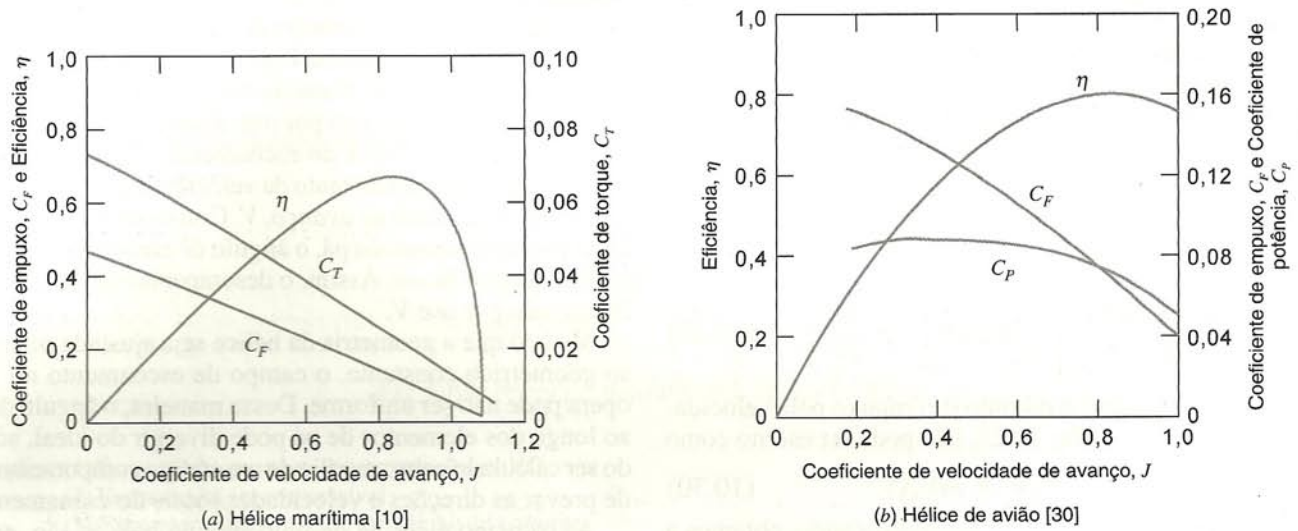



Fig. 10.40 Características típicas medidas de duas hélices.

EXEMPLO 10.14 — Dimensionamento de uma Hélice Marítima

Considere o superpetroleiro do Problema-Exemplo 9.5. Admita que a potência total requerida para vencer a resistência viscosa e o arrasto das ondas é de 11,4 MW. Use as características de desempenho da hélice marítima mostrada na Fig. 10.40*a* para estimar o diâmetro e a velocidade de operação requeridos para impulsionar o navio com uma só hélice.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.14

DADOS: Superpetroleiro do Problema-Exemplo 9.5, com requisito de potência propulsora total igual a 11,4 MW para vencer os arrastos viscoso e de ondas, e dados de desempenho para a hélice marítima mostrados na Fig. 10.40*a*.

DETERMINAR: (a) Uma estimativa do diâmetro de uma hélice única necessária para impulsionar o navio.
(b) A velocidade de operação dessa hélice.

SOLUÇÃO:

Das curvas da Fig. 10.40*a*, para eficiência ótima da hélice, os coeficientes são

$$J = 0{,}85, \quad C_F = 0{,}10, \quad C_T = 0{,}020, \text{ e } \eta = 0{,}66$$

O navio navega a $V = 6{,}69$ m/s e requer 11,4 MW de potência útil. Portanto, o empuxo da hélice deve ser

$$F_T = \frac{\mathcal{P}_{\text{útil}}}{V} = 11{,}4 \times 10^6 \text{ W} \times \frac{\text{s}}{6{,}69 \text{ m}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{W} \cdot \text{s}} = 1{,}70 \text{ MN}$$

A potência requerida pela hélice é

$$\mathcal{P}_{\text{ent.}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{útil}}}{\eta} = \frac{11{,}4 \text{ MW}}{0{,}66} = 17{,}3 \text{ MW}$$

De $J = \dfrac{V}{nD} = 0{,}85$ vem

$$nD = \frac{V}{J} = 6{,}69 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{0{,}85} = 7{,}87 \text{ m/s}$$

Tendo em vista que

$$C_F = \frac{F_T}{\rho n^2 D^4} = 0{,}10 = \frac{F_T}{\rho (n^2 D^2) D^2} = \frac{F_T}{\rho (nD)^2 D^2}$$

resolvendo para D, resulta

$$D = \left[\frac{F_T}{\rho(nD)^2 C_F}\right]^{1/2} = \left[1{,}70 \times 10^6\ \text{N} \times \frac{\text{m}^3}{1025\ \text{kg}} \times \frac{\text{s}^2}{(7{,}87)^2\ \text{m}^2} \times \frac{1}{0{,}10} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$D = 16{,}4\ \text{m} \qquad D$$

De $nD = \dfrac{V}{J} = 7{,}87$ m/s, $n = \dfrac{nD}{D} = \dfrac{7{,}87\,\text{m}}{\text{s}} \times \dfrac{1}{16{,}4\,\text{m}} = 0{,}480$ rev/s

de modo que

$$n = \frac{0{,}480\ \text{rev}}{\text{s}} \times 60\ \frac{\text{s}}{\text{min}} = 28{,}8\ \text{rev/min} \qquad n$$

A hélice requerida é bastante grande, porém ainda menor que os 25 m de calado do navio. O navio precisaria embarcar água do mar, como lastro, a fim de manter a hélice submersa, quando não estivesse com carga plena de petróleo.

O propósito desse problema foi ilustrar o uso de coeficientes normalizados para o dimensionamento preliminar de uma hélice marítima. Esse processo de projeto preliminar seria repetido usando-se dados para outros tipos de hélices, para determinar a combinação ótima entre tamanho da hélice, velocidade e eficiência.

As hélices marítimas tendem a ter elevada solidez. Isso provê bastante superfície de sustentação dentro da área de varredura do disco para manter pequena a diferença de pressão através da hélice e para evitar cavitação. A cavitação tende a descarregar as pás de uma hélice marítima, reduzindo tanto o torque requerido quanto o empuxo produzido [10]. A cavitação torna-se mais provável ao longo das pás à medida que o índice de cavitação,

$$Ca = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2} \tag{10.34}$$

é reduzido. A inspeção da Eq. 10.34 mostra que Ca diminui quando p é reduzido pela operação próxima da superfície livre ou pelo aumento de V. Aqueles que já operaram barcos a motor sabem que a cavitação local pode ser causada por escoamento distorcido aproximando-se da hélice, como, p. ex., numa virada brusca.

A compressibilidade afeta hélices de aviões quando as velocidades periféricas aproximam-se do *número crítico de Mach* no qual o número de Mach local aproxima-se de $M = 1$ em algum ponto da pá. Nessas condições, o torque aumenta por causa do aumento de arrasto, o empuxo cai por causa da sustentação reduzida da seção e a eficiência cai drasticamente.

Se uma hélice operar dentro da camada limite de um corpo propelido, onde o escoamento relativo é reduzido, seus torque e empuxo aparentes podem aumentar comparados com aqueles numa corrente livre uniforme na mesma velocidade de avanço. A energia cinética residual na corrente livre também pode ser reduzida. A combinação desses efeitos pode aumentar a eficiência de propulsão global do combinado corpo e hélice. Códigos computacionais avançados são utilizados no projeto de navios modernos (e submarinos, onde o ruído pode ser uma consideração primordial) para otimizar o desempenho de cada combinação hélice/casco.

Para certas aplicações especiais, uma hélice pode ser colocada dentro de um *tubulão* ou *duto*. Tais configurações podem ser integradas num casco (por exemplo, como uma hélice transversal de proa para aumentar a capacidade de manobra), instaladas numa asa de avião, ou colocadas no convés de um *hovercraft*. O empuxo pode ser melhorado pelas forças favoráveis de pressão nas bordas do duto, mas a eficiência pode ser reduzida pelas perdas adicionais de atrito superficial encontradas no duto.

10.5.2 Máquinas Produtoras de Trabalho

a. Turbinas Hidráulicas

A queda d'água têm sido considerada como fonte de energia renovável *livre*. Na realidade, a potência produzida por turbinas hidráulicas não é livre; os custos operacionais são baixos, mas um capital de investimento considerável é necessário para preparar o local e instalar o equipamento. No mínimo, serviços de captação de água, tubo de adução, turbina(s), casa de máquinas e controles devem ser providenciados. Uma análise econômica é necessária para determinar a viabilidade de possíveis locais de instalação.

Nos idos da revolução industrial, rodas d'água eram usadas para acionar moinhos de grãos e máquinas têxteis. Essas usinas tinham de ser instaladas no local da queda d'água, o que limitava o uso da potência d'água a empresas locais, relativamente pequenas. A introdução da corrente alternada na década de 1880 tornou possível a transmissão de energia elétrica através de longas distâncias. Desde então, cerca de 40% dos recursos de potência hidroelétrica nos Estados Unidos tem sido desenvolvida e conectada à rede de distribuição [31]. A potência hidroelétrica compõe cerca de 16% da energia elétrica produzida naquele país.

Os Estados Unidos têm reservas abundantes e relativamente baratas de combustíveis fósseis. Por isso, os recursos hidroelétricos remanescentes nos Estados Unidos não são considerados econômicos atualmente quando comparados com usinas termelétricas a combustível fóssil.

No mundo inteiro, somente cerca de 20% dos recursos hidroelétricos têm sido desenvolvidos comercialmente [31]. Uma quantidade bem maior de potência hidroelétrica será provavelmente desenvolvida nas décadas vindouras à medida que os países tornarem-se mais industrializados. Muitos países em desenvolvimento não têm reservas próprias de combustível fóssil. A potência hidroelétrica pode ajudar muito esses países a encontrar caminhos próprios para o progresso industrial. Conseqüentemente, o projeto e a instalação de usinas hidroelétricas devem ser atividades futuras importantes em países em desenvolvimento.

Para avaliar um local propício para geração de potência hidroelétrica, deve-se conhecer a vazão média do curso d'água e a altura de carga bruta disponível para fazer uma estimativa preliminar do tipo de turbina, números de turbinas e potencial de produção de potência. Análises econômicas estão além do escopo deste livro, mas nós consideramos os fundamentos de engenharia dos fluidos aplicados ao desempenho de turbina de impulsão para otimizar a eficiência.

Turbinas hidráulicas convertem a energia potencial de água armazenada em trabalho mecânico. A fim de maximizar a eficiência da máquina, é sempre um objetivo de projeto descarregar a água de uma turbina à pressão ambiente, tão próximo da elevação do tubulão de descarga quanto possível e com o mínimo possível de energia cinética residual.

Conduzir o fluxo de água para dentro da turbina com perda mínima de energia também é importante. Numerosos detalhes de projeto devem ser considerados, tais como geometria de entrada, peneiras para detritos etc. [31]. As referências 1, 8, 10 e 31-37 são pródigas em informações sobre seleção, projeto hidráulico e instalação de turbinas e otimização de usinas hidroelétricas. O número de grandes fabricantes tem minguado para uns poucos, mas as unidades de pequeno porte têm se tornado numerosas [34]. O custo enorme de uma instalação hidroelétrica de escala comercial justifica o uso amplo de testes com modelos em escala reduzida para o detalhamento final do projeto. Consulte [31] para uma cobertura detalhada da geração de energia por potência hidráulica.

As perdas hidráulicas em longos tubos de suprimento (conhecidos como *tubos de adução* ou *adutores*) devem ser consideradas quando do projeto de instalação de máquinas de elevada altura de carga, como as turbinas de impulsão; um diâmetro ótimo para o tubo de admissão que maximize a potência produzida pela turbina pode ser determinada para essas unidades, conforme mostrado no Problema-Exemplo 10.15.

A potência produzida pela turbina é proporcional à vazão em volume multiplicada pela diferença de pressão através do bocal. Para vazão nula, a carga hidrostática total está disponível, mas a potência produzida é zero. À medida que a vazão aumenta, a carga líquida na entrada do bocal da turbina diminui. A potência aumenta a princípio, atinge um máximo e, em seguida, decresce novamente com o aumento posterior da vazão. Para um dado diâmetro do tubo de adução, a potência teórica máxima é obtida quando um terço da altura de carga bruta é dissipada por perdas de atrito naquele tubo. Na prática, o diâmetro do tubo de adução é escolhido maior do que o mínimo teórico e apenas 10-15% da altura de carga bruta é dissipada por atrito [7].

Um certo diâmetro mínimo do tubo de adução é exigido para produzir uma dada potência. O diâmetro mínimo depende da produção de potência desejada, da altura de carga disponível e do material e comprimento do adutor. Alguns valores representativos são apresentados na Fig. 10.41.

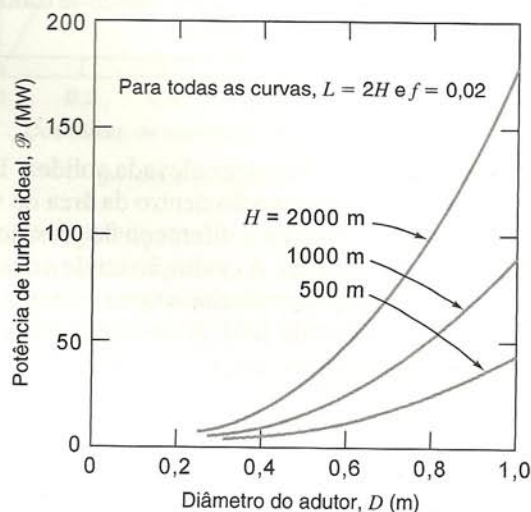
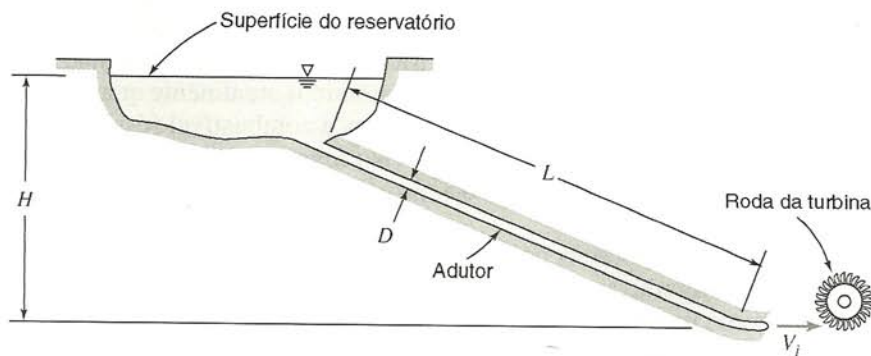



Fig. 10.41 Potência máxima produzida por uma turbina de impulsão *versus* diâmetro do tubo de adução.

EXEMPLO 10.15 — Desempenho e Otimização de uma Turbina de Impulsão

Considere a instalação hipotética de uma turbina de impulsão mostrada. Analise o escoamento no adutor e desenvolva uma expressão para a potência ótima produzida pela turbina como função do diâmetro do jato, D_j. Obtenha uma expressão para a razão entre o diâmetro do jato, D_j, e o diâmetro do tubo de adução, D, para a qual a potência de saída é maximizada. Sob condições de máxima potência produzida, mostre que a perda de carga no tubo de adução é um terço da altura disponível. Desenvolva uma equação paramétrica para o diâmetro mínimo do adutor necessário para produzir uma potência especificada, usando a altura de carga bruta e o comprimento do adutor como parâmetros.

PROBLEMA-EXEMPLO 10.15

DADOS: Instalação de turbina de impulsão mostrada.

DETERMINAR: (a) Uma expressão para a potência produzida pela turbina como uma função do diâmetro do jato.
(b) Uma expressão para a razão entre o diâmetro do jato, D_j, e o diâmetro do tubo de adução, D, para o qual a potência de saída é maximizada.
(c) A razão entre a perda de carga no tubo de adução e a altura disponível para as condições de máxima potência.
(d) Uma equação paramétrica para o diâmetro mínimo do tubo de adução necessário para produzir uma potência especificada, usando a altura de carga bruta e o comprimento do tubo como parâmetros.

SOLUÇÃO:

De acordo com os resultados do Exemplo 10.5, a potência produzida por uma turbina de impulsão idealizada é dada por $\mathcal{P}_{\text{saída}} = \rho QU(V - U)(1 - \cos\theta)$. Para potência ótima de saída, $U = V/2 = V_j/2$, e

$$\mathcal{P}_{\text{prod.}} = \rho Q \frac{V}{2}\left(V - \frac{V}{2}\right)(1 - \cos\theta) = \rho A_j V_j \frac{V_j}{2}\frac{V_j}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\mathcal{P}_{\text{prod.}} = \rho A_j \frac{V_j^3}{4}(1 - \cos\theta)$$

Desse modo, a potência produzida é proporcional a $A_j V_j^3$.

Aplique a equação de energia para escoamento em tubos, permanente e incompressível, através do adutor, a fim de analisar V_j^2 na saída do bocal. A superfície livre do reservatório é designada como seção ①; ali $\bar{V}_1 \approx 0$.

Equação de cálculo:

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \overset{\approx 0}{\frac{\bar{V}_1^2}{2}} + gz_1 - \left(\frac{p_j}{\rho} + \alpha_j \frac{\bar{V}_j^2}{2} + gz_j\right) = h_{lT} = \left(K_{\text{ent.}} + f\frac{L}{D}\right)\frac{\bar{V}_p^2}{2} + K_{\text{bocal}}\frac{\bar{V}_j^2}{2}$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento completamente desenvolvido
(4) Pressão atmosférica na saída do jato
(5) $\alpha_j = 1$, então $\bar{V}_j = V_j$
(6) Escoamento uniforme no tubo de adução, $\bar{V}_p = V$
(7) $K_{\text{ent}} << f\dfrac{L}{D}$
(8) $K_{\text{bocal}} = 0$

Então,

$$g(z_1 - z_j) = gH = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} + \frac{V_j^2}{2} \quad \text{ou} \quad V_j^2 = 2gH - f\frac{L}{D}V^2$$

Da continuidade, $VA = V_j A_j$, logo $V = V_j \dfrac{A_j}{A} = V_j\left(\dfrac{D_j}{D}\right)^2$ e

$$V_j^2 = 2gH - f\frac{L}{D}V_j^2\left(\frac{D_j}{D}\right)^4$$

Resolvendo para V_j, obtemos

$$V_j = \left[\frac{2gH}{\left\{1 + f\dfrac{L}{D}\left(\dfrac{D_j}{D}\right)^4\right\}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

A potência da turbina pode ser escrita como

$$\mathcal{P} = \rho A_j \frac{V_j^3}{4}(1 - \cos\theta) = \rho\frac{\pi}{16}D_j^2\left[\frac{2gH}{\left\{1 + f\dfrac{L}{D}\left(\dfrac{D_j}{D}\right)^4\right\}}\right]^{\frac{3}{2}}(1 - \cos\theta)$$

$$\mathcal{P} = C_1 D_j^2\left[\frac{1}{\left\{1 + f\dfrac{L}{D}\left(\dfrac{D_j}{D}\right)^4\right\}}\right]^{\frac{3}{2}} \longleftarrow \quad \mathcal{P}$$

onde $C_1 = \rho\pi(2gH)^{3/2}(1 - \cos\theta)/16$ = constante.

Para encontrar a condição de máxima potência produzida, para um diâmetro fixo do tubo de adução, D, derivamos em relação a D_j e igualamos a zero.

$$\frac{d\mathcal{P}}{dD_j} = 2C_1D_j\left[1 + f\frac{L}{D}\left(\frac{D_j}{D}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}C_1D_j^2\left[1 + f\frac{L}{D}\left(\frac{D_j}{D}\right)^4\right]^{-\frac{5}{2}} 4f\frac{L}{D}\frac{D_j^3}{D^4} = 0$$

Portanto,

$$1 + f\frac{L}{D}\left(\frac{D_j}{D}\right)^4 = 3f\frac{L}{D}\left(\frac{D_j}{D}\right)^4$$

Resolvendo para D_j/D, obtemos

$$\frac{D_j}{D} = \left[\frac{1}{2f\frac{L}{D}}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$\frac{D_j}{D}$

Para o valor ótimo de D_j/D, a velocidade do jato é dada pela Eq. (1) como

$$V_j = \left[\frac{2gH}{\left\{1 + f\frac{L}{D}\left(\frac{D_j}{D}\right)^4\right\}}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{3}gH}$$

A perda de carga na potência máxima é então

$$h_l = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{V} = gH - \frac{V_j^2}{2} = gH - \frac{2}{3}gH = \frac{1}{3}gH$$

e $h_l/gH = 1/3$.

h_l/gH

Sob as condições de potência máxima

$$\mathcal{P}_{\text{máx}} = \rho V_j^3\frac{A_j}{4}(1 - \cos\theta) = \rho\left(\frac{4}{3}gH\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{16}\left[\frac{D^5}{2fL}\right]^{\frac{1}{2}}(1 - \cos\theta)$$

Finalmente, para obter o mínimo diâmetro do tubo de adução, a equação pode ser escrita na forma

$$D \propto \left(\frac{L}{H}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{\mathcal{P}}{H}\right)^{\frac{2}{5}}$$

D

O objetivo desse problema foi ilustrar a otimização de uma turbina de impulsão idealizada. As relações deduzidas acima definem a bitola mínima do adutor necessária para obter uma potência de saída especificada. A prática real é utilizar adutores maiores, reduzindo assim a perda de carga devida ao atrito comparada com o caso analisado aqui.

b. Máquinas Eólicas

Os moinhos de vento (ou mais adequadamente, turbinas eólicas ou turbinas de vento), têm sido usados por séculos para captar a potência dos ventos naturais. Dois exemplos bem conhecidos são mostrados na Fig. 10.42.

Os moinhos de vento holandeses (Fig. 10.42*a*) giravam lentamente, de modo que a potência podia ser usada para girar rodas de pedra que moíam grãos, daí o nome "moinho de vento". Eles evoluíram para grandes estruturas; o tamanho prático máximo era limitado pelos materiais da época. Calvert [39] relata que, com base em seus testes de laboratório com modelos, um moinho de vento tradicional holandês, com 26 m de diâmetro, produzia 41 kW num vento de 36 km/h, a uma velocidade angular de 20 rpm.

Os moinhos de vento americanos, de pás múltiplas (Fig. 10.42*b*), eram encontrados em muitas fazendas dos Estados Unidos entre 1850 e 1950. Eles realizavam valioso serviço no acionamento de bombas d'água antes da eletrificação rural.

A ênfase recente em recursos renováveis tem reavivado o interesse no projeto e otimização de moinhos de vento. Configurações de turbina eólica de eixo horizontal (HAWT) e de turbina eólica de eixo vertical (VAWT) têm sido estudadas extensivamente. A maioria dos projetos HAWT apresenta hélices com 2 ou 3 pás girando a alta velocidade. A grande e moderna HAWT mostrada na Fig. 10.43*a* é capaz de produzir potência em qualquer vento superior a uma ligeira brisa.

O exemplo final (Fig. 10.43*b*) é uma VAWT *Darrieus*. Esse dispositivo usa uma moderna seção de aerofólio simétrico para

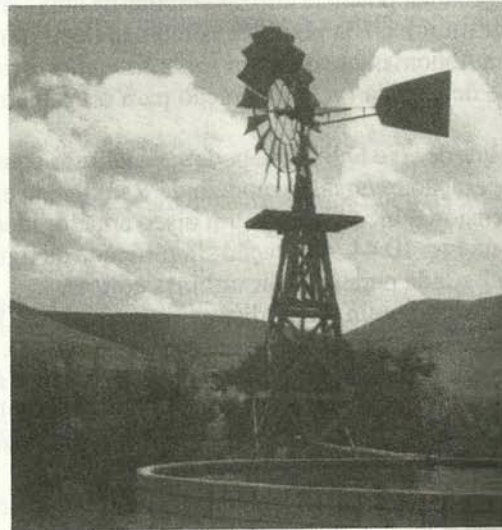
(*a*) Tradicional moinho holandês

(*b*) Moinho de vento das fazendas americanas

Fig. 10.42 Exemplos de moinhos de vento bem conhecidos [38]. (As fotografias são cortesia de (a) Conselho de Turismo dos Países Baixos e (b) Departamento de Agricultura dos EUA.)

(*a*) Turbina eólica de eixo horizontal

(*b*) Turbina eólica de eixo vertical

Fig. 10.43 Exemplos de projetos modernos de turbinas eólicas [40]. (Fotos cortesia do Departamento de Energia dos EUA.)

o rotor, tendo uma forma *troposquiana*.[13] Contrastando com outros projetos, a VAWT Darrieus não é capaz de partir do repouso; ela só pode produzir potência utilizável acima de uma certa velocidade angular mínima. Ela pode ser combinada com uma turbina de partida autônoma, tal como um *rotor Savonius,* a fim de prover o torque de partida (veja ilustração para o Problema 9.76 ou [41]).

Uma turbina eólica de eixo horizontal pode ser analisada como uma hélice com operação reversa. O modelo de Rankine de escoamento unidimensional incorporando um disco atuador idealizado é mostrado na Fig. 10.44. A notação simplificada da figura é freqüentemente usada para analisar turbinas eólicas.

A velocidade do vento, num ponto distante a montante, é V. A corrente é desacelerada para $V(1 - a)$ no disco da turbina e para $V(1 - 2a)$ na esteira da turbina (a é chamado de *fator de interferência*). Assim, o tubo de corrente de ar capturado pelo moinho de vento é pequeno a montante e o seu diâmetro aumenta à medida que se move para jusante.

A aplicação direta da equação da quantidade de movimento linear a um VC (veja o Problema-Exemplo 10.16) prevê o empuxo axial numa turbina de raio R como sendo

$$F_T = 2\pi R^2 \rho V^2 a(1 - a) \tag{10.35}$$

A aplicação da equação de energia, admitindo não haver perdas (nenhuma variação na energia interna ou transferência de calor), fornece a potência retirada da corrente de vento como

$$\mathcal{P} = 2\pi R^2 \rho V^3 a(1 - a)^2 \tag{10.36}$$

A eficiência de um moinho de vento é definida de maneira mais conveniente com referência ao fluxo de energia cinética contido num tubo de corrente do tamanho do disco atuador. Este fluxo de energia cinética é

$$KEF = \tfrac{1}{2}\rho V^3 \pi R^2 \tag{10.37}$$

A combinação das Eqs. 10.36 e 10.37 dá a eficiência (ou, alternativamente, o *coeficiente de potência* [40]) como

$$\eta = \frac{\mathcal{P}}{KEF} = 4a(1 - a)^2 \tag{10.38}$$

Betz [veja 40] foi o primeiro a deduzir esse resultado e a mostrar que a eficiência teórica é maximizada quando $a = 1/3$. A eficiência máxima teórica é $\eta = 0{,}593$.

Se o moinho de vento for carregado levemente (a é pequeno), ele afetará uma grande massa por unidade de tempo, mas a energia extraída por unidade de massa será pequena e a eficiência, baixa. A maior parte da energia cinética presente na corrente de ar inicial será deixada na esteira e desperdiçada. Se o moinho for pesadamente carregado ($a \approx 1/2$), ele afetará uma massa de ar muito menor por unidade de tempo. A energia removida por unidade de massa será grande, mas a potência produzida será pequena em comparação com o fluxo de energia cinética através da área não perturbada do disco atuador. Assim, um pico de eficiência ocorre em carregamentos intermediários do disco.

O modelo de Rankine inclui algumas hipóteses importantes que limitam a sua aplicabilidade [40]. Primeiro, admite-se que a turbina eólica afeta apenas o ar contido dentro do tubo de corrente definido na Fig. 10.44. Segundo, a energia cinética produzida como redemoinho atrás da turbina não é considerada. Terceiro, qualquer gradiente radial de pressão é ignorado. Glauert [veja 30] considerou parcialmente o redemoinho da esteira para prever a dependência da eficiência ideal sobre a *razão de velocidade periférica*, $X = \omega R/V$, como mostrado na Fig. 10.45 (ω é a velocidade angular da turbina).

À medida que a razão de velocidade periférica aumenta, a eficiência ideal aumenta, aproximando-se do valor de pico ($\eta = 0{,}593$) assintoticamente. (Fisicamente, o redemoinho deixado na esteira é reduzido à medida que a razão de velocidade periférica aumenta.) A referência 40 apresenta um resumo da teoria detalhada de elemento de pá usada para desenvolver a curva de eficiência limite mostrada na Fig. 10.45.

Cada tipo de turbina eólica tem a sua faixa de aplicação mais favorável. O tradicional moinho de vento americano de pás múltiplas tem um grande número de pás e opera a velocidade relativamente baixa. Sua solidez, σ (a razão entre a área projetada da pá e a área de varredura do disco da turbina, πR_2) é alta. Por causa da sua velocidade de operação relativamente baixa, a sua razão de velocidade periférica e o seu limite de desempenho teórico são baixos. O seu desempenho relativamente pobre, comparado com o limite teórico, é em grande parte devido às pás grosseiras, que são simples superfícies metálicas dobradas, em vez de aerofólios.

É necessário aumentar consideravelmente as razões de velocidade periférica para alcançar uma faixa de operação mais favorável. Os projetos modernos de turbina eólica de alta velocidade são aerofólios cuidadosamente conformados e operam com razões de velocidade periférica de até 7 [42].

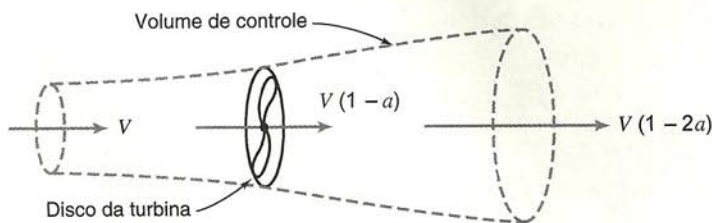



Fig. 10.44 Volume de controle e notação simplificada usados para analisar o desempenho de turbinas eólicas.

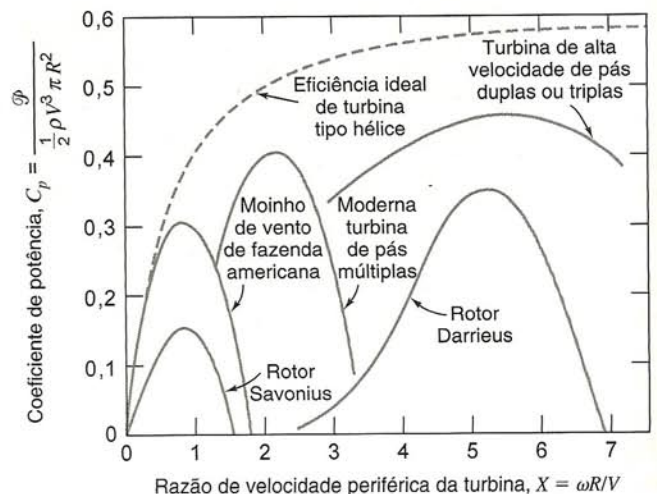



Fig. 10.45 Tendências de eficiência para tipos de turbina eólica *versus* razão de velocidade periférica.

[13] Essa forma (que seria aquela assumida por uma corda flexível girada em torno de um eixo vertical) minimiza as tensões de flexão no rotor da turbina Darrieus.

EXEMPLO 10.16 — Desempenho de um Moinho de Vento Idealizado

Desenvolva expressões gerais para empuxo, potência produzida e eficiência de um moinho de vento idealizado, conforme mostrado na Fig. 10.44. Calcule o empuxo, a eficiência ideal e a eficiência real para o moinho holandês testado por Calvert ($D = 26$ m, $N = 20$ rpm, $V = 36$ km/h e $\mathscr{P}_{\text{produzida}} = 41$ kW).

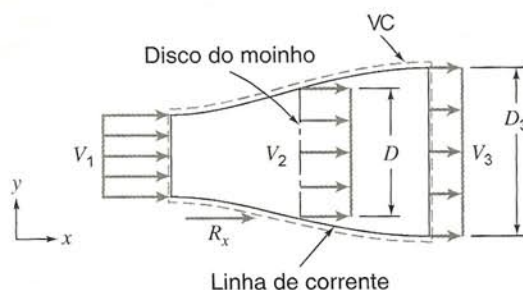
PROBLEMA-EXEMPLO 10.16

DADOS: Moinho de vento idealizado, conforme mostrado na Fig. 10.44, e moinho de vento holandês testado por Calvert:

$$D = 26 \text{ m} \quad N = 20 \text{ rpm} \quad V = 36 \text{ km/h} \quad \mathscr{P}_{\text{produzida}} = 41 \text{ kW}$$

DETERMINAR: (a) Expressões gerais para o empuxo, a potência produzida e a eficiência ideais.
(b) O empuxo, a potência produzida e as eficiências ideal e real para o moinho de vento holandês testado por Calvert.

SOLUÇÃO:

Aplique as equações de continuidade, quantidade de movimento e energia (componente x) usando o VC e as coordenadas mostradas.

Equações básicas:

$$0 = \overset{=0(3)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{\text{VC}} \rho d\forall} + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$F_{S_x} + \overset{=0(2)}{\cancel{F_{B_x}}} = \overset{=0(3)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{\text{SC}} u\, \rho d\forall} + \int_{\text{SC}} u\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\overset{=0(7)}{\cancel{\dot{Q}}} - \dot{W}_s = \overset{=0(3)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{\text{VC}} e\, \rho d\forall} + \int_{\text{SC}} \left(e + \frac{p}{\rho}\right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Considerações: (1) A pressão atmosférica atua sobre o VC; $F_{S_x} = R_x$
(2) $F_{B_x} = 0$
(3) Escoamento permanente
(4) Escoamento uniforme em cada seção
(5) Escoamento incompressível de ar padrão
(6) $V_1 - V_2 = V_2 - V_3 = 1/2(V_1 - V_3)$, conforme demonstrado por Rankine
(7) $\dot{Q} = 0$
(8) Nenhuma variação na energia interna para escoamento incompressível e sem atrito.

Em termos do fator de interferência, a, $V_1 = V$, $V_2 = (1 - a)V$ e $V_3 = (1 - 2a)V$.

Da continuidade, para escoamento uniforme em cada seção transversal, $V_1A_1 = V_2A_2 = V_3A_3$.

Da equação da quantidade de movimento,

$$R_x = u_1\{-|\rho V_1 A_1|\} + u_3\{+|\rho V_3 A_3|\} = (V_3 - V_1)\rho V_2 A_2 \quad \{u_1 = V_1, \quad u_3 = V_3\}$$

R_x é a força externa atuando *sobre* o volume de controle. A força de empuxo exercida *pelo* VC *sobre* o ambiente é

$$K_x = -R_x = (V_1 - V_3)\rho V_2 A_2$$

Em termos do fator de interferência, a equação para o empuxo pode ser escrita na forma geral,

$$K_x = \rho V^2 \pi R^2 2a(1 - a) \qquad K_x$$

(Faça dK_x/da igual a zero para mostrar que o máximo empuxo ocorre quando $a = 1/2$.)
A equação da energia torna-se

$$-\dot{W}_s = \frac{V_1^2}{2}\{-|\rho V_1 A_1|\} + \frac{V_3^2}{2}\{+|\rho V_3 A_3\} = \rho V_2 \pi R^2 \frac{1}{2}(V_3^2 - V_1^2)$$

A potência produzida, $\mathcal{P}$, é igual a $\dot{W}_s$. Em termos do fator de interferência,

$$\mathcal{P} = \dot{W}_s = \rho V(1-a)\pi R^2\left[\frac{V^2}{2} - \frac{V^2}{2}(1-2a)^2\right] = \rho V^3(1-a)\frac{\pi R^2}{2}\left[1-(1-2a)^2\right]$$

Após simplificação algébrica,

$$\mathcal{P}_{\text{ideal}} = 2\rho V^3 \pi R^2 a(1-a)^2$$

$\mathcal{P}_{\text{ideal}}$

O fluxo de energia cinética através de um tubo de corrente de escoamento não perturbado, de área igual à do disco atuador, é

$$KEF = \rho V \pi R^2 \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}\rho V^3 \pi R^2$$

Dessa forma, a eficiência ideal pode ser escrita como

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{ideal}}}{KEF} = \frac{2\rho V^3 \pi R^2 a(1-a)^2}{\frac{1}{2}\rho V^3 \pi R^2} = 4a(1-a)^2$$

η

Para determinar a condição de máxima eficiência possível, faça $d\eta/da$ igual a zero. A eficiência máxima é $\eta = 0{,}593$, que ocorre quando $a = 1/3$.

O moinho holandês testado por Calvert tem uma razão de velocidade periférica de

$$X = \frac{NR}{V} = \frac{20\text{ rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\text{ s}} \times 13\text{ m} \times \frac{\text{s}}{10\text{ m}} = 2{,}72$$

X

A eficiência teórica máxima atingível para essa razão de velocidade periférica, levando em conta redemoinho (Fig. 10.45), seria cerca de 0,53.

A eficiência real do moinho de vento holandês é

$$\eta_{\text{real}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{real}}}{KEF}$$

Com base nos dados de teste de Calvert, o fluxo de energia cinética é

$$KEF = \frac{1}{2}\rho V^3 \pi R^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1{,}23\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (10)^3\frac{\text{m}^3}{\text{s}^3} \times \pi(13)^2\text{ m}^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} \times \frac{\text{W}\cdot\text{s}}{\text{N}\cdot\text{m}}$$

$$KEF = 3{,}27 \times 10^5\text{ W} \quad \text{ou} \quad 327\text{ kW}$$

Substituindo na definição de eficiência real, vem

$$\eta_{\text{real}} = \frac{41\text{ kW}}{327\text{ kW}} = 0{,}125$$

η_{real}

Assim, a eficiência real do moinho de vento holandês é cerca de 24% da eficiência máxima teoricamente atingível para essa razão de velocidade periférica.

O empuxo real do moinho de vento holandês pode ser apenas estimado porque o fator de interferência, a, não é conhecido. O empuxo máximo possível ocorreria para $a = 1/2$, caso em que

$$K_x = \rho V^2 \pi R^2 2a(1-a)$$

$$= 1{,}23\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (10)^2\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \pi(13)^2\text{ m}^2 \times 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$K_x = 3{,}27 \times 10^4\text{ N} \quad \text{ou} \quad 32{,}7\text{ kN}$$

K_x

Isso não parece ser uma grande força de empuxo, considerando o tamanho ($D = 26$ m) do moinho de vento. Contudo, $V = 36$ km/h é apenas um vento moderado. A máquina real teria que suportar condições muito mais severas de vento durante tempestades.

O propósito desse problema foi ilustrar uma aplicação dos conceitos de empuxo, potência e eficiência ideais para um moinho de vento, e calcular os valores correspondentes para uma máquina real.

10.6 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o Cap. 10, você será capaz de

1. Dar definições operacionais de:

máquina de deslocamento positivo	estágio de compressor
turbomáquina	solidez
escoamento radial	turbina
escoamento axial	turbina de impulsão
escoamento misto	turbina de reação
bomba	tubo de extração
ventilador	potência hidráulica
soprador	potência mecânica
compressor	eficiência da turbina
impulsor, rotor ou roda	altura de carga de bloqueio
eficiência da bomba voluta	perda por choque
	velocidade específica

2. Enunciar o princípio da quantidade de movimento angular e escrever a formulação para volume de controle da equação básica.
3. Desenhar diagramas de velocidade e aplicar a equação de Euler para turbomáquinas para calcular o torque, altura de carga e potência ideais desenvolvidos pelo rotor de uma turbomáquina.
4. Avaliar o desempenho (carga desenvolvida, potência absorvida e eficiência) de uma máquina de fluxo a partir de dados medidos.
5. Calcular e usar parâmetros adimensionais para avaliar o desempenho de uma máquina de fluxo, quando o tamanho, velocidade de operação ou condições de operação são alterados.
6. Usar o conceito de altura de sucção positiva líquida para definir e calcular o *NPSH* disponível e requerido por uma máquina de fluxo.
7. Desenvolver e aplicar as curvas de resistência do sistema a fim de prever o desempenho de uma máquina de fluxo como parte de um sistema de escoamento.
8. Prever o desempenho de máquinas de fluxo instaladas em combinações em paralelo ou em série num sistema de escoamento.
9. Usar a literatura dos fabricantes a fim de especificar bombas e ventiladores apropriados para sistemas de escoamento definidos.
10. Realizar análises e dimensionamento preliminares de instalações de turbinas hidráulicas e eólicas.
11. Resolver os problemas no final do capítulo que se relacionam com o material que você estudou.

REFERÊNCIAS

1. Wilson, D. G., "Turbomachinery—From Paddle Wheels to Turbojets," *Mechanical Engineering, 104*, 10, October 1982, pp. 28–40.
2. Logan, E. S., Jr., *Turbomachinery: Basic Theory and Applications*. New York: Dekker, 1981.
3. Japikse, D. "Teaching Design in an Engineering Education Curriculum: A Design Track Syllabus," TM-519, Concepts ETI Inc., White River Jct., VT 05001.
4. American Society of Mechanical Engineers, *Performance Test Codes: Centrifugal Pumps,* ASME PTC 8.2-1990. New York: ASME, 1990.
5. American Institute of Chemical Engineers, *Equipment Testing Procedure: Centrifugal Pumps (Newtonian Liquids)*. New York: AIChE, 1984.
6. Air Movement and Control Association, *Laboratory Methods of Testing Fans for Rating*. AMCA Standard 210-74, ASHRAE Standard 51-75. Atlanta, GA: ASHRAE, 1975.
7. Daugherty, R. L., J. B. Franzini, and E. J. Finnemore, *Fluid Mechanics with Engineering Applications,* 8th ed. New York: McGraw-Hill, 1985.
8. Peerless Pump,* Brochure B-4003, "System Analysis for Pumping Equipment Selection," 1979.
9. Rouse, H., and S. Ince, *History of Hydraulics*. Iowa City, IA: Iowa University Press, 1957.
10. Daily, J. W., "Hydraulic Machinery," in Rouse, H., ed., *Engineering Hydraulics*. New York: Wiley, 1950.
11. Russell, G. E., *Hydraulics*, 5th ed. New York: Henry Holt, 1942.
12. Sabersky, R. H., A. J. Acosta, and E. G. Hauptmann, *Fluid Flow: A First Course in Fluid Mechanics*, 3rd ed. New York: Macmillan, 1989.
13. Hodge, B. K., *Analysis and Design of Energy Systems*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.
14. Moody, L. F., "Hydraulic Machinery," in *Handbook of Applied Hydraulics,* ed. by C. V. Davis. New York: McGraw-Hill, 1942.
15. Hydraulic Institute, *Hydraulic Institute Standards*. New York: Hydraulic Institute, 1969.
16. Dickinson, C., *Pumping Manual,* 8th ed. Surrey, England: Trade & Technical Press, Ltd., 1988.
17. Hicks, T. G., and T. W. Edwards, *Pump Application Engineering*. New York: McGraw-Hill, 1971.
18. Armintor, J. K., and D. P. Conners, "Pumping Applications in the Petroleum and Chemical Industries," *IEEE Transactions on Industry Applications, IA-23*, 1, January 1987.

* Peerless Pump Company, a member of the Sterling Group, P.O. Box 7026, Indianapolis, IN 46206-7026, U.S.A.

19. Jorgensen, R., ed., *Fan Engineering,* 8th ed. Buffalo, NY: Buffalo Forge, 1983.

20. American Society of Mechanical Engineers, *Power Test Code for Fans.* New York: ASME Power Test Codes, PTC 11-1946.

21. Berry, C. H., *Flow and Fan: Principles of Moving Air through Ducts*, 2nd ed. New York: Industrial Press, 1963.

22. Wallis, R. A., *Axial Flow Fans and Ducts.* New York: Wiley, 1983.

23. Osborne, W. C., *Fans,* 2nd ed. London: Pergamon Press, 1977.

24. American Society of Heating, Refrigeration, and Air Conditioning Engineers, *Handbook of Fundamentals.* Atlanta, GA: ASHRAE, 1980.

25. Idelchik, I. E., *Handbook of Hydraulic Resistance*, 2nd ed. New York: Hemisphere, 1986.

26. Vincent-Genod, J., *Fundamentals of Pipeline Engineering.* Houston: Gulf Publishing Co., 1984.

27. Warner-Ishi Turbocharger brochure.*

28. Lambeck, R. R., *Hydraulic Pumps and Motors: Selection and Application for Hydraulic Power Control Systems.* New York: Dekker, 1983.

29. Warring, R. H., ed., *Hydraulic Handbook,* 8th ed. Houston: Gulf Publishing Co., 1983.

30. Durand, W. F., ed., *Aerodynamic Theory,* 6 Volumes. New York: Dover, 1963.

31. Gulliver, J. S., and R. E. A. Arndt, *Hydropower Engineering Handbook.* New York: McGraw-Hill, 1990.

32. Fritz, J. J., *Small and Mini Hydropower Systems: Resource Assessment and Project Feasibility.* New York: McGraw-Hill, 1984.

33. Gladwell, J. S., *Small Hydro: Some Practical Planning and Design Considerations.* Idaho Water Resources Institute. Moscow, ID: University of Idaho, April 1980.

34. McGuigan, D., *Small Scale Water Power.* Dorchester: Prism Press, 1978.

35. Olson, R. M., and S. J. Wright, *Essentials of Engineering Fluid Mechanics,* 5th ed. New York: Harper & Row, 1990.

36. Quick, R. S., "Problems Encountered in the Design and Operation of Impulse Turbines," *Transactions of the ASME, 62*, 1940, pp. 15–27.

37. Warnick, C. C., *Hydropower Engineering.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.

38. Putnam, P. C., *Power from the Wind.* New York: Van Nostrand, 1948.

39. Calvert, N. G., *Windpower Principles: Their Application on the Small Scale.* London: Griffin, 1978.

40. Baumeister, T., E. A. Avallone, and T. Baumeister, III, eds., *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers,* 8th ed. New York: McGraw-Hill, 1978.

41. Eldridge, F. R., *Wind Machines,* 2nd ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1980.

42. Migliore, P. G., "Comparison of NACA 6-Series and 4-Digit Airfoils for Darrieus Wind Turbines," *Journal of Energy, 7,* 4, Jul–Aug 1983, pp. 291–292.

43. White, F. M., *Fluid Mechanics,* 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1994.

44. Sovern, D. T., and G. J. Poole, "Column Separation in Pumped Pipelines," in Kienow, K. K., ed., *Pipeline Design and Installation,* Proceedings of the International Conference on Pipeline Design and Installation, Las Vegas, Nevada, March 25–27, 1990. New York: American Society of Civil Engineers, 1990, pp. 230–243.

45. Drella, M., "Aerodynamics of Human-Powered Flight," in *Annual Review of Fluid Mechanics, 22,* pp. 93–110. Palo Alto, CA: Annual Reviews, 1990.

46. U.S. Department of the Interior, "Selecting Hydraulic Reaction Turbines," A Water Resources Technical Publication, *Engineering Monograph No. 20.* Denver, CO: U.S. Department of the Interior, Bureau of Reclamation, 1976.

47. Abbott, I. H., and A. E. von Doenhoff, *Theory of Wing Sections, Including a Summary of Airfoil Data.* New York: Dover, 1959 (paperback).

* Warner-Ishi, P.O. Box 580, Shelbyville, IL 62565-0580, U.S.A.

PROBLEMAS

10.1 As dimensões do impulsor de uma bomba centrífuga são

Parâmetro	Entrada, Seção ①	Saída, Seção ②
Raio, r (mm)	100	300
Largura da pá, b (mm)	50	40
Ângulo da pá, β (grau)	70	80

A bomba é acionada a 1150 rpm e bombeia água. Calcule a altura de carga teórica e a potência mecânica de alimentação da bomba se a vazão volumétrica é de 0,10 m³/s.

10.2 As dimensões do impulsor de uma bomba centrífuga são

Parâmetro	Entrada, Seção ①	Saída, Seção ②
Raio, r (mm)	200	600
Largura da pá, b (mm)	60	40
Ângulo da pá, β (grau)	50	70

A bomba trabalha com água e é acionada a 850 rpm. Calcule a altura de carga e a potência mecânica de alimentação da bomba se a vazão volumétrica é de 0,50 m³/s.

10.3 As dimensões do impulsor de uma bomba centrífuga são

Parâmetro	Entrada, Seção ①	Saída, Seção ②
Raio, r (mm)	400	1200
Largura da pá, b (mm)	120	80
Ângulo da pá, β (grau)	40	60

A bomba é acionada a 575 rpm e o fluido é a água. Calcule a altura de carga e a potência mecânica de alimentação da bomba se a vazão volumétrica é de 5,00 m³/s.

10.4 Considere as dimensões do impulsor da bomba centrífuga dadas no Problema-Exemplo 10.1. Construa o diagrama de velocidades para escoamento saindo do impulsor tangencialmente às pás, com ângulo de saída de 60 graus. Estime os valores ideais da potência mecânica de alimentação da bomba e do aumento de altura de carga.

10.5 Considere a geometria da bomba centrífuga idealizada descrita no Problema 10.11. Desenhe os diagramas de velocidades de entrada e de saída supondo b = constante. Calcule os ângulos de entrada das pás requeridos para entrada "sem choques" na vazão de projeto. Avalie a potência teórica absorvida pela bomba, nesta faixa de vazão.

10.6 Para o impulsor do Problema 10.1, determine a velocidade de rotação para a qual a componente tangencial da velocidade de entrada é zero se a vazão volumétrica for de 0,5 m³/s. Calcule os valores teóricos de altura de carga e de potência mecânica absorvida pela bomba.

10.7 Para o impulsor do Problema 10.2, operando a 850 rpm, determine a vazão volumétrica para a qual a componente tangencial da velocidade na entrada é zero. Calcule os valores teóricos de altura de carga e de potência mecânica absorvida pela bomba.

10.8 Para o impulsor do Problema 10.3, determine o ângulo de entrada de pá para o qual a componente tangencial da velocidade na entrada é zero se a vazão volumétrica for de 8 m³/s. Calcule os valores teóricos de altura de carga e de potência mecânica absorvida pela bomba.

10.9 Uma bomba centrífuga de água, com impulsor de diâmetro 6 pol. e fluxo axial de entrada, é acionada a 1750 rpm. As pás do impulsor são curvadas para trás (β_2 = 65°) e têm largura axial b_2 = 0,75 pol. Para uma vazão volumétrica de 1000 gpm determine o aumento de altura de carga e a potência absorvida teóricas.

10.10 Considere as dimensões do impulsor da bomba centrífuga dadas no Problema-Exemplo 10.1. Construa o diagrama de velocidades para escoamento sem choque na entrada do impulsor, se b = constante. Calcule o ângulo efetivo de escoamento com relação às pás radiais do impulsor para o caso de ausência de redemoinho na entrada. Investigue os efeitos sobre o ângulo de escoamento de (a) variações na largura do impulsor e (b) velocidades de redemoinho na entrada.

10.11 Considere uma bomba centrífuga cuja geometria e condições de escoamento são

Raio de entrada do impulsor, R_1	37,5 mm
Raio de saída do impulsor, R_2	150 mm
Largura de saída do impulsor, b_2	12,7 mm
Velocidade de projeto, N	1750 rpm
Vazão de projeto, Q	4,25 l/s
Palhetas curvadas para trás (ângulo de saída de pá), β_2	60°
Faixa de vazão requerida	50-150% da de projeto

Admita comportamento ideal da bomba com 100% de eficiência. Determine a altura de carga de bloqueio. Calcule as velocidades absoluta e relativa de recalque, a altura de carga total e a potência teórica requerida na vazão de projeto.

10.12 Uma bomba centrífuga projetada para bombear água a 460 gpm tem dimensões

Parâmetro	Entrada	Saída
Raio r (pol.)	3,0	6,0
Largura da pá, b (pol.)	0,3	0,25
Ângulo da pá, β (grau)	25	40

Desenhe o diagrama de velocidades de entrada. Determine a velocidade de projeto se a velocidade de entrada não possui componente tangencial. Trace o diagrama de velocidades de saída. Determine o ângulo absoluto do fluxo de saída (medido em relação à direção normal). Avalie a altura de carga teórica desenvolvida pela bomba. Estime a mínima potência mecânica entregue à bomba.

10.13 Gasolina é bombeada por uma bomba centrífuga. Quando a vazão em volume é de 375 gpm a bomba absorve 19,3 hp e a sua eficiência é de 81,2%. Calcule o aumento de pressão produzido pela bomba. Expresse este resultado como (a) pés de água e (b) pés de gasolina.

10.14 Uma bomba d'água centrífuga projetada para operar a 1160 rpm tem dimensões

Parâmetro	Entrada	Saída
Raio r (pol.)	3,5	6,5
Largura da pá, b (pol.)	0,4	0,3
Ângulo da pá, β (grau)		40

Desenhe o diagrama de velocidades de entrada para uma vazão volumétrica de 1 pé³/s. Determine o ângulo de entra-

da de pá para o qual a velocidade de entrada não possui componente tangencial. Trace o diagrama de velocidades de saída. Determine o ângulo absoluto do fluxo de saída (medido em relação à direção normal). Avalie a potência hidráulica liberada pela bomba, se a sua eficiência for de 75%. Determine a altura de carga desenvolvida pela bomba.

10.15 Na bomba d'água do Problema 10.9, a carcaça age como um difusor, o qual converte 60% da altura de carga de velocidade absoluta na saída do impulsor em aumento de pressão estática. A perda de carga através dos canais de admissão e de descarga do impulsor é 0,75 vez a componente radial da altura de carga de velocidade deixando o impulsor. Estime a vazão volumétrica, o aumento de altura de carga, a potência consumida e a eficiência da bomba no ponto de eficiência máxima. Suponha que o torque para superar perdas de mancal, selo e giro existentes é de 10% do torque ideal para $Q = 1000$ gpm.

10.16 A altura de carga teórica desenvolvida por uma bomba centrífuga no bloqueio depende do raio de descarga e da velocidade angular do impulsor. Para projeto preliminar, é útil dispor de um gráfico mostrando as características teóricas do bloqueio e aproximando o desempenho real. Prepare um gráfico log-log do raio do impulsor *versus* aumento de altura de carga teórica no bloqueio, tendo as velocidades padrões de motores elétricos como parâmetros. Admita que o fluido é a água e que a altura de carga real na vazão de projeto é de 70% da altura de carga teórica de bloqueio (mostre estas por meio de linhas tracejadas). Explique como esse gráfico pode ser usado em um projeto preliminar.

10.17 Use dados do Apêndice D para escolher pontos das curvas de desempenho para uma bomba Peerless horizontal, de carcaça bipartida, tipo 4AE12, a 1750 e 3550 rpm nominais. Obtenha e plote curvas de ajuste para altura de carga total *versus* vazão em volume para cada velocidade dessa bomba, com um impulsor de diâmetro 12,12 pol.

10.18 Use dados do Apêndice D para escolher pontos das curvas de desempenho para uma bomba Peerless horizontal, de carcaça bipartida, tipo 16A18B, a 705 e 880 rpm nominais. Obtenha e plote curvas de ajuste para altura de carga total *versus* vazão em volume para essa bomba, com um impulsor de diâmetro 18 pol.

10.19 Dados de testes com uma bomba Peerless de aspiração pela extremidade, tipo 1430, operada a 1750 rpm com um impulsor de diâmetro 14,0 pol., são:

Vazão, Q (gpm)	270	420	610	720	1000
Carga total, H (pé)	198	195	178	165	123
Potência de alimentação, $\mathcal{P}$ (hp)	25	30	35	40	45

Plote as curvas de desempenho para essa bomba; inclua uma curva de eficiência *versus* vazão em volume. Localize o ponto de melhor eficiência e especifique a capacidade da bomba nesse ponto.

10.20 Dados de testes com uma bomba Peerless de aspiração pela extremidade, tipo 1440, operada a 1750 rpm com um impulsor de diâmetro 14,0 pol., são:

Vazão, Q (gpm)	290	440	550	790	920	1280
Carga total, H (pé)	204	203	200	187	175	135
Potência de alimentação, $\mathcal{P}$ (hp)	30	35	40	45	50	60

Plote as curvas de desempenho para essa bomba; inclua uma curva de eficiência *versus* vazão em volume. Localize o ponto de melhor eficiência e especifique a capacidade da bomba nesse ponto.

10.21 Dados medidos durante os testes de uma bomba centrífuga a 3500 rpm são

Parâmetro	Entrada, Seção ①	Saída, Seção ②
Pressão manométrica, p (kPa)	95,2	412
Elevação acima do referencial, z (m)	1,25	2,75
Velocidade média do escoamento, $\bar{V}$ (m/s)	2,35	3,62

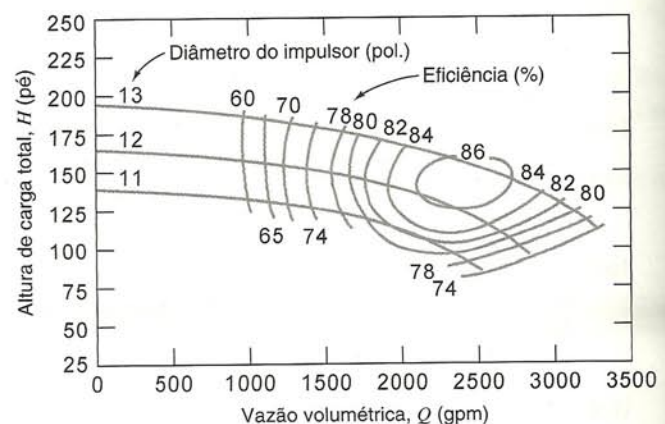
A vazão é de 11,5 m³/h e o torque aplicado ao eixo da bomba é de 3,68 N·m. Avalie as alturas de carga dinâmica totais na entrada e na saída da bomba, a potência hidráulica entregue ao fluido e a eficiência da bomba. Especifique o tamanho do motor elétrico necessário para acionar a bomba. Se a eficiência do motor elétrico for de 85%, calcule a potência elétrica necessária.

10.22 Escreva a velocidade específica da bomba em termos do coeficiente de escoamento e do coeficiente de carga.

10.23 Escreva a velocidade específica da turbina em termos do coeficiente de escoamento e do coeficiente de carga.

10.24 O *quilograma força* (kgf), definido como a força exercida por um quilograma de massa na gravidade padrão é comumente usado na prática européia. *O cavalo-vapor métrico (hpm ou cv)* é definido como 1 cv ≡ 75 m·kgf/s. Desenvolva uma expressão de conversão relacionando o cv com o hp dos EUA. Relacione a velocidade específica para uma turbina hidráulica — calculada em unidades de rpm, cv e metros — com a velocidade específica calculada nas unidades usuais nos EUA.

10.25 Uma pequena bomba centrífuga, quando testada a $N = 2875$ rpm com água, forneceu $Q = 252$ gpm e $H = 138$ pés no seu ponto de melhor eficiência ($\eta = 0,76$). Determine a velocidade específica da bomba nesta condição de teste. Esboce a forma do impulsor que você esperaria. Calcule a potência requerida pela bomba.

10.26 Curvas típicas de desempenho de uma bomba centrífuga, testada com três diferentes diâmetros de impulsor numa carcaça única são mostradas na figura. Especifique a vazão

P10.26

e a altura de carga produzidas pela bomba no seu ponto de melhor eficiência com um impulsor de 12 pol. Usando os princípios de escala, transponha esses dados a fim de prever o desempenho dessa bomba quando testada com impulsores de 11 pol. e de 13 pol. Comente sobre a precisão do procedimento de transposição.

10.27 No seu ponto de melhor eficiência ($\eta = 0{,}82$), uma bomba de fluxo misto, com $D = 500$ mm, fornece $Q = 0{,}75$ m³/s de água a $H = 39$ m, quando operando a $N = 1170$ rpm. Calcule a velocidade específica dessa bomba. Estime a potência requerida pela bomba. Determine os parâmetros de ajuste de curva de desempenho da bomba com base no ponto de bloqueio e no ponto de melhor eficiência. Transponha por escala a curva de desempenho a fim de estimar a vazão, a altura de carga, a eficiência e a potência requerida para acionar a mesma bomba a 860 rpm.

10.28 Um sistema de bombeamento deve ser especificado para uma estação elevatória numa instalação de tratamento de esgoto. A vazão média é de 30 milhões de galões por dia e a elevação requerida é de 30 pés. Impulsores à prova de entupimento devem ser utilizados; espera-se eficiência de cerca de 65%. Para uma instalação conveniente, motores elétricos de 50 hp ou menos são desejados. Determine o número de unidades motor/bomba necessárias e recomende uma velocidade de operação apropriada.

10.29 Uma bomba centrífuga opera a 1750 rpm; o impulsor tem pás curvadas para trás com $\beta_2 = 60°$ e $b_2 = 0{,}50$ pol. A uma vazão de 350 gpm, a velocidade radial de saída é $V_{n2} = 11{,}7$ pés/s. Estime a altura de carga que essa bomba pode desenvolver a 1150 rpm.

10.30 O Apêndice D contém curvas delimitando áreas para a seleção de modelos de bombas e curvas de desempenho para modelos individuais de bombas. Utilize esses dados para verificar as regras de similaridade para uma bomba Peerless tipo 4AE12, com diâmetro de impulsor $D = 11{,}0$ pol., operada a 1750 e a 3550 rpm nominais.

10.31 O Apêndice D contém curvas delimitando áreas para a seleção de modelos de bombas e curvas de desempenho para modelos individuais de bombas. Utilize esses dados e as regras de similaridade para prever o desempenho de uma bomba Peerless tipo 10AE12, com diâmetro de impulsor $D = 12{,}0$ pol., operada a 1150 rpm nominal.

10.32 Use os dados do Apêndice D para verificar as regras de similaridade para o efeito de mudar o diâmetro do impulsor de uma bomba Peerless tipo 4AE12 operada a 1750 e a 3550 rpm nominais.

10.33 Considere a bomba centrífuga horizontal Peerless, de carcaça bipartida, tipo 16A18B (Apêndice D). Use os dados de desempenho para verificar as regras de similaridade para (a) mudança no diâmetro do impulsor e (b) velocidades de operação de 705 e 880 rpm (note a mudança de escala entre as velocidades).

10.34 Curvas de desempenho para bombas Peerless horizontais, de carcaça bipartida, são apresentadas no Apêndice D. Desenvolva e plote curvas de ajuste para uma bomba tipo 4AE12, com diâmetro de impulsor $D = 12{,}12$ pol., acionada a 1750 e a 3550 rpm nominais. Verifique os efeitos de velocidade da máquina na transposição das curvas pelos princípios de escala, usando o procedimento descrito no Problema-Exemplo 10.7.

10.35 Curvas de desempenho para bombas Peerless horizontais, de carcaça bipartida, são apresentadas no Apêndice D. Desenvolva e plote curvas de ajuste para uma bomba tipo 10AE12 acionada a 1150 rpm nominal, usando o procedimento descrito no Problema-Exemplo 10.7.

10.36 Curvas de desempenho para bombas Peerless horizontais, de carcaça bipartida, são apresentadas no Apêndice D. Desenvolva e plote curvas de ajuste para uma bomba tipo 16A18B, com diâmetro de impulsor $D = 18{,}0$ pol., acionada a 705 e a 880 rpm nominais. Verifique os efeitos de velocidade da máquina na transposição das curvas pelos princípios de escala, usando o procedimento descrito no Problema-Exemplo 10.7.

10.37 O Problema 10.16 sugere que a carga de uma bomba em sua melhor eficiência é tipicamente em torno de 70% da carga de bloqueio. Use dados de bombas do Apêndice D para avaliar essa sugestão. Uma outra sugestão na Seção 10.4.3 é que a transposição apropriada por escala para testes de carcaças de bombas com diferentes diâmetros de impulsor é $Q \propto D^2$. Use dados de bombas para avaliar essa sugestão.

10.38 Uma bomba centrífuga deve operar a $Q = 250$ cfs (pé cúbico por segundo), $H = 400$ pés e $N = 870$ rpm. Um teste de modelo é planejado numa instalação onde a vazão máxima de água é de 5 cfs e um dinamômetro de 300 hp está disponível. Admita que as eficiências do modelo e do protótipo são comparáveis. Determine a velocidade apropriada para o teste do modelo e a razão de escala.

10.39 Dados de catálogo para uma bomba centrífuga de água, nas condições de projeto, são $Q = 250$ gpm e $\Delta p = 18{,}6$ psi a 1750 rpm. Uma calha medidora de laboratório requer 200 gpm e 32 pés de altura de carga. O único motor disponível desenvolve 3 hp a 1750 rpm. Esse motor é adequado para a calha medidora do laboratório? Como poderia ser melhorada a combinação bomba/motor?

10.40 Uma turbina de reação foi projetada para produzir 25.000 hp a 90 rpm sob uma altura de carga de 150 pés. Bancadas de laboratório estão disponíveis para fornecer 25 pés de altura de carga e para absorver 50 hp do modelo da turbina. Admita eficiências comparáveis para as turbinas modelo e protótipo. Determine a velocidade apropriada para o teste do modelo, a razão de escala e a vazão em volume.

10.41 White [43] sugere modelar a eficiência de uma bomba centrífuga usando o ajuste de curva $\eta = aQ - bQ^3$, onde a e b são constantes. Descreva um procedimento para avaliar a e b a partir de dados experimentais. Avalie a e b usando dados para a bomba Peerless tipo 10AE12, com diâmetro de impulsor $D = 12{,}0$ pol., a 1760 rpm (Apêndice D). Trace em gráfico e ilustre a precisão do ajuste de curva, comparando as eficiências prevista e medida para essa bomba.

10.42 A variação da viscosidade da água com a temperatura pode ser usada, em alguns casos, para obter semelhança dinâmica. Um modelo de bomba fornece 1,25 l/s de água a 15°C com uma altura de carga de 18,6 m, quando operando a 3500 rpm. Determine a temperatura da água que deve ser usada para obter operação dinamicamente semelhante a 1750 rpm. Estime a vazão em volume e a altura de carga produzidas pela bomba na condição de teste de velocidade mais baixa. Comente sobre os requisitos de *NPSH* para os dois testes.

10.43 Uma bomba de alimentação de caldeira de quatro estágios tem as linhas de aspiração e de recalque com diâmetros internos de 4 pol. e de 3 pol., respectivamente. A 3500 rpm, a bomba fornece nominalmente 400 gpm contra uma altura de carga de 400 pés enquanto bombeia água a 240°F. O manômetro da entrada, instalado 1,5 pé abaixo da linha de centro do impulsor, fornece uma leitura de 21,5 psig. A bomba deve ser certificada por testes de fábrica com a mesma vazão, velocidade e aumento de altura de carga, mas usando água a 80°F. Calcule o *NPSHA* na entrada da bom-

ba na instalação de campo. Avalie a altura de carga da sucção que deve ser usada no teste de fábrica a fim de duplicar as condições de aspiração no campo.

10.44 Dados de testes com uma bomba Peerless de aspiração pela extremidade, tipo 1430, operada a 1750 rpm com um impulsor de diâmetro 14,0 pol., são

Vazão, Q (gpm)	200	400	600	800	1000
Carga de sucção positiva líquida requerida, *NPSHR* (pé)	7,8	9,8	13,6	19,2	28,7

Desenvolva e plote uma equação de ajuste de curva para *NPSHR versus* vazão em volume, da forma $NPSHR = a + bQ^2$, onde a e b são constantes. Compare os resultados com os dados medidos.

10.45 Dados de testes com uma bomba Peerless de aspiração pela extremidade, tipo 1440, operada a 1750 rpm com um impulsor de diâmetro 14,0 pol., são

Vazão, Q (gpm)	200	400	600	800	1000	1200	1300
Carga de sucção positiva líquida requerida, *NPSHR* (pé)	5,5	6,3	8,5	11,3	15,8	22,0	27,0

Desenvolva e plote uma equação de ajuste de curva para *NPSHR versus* vazão em volume, da forma $NPSHR = a + bQ^2$, onde a e b são constantes. Compare os resultados com os dados medidos.

10.46 A altura de sucção positiva líquida requerida (*NPSHR*) por uma bomba pode ser expressa aproximadamente como uma função parabólica da vazão em volume. O *NPSHR* para uma bomba em particular, operando a 1750 rpm com água fria, é dado por $H_r = H_0 + AQ^2$, onde $H_0 = 10$ pés de água e $A = 4{,}1 \times 10^{-5}$ pé/(gpm)^2. Admita que o sistema de tubos na aspiração da bomba consiste em um reservatório, cuja superfície está 20 pés acima da linha de centro da bomba, de uma entrada de borda viva, 20 pés de tubos de ferro fundido com 6 pol. de diâmetro e um cotovelo de 90°. Calcule a vazão em volume máxima a 68°F para a qual a altura de carga da sucção é suficiente para operar essa bomba sem cavitação.

10.47 Para a bomba e sistema de escoamento do Problema 10.46, calcule a vazão máxima para água quente a diversas temperaturas e trace um gráfico contra a temperatura da água. (Certifique-se de considerar a variação de massa específica quando a temperatura da água varia.)

10.48 Uma grande frigideira de uma lanchonete contém óleo quente que é bombeado através de um trocador de calor. Partículas sólidas e gotas d'água provenientes do alimento frito são observadas no óleo recirculante. Que fatores especiais devem ser considerados na especificação das condições de operação das bombas de recirculação do óleo?

10.49 Uma bomba centrífuga, operando a $N = 1750$ rpm, eleva água entre dois reservatórios conectados por 200 pés de tubos de ferro fundido de 4 pol. e 200 pés de tubos de mesmo material de 3 pol. instalados em série. A diferença de cotas entre os reservatórios é de 10 pés. Estime o requerimento de carga, a potência necessária e o custo horário de energia elétrica para bombear água a 150 gpm para o reservatório mais alto.

10.50 Parte do suprimento de água para o Setor Sul do Parque Nacional do Grand Canyon é oriunda do Rio Colorado [44]. Uma vazão de 600 gpm, tomada do rio a uma elevação de 3734 pés, é bombeada para um tanque de armazenagem acima do Setor Sul, na cota 7022 pés. Parte da tubulação corre acima do solo e parte em uma galeria perfurada direcionalmente com broca, a ângulos de até 70° a partir da vertical; o comprimento total da linha é de 13.200 pés. Sob condições de operação de escoamento permanente, a perda de carga devida ao atrito é de 290 pés de água, além da elevação estática. Estime o diâmetro do tubo de aço comercial do sistema. Calcule a potência requerida de bombeamento se a eficiência da bomba for de 61%.

10.51 Uma bomba Peerless horizontal, de carcaça bipartida do tipo 4AE12, com impulsor de diâmetro 11,0 pol., operando a 1750 rpm, bombeia água entre dois reservatórios conectados por tubos de ferro fundido de 200 pés de 4 pol. e 200 pés de 3 pol., instalados em série. A elevação estática é de 10 pés. Plote a curva de carga do sistema e determine o ponto de operação da bomba.

10.52 Uma bomba centrífuga está instalada num sistema de tubulações de ferro fundido com $L = 1000$ pés e $D = 16$ pol. A superfície do reservatório a montante da bomba está 50 pés abaixo do reservatório a jusante. Determine e plote a curva de altura de carga do sistema. Determine a vazão em volume (magnitude e sentido) através do sistema quando a bomba não estiver operando. Estime a perda de carga por atrito, requisito de potência e custo horário de energia para elevar água a 14.600 gpm através desse sistema.

10.53 Uma bomba transfere água de um reservatório para outro através de dois trechos de tubos de ferro fundido em série. O primeiro trecho tem 1500 pés de comprimento e 10 pol. de diâmetro e o segundo, 500 pés de comprimento e 6 pol. de diâmetro. Uma vazão constante de 300 gpm é medida na junção entre os dois trechos. Obtenha e plote a curva de altura de carga do sistema *versus* vazão. Determine a vazão se o sistema for suprido pela bomba da Fig. 10.18, operando a 1750 rpm.

10.54 Os dados de desempenho para uma bomba são

H (pé)	148	140	130	115	100	75	50
Q (gpm)	0	800	1200	1600	2000	2400	2800

Estime a vazão quando a bomba é usada para mover água entre dois reservatórios abertos, através de 1200 pés de tubos de aço comercial com $D = 12{,}0$ pol., contendo duas curvas de 90° e uma válvula tipo gaveta, aberta, se o aumento de elevação é de 50 pés. Determine o coeficiente de perda da válvula gaveta necessário para reduzir a vazão volumétrica pela metade.

10.55 Considere novamente a bomba e a tubulação do Problema 10.54. Determine a vazão volumétrica e o coeficiente de perda da válvula gaveta para o caso de duas bombas idênticas instaladas em *paralelo*.

10.56 Considere novamente a bomba e a tubulação do Problema 10.54. Determine a vazão volumétrica e o coeficiente de perda da válvula gaveta para o caso de duas bombas idênticas instaladas em *série*.

10.57 A resistência de um dado tubo aumenta com a idade, à medida que se formam depósitos, aumentando a rugosidade e reduzindo o diâmetro (veja a Fig. 8.14). Multiplicadores típicos para serem aplicados ao fator de atrito são dados em [16]:

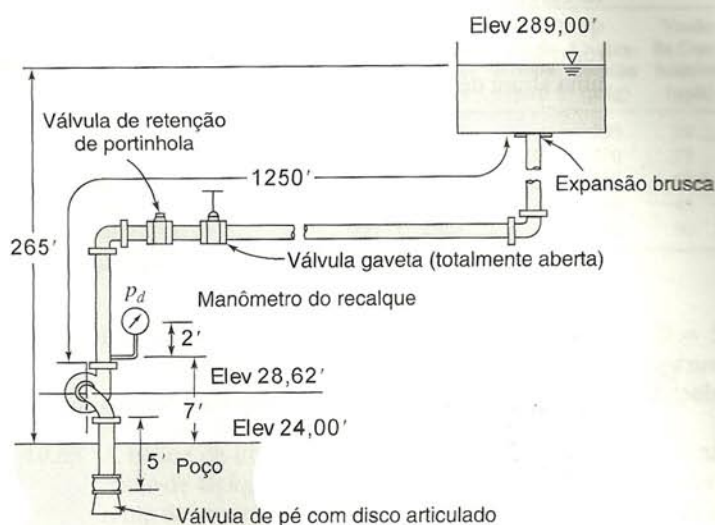
Idade do Tubo (anos)	Tubos Pequenos, 4-10 pol.	Tubos Grandes, 12-60 pol.
Novo	1,00	1,00
10	2,20	1,60
20	5,00	2,00
30	7,25	2,20
40	8,75	2,40
50	9,60	2,86
60	10,0	3,70
70	10,1	4,70

Considere novamente a bomba e o sistema de tubos do Problema 10.54. Estime as reduções percentuais na vazão volumétrica que ocorrerão após (a) 20 anos e (b) 40 anos de utilização, se as características da bomba permanecerem constantes. Repita os cálculos para o caso da altura de carga da bomba ser reduzida de 10% após 20 anos e de 25% após 40 anos de uso.

10.58 Considere novamente a bomba e o sistema de tubos do Problema 10.55. Estime as reduções percentuais na vazão em volume que ocorrerão após (a) 20 anos e (b) 40 anos de uso, se as características da bomba permanecerem constantes. Repita os cálculos para o caso da altura de carga da bomba ser reduzida de 10% após 20 anos e de 25% após 40 anos de utilização. (Use os dados do Problema 10.57 para o aumento do fator de atrito com a idade.)

10.59 Considere novamente a bomba e o sistema de tubos do Problema 10.56. Estime as reduções percentuais na vazão em volume que ocorrem após (a) 20 anos e (b) 40 anos de uso, se as características da bomba permanecerem constantes. Repita os cálculos para o caso da altura de carga da bomba ser reduzida de 10% após 20 anos e de 25% após 40 anos de utilização. (Use os dados do Problema 10.57 para o aumento do fator de atrito com a idade.)

10.60 A cidade de Englewood, Colorado, é abastecida com água do South Platte River, na elevação de 5280 pés [44]. A água é bombeada para reservatórios de armazenagem na elevação de 5310 pés. O diâmetro interno da tubulação de aço é de 27 pol.; o seu comprimento é de 5800 pés. A instalação foi projetada para uma capacidade inicial de (vazão) de 31 cfs e uma capacidade futura de 38 cfs. Calcule e plote a curva de resistência do sistema. Especifique um sistema apropriado de bombeamento. Estime a potência de bombeamento requerida para operação em regime permanente, para ambas as vazões, inicial e futura.

10.61 Uma bomba no sistema mostrado retira água de um poço e lança-a num tanque aberto através de 1250 pés de tubo novo de aço, schedule 40, com diâmetro nominal de 4 pol. O tubo vertical da aspiração tem comprimento de 5 pés e inclui uma válvula de pé com disco articulado e um cotovelo de 90°. A linha de recalque inclui dois cotovelos padronizados, de 90°, uma válvula angular de retenção e uma válvula gaveta totalmente aberta. A vazão de projeto é de 200 gpm. Determine as perdas de carga nas linhas de sucção e de descarga. Calcule o *NPSHA*. Selecione uma bomba adequada para esta aplicação.

P10.61

10.62 Considere o sistema de escoamento e os dados do Problema 10.61, e as informações de envelhecimento de tubos apresentadas no Problema 10.57. Selecione a(s) bomba(s) que manterá(ão) a vazão do sistema no valor desejado por (a) 10 anos e (b) 20 anos. Compare a vazão fornecida por essas bombas com aquela fornecida pela bomba dimensionada para tubos novos apenas.

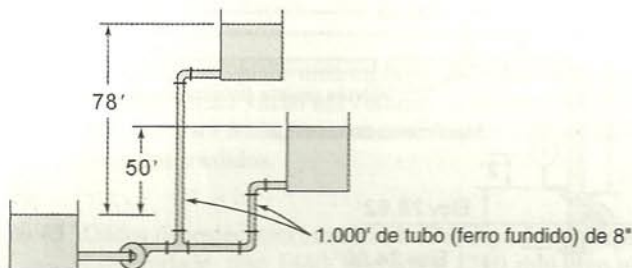
10.63 Considere o sistema de escoamento mostrado no Problema 8.100. Avalie *o NPSHR* na entrada da bomba. Selecione uma bomba apropriada para esta aplicação. Use os dados de aumento do fator de atrito com a idade do tubo do Problema 10.57 para estimar a redução de vazão após 10 anos de operação.

10.64 Considere o sistema de escoamento descrito no Problema 8.136. Selecione uma bomba apropriada para esta aplicação. Verifique o *NPSHR versus* o *NPSHA* para esse sistema.

10.65 Considere o sistema de escoamento mostrado no Problema 8.139. Selecione uma bomba apropriada para esta aplicação. Verifique os requisitos de eficiência e de potência da bomba em comparação com aqueles do enunciado do problema.

10.66 Um bocal de incêndio é suprido por uma mangueira de lona de 300 pés de comprimento e de 3 pol. de diâmetro (com $e = 0{,}001$ pé). Água de um hidrante é fornecida a 50 psig para uma bomba auxiliar na carroceria do carro de bombeiros. Nas condições de operação de projeto, a pressão na entrada do bocal é de 100 psig e a perda de carga ao longo da mangueira é de 33 psig para cada 100 pés de comprimento. Calcule a vazão de projeto e a máxima velocidade na saída do bocal. Selecione uma bomba apropriada para esta aplicação, determine sua eficiência na condição de operação e calcule a potência requerida para acionar a bomba.

10.67 Considere a rede de tubos do Problema 8.146. Selecione uma bomba adequada para fornecer uma vazão total de 300 gpm através da rede de tubos.

10.68 Um sistema de bombeamento com duas diferentes alturas estáticas é mostrado. Cada reservatório é suprido por uma linha que consiste de tubos de ferro fundido com 1000 pés de comprimento e 8 pol. de diâmetro. Avalie e plote a curva de carga *versus* vazão do sistema. Explique o que acontece quando a carga da bomba é menor que a altura do reservatório superior. Calcule a vazão fornecida pela bomba para uma altura de 88 pés.

P10.68

10.69 Considere o sistema de escoamento mostrado no Problema 8.78. Avalie o *NPSHA* na entrada da bomba. Selecione uma bomba apropriada para esta aplicação. Use os dados de envelhecimento de tubos do Problema 10.57 para estimar a redução na vazão após 10 anos de operação.

10.70 Considere o sistema de circulação de água gelada do Problema 8.140. Selecione bombas que possam ser combinadas em paralelo para suprir a demanda total de escoamento. Calcule a potência requerida para três bombas em paralelo. Calcule também as vazões volumétricas e as potências requeridas quando somente 1 ou 2 dessas bombas operam.

10.71 Considere a tubulação de escoamento de gasolina do Problema 8.111. Selecione bombas que, combinadas em paralelo, atendam o requisito de vazão total. Calcule a potência necessária para 4 bombas em paralelo. Calcule também as vazões e as potências requeridas quando apenas l, 2 ou 3 dessas bombas operam.

10.72 Água é bombeada de um lago (em $z = 0$) para um grande reservatório localizado sobre uma encosta acima do lago. O tubo é de ferro galvanizado com 3 pol. de diâmetro. A seção de admissão (entre o lago e a bomba) inclui uma entrada arredondada, um cotovelo padrão de 90° e 50 pés de tubo. A seção de recalque (entre a saída da bomba e a descarga para o tanque aberto) inclui 2 cotovelos padrões de 90°, uma válvula gaveta e 150 pés de tubo. O tubo de descarga (dentro do tanque) está a uma altura $z = 70$ pés. Calcule a curva de vazão do sistema. Estime o ponto de operação do sistema. Determine a potência consumida pela bomba se a eficiência no ponto de operação é de 80%. Esboce a curva do sistema quando o nível de água no tanque superior atinge $z = 90$ pés. Se o nível de água no tanque superior estiver em $z = 75$ pés e a válvula for parcialmente fechada para reduzir a vazão para 0,1 pé^3/s, esboce a curva do sistema para essa condição de operação. Você esperaria que a eficiência da bomba fosse maior para a primeira ou para a segunda condição de operação? Por quê?

10.73 A água do sistema de irrigação de uma casa de verão deve ser retirada de um lago adjacente. A casa está localizada em uma encosta 80 pés acima da superfície do lago. A bomba está localizada num terreno 10 pés acima da superfície do lago. O sistema de irrigação requer 10 gpm a 50 psig. Os tubos devem ser de ferro galvanizado com diâmetro de 1 pol. A seção de admissão (entre o lago e a entrada da bomba) inclui uma entrada reentrante, um cotovelo padrão de 45°, um cotovelo padrão de 90° e 50 pés de tubo. A seção de recalque (entre a saída da bomba e a conexão de irrigação) inclui dois cotovelos padrões de 45° e 120 pés de tubo. Avalie a perda de carga no lado da sucção da bomba. Calcule a pressão manométrica na entrada da bomba. Determine o requerimento de potência hidráulica da bomba. Se o diâmetro do tubo fosse aumentado para 1,5 pol., o requerimento de potência da bomba decresceria, cresceria ou permaneceria a mesma? Que diferença faria se a bomba fosse localizada no meio da encosta?

10.74 Dados do fabricante para a bomba submersível "Little Giant Water Wizard" são

Altura de recalque (pé)	1	2	5	10	15	20	26,3
Vazão de água (gpm)	20,4	20	19	16	13	8	0

O manual do fabricante também afirma: "Nota: Esses valores são baseados na descarga num tubo de 1 pol. com perdas de atrito desprezíveis. Usando-se um adaptador de jardim de 3/4 de pol., o desempenho será reduzido de aproximadamente 15%." Plote uma curva de desempenho para a bomba. Desenvolva uma equação para ajuste da curva de desempenho; mostre a curva do ajuste no gráfico. Calcule e plote a vazão da bomba *versus* altura de descarga através de um trecho de 50 pés de mangueira de jardim, lisa, de 3/4 de pol. Compare com a curva de descarga no tubo de 1 pol.

10.75 Considere a mangueira e o bocal de incêndio do Problema 8.142. Especifique uma bomba apropriada e um diâmetro de impulsor para alimentar quatro dessas mangueiras simultaneamente. Calcule a potência requerida pela bomba.

10.76 Considere o sistema de filtragem da piscina do Problema 8.147. Admita que o tubo usado é de PVC, com diâmetro nominal de 3/4 de pol. (plástico liso). Especifique a velocidade e o diâmetro do impulsor e estime a eficiência de uma bomba adequada.

10.77 Dados de desempenho para um ventilador centrífugo tipo BL da Buffalo Forge, com 36,5 pol. de diâmetro, testado a 600 rpm, são

Vazão, Q (cfm)	6000	8000	10.000	12.000	14.000	16.000
Aumento de pressão estática, Δp (pol. de H_2O)	2,10	2,00	1,76	1,37	0,92	0,42
Potência de alimentação, $\mathcal{P}$ (hp)	2,75	3,18	3,48	3,51	3,50	3,22

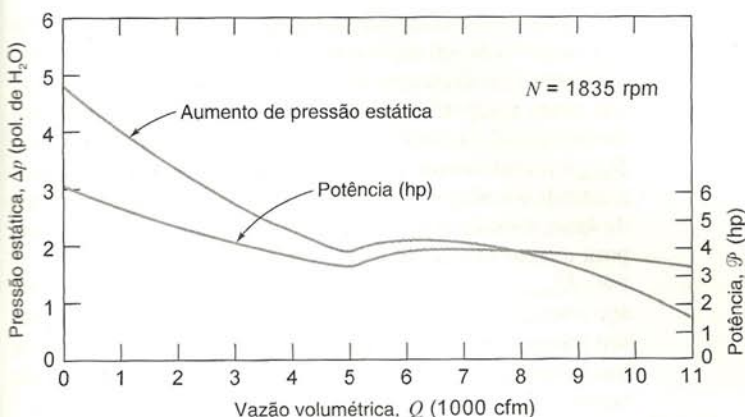
Plote os dados de desempenho *versus* vazão em volume. Calcule a eficiência estática e mostre a curva no gráfico. Determine o ponto de melhor eficiência e especifique os valores de operação do ventilador nesse ponto.

10.78 Usando o ventilador do Problema 10.77 determine o mínimo tamanho de duto quadrado de chapa metálica que transportará uma vazão de 12.000 cfm por uma distância de 50

pés. Estime o aumento na vazão se a rotação do ventilador for aumentada para 800 rpm.

10.79 Considere o ventilador e os dados de desempenho do Problema 10.77. Para $Q = 12.000$ cfm, a pressão dinâmica é equivalente a 0,16 pol. de água. Avalie a área de saída do ventilador. Plote o aumento de pressão total e a potência absorvida (hp) *versus* vazão em volume. Calcule a eficiência total do ventilador e mostre a curva no gráfico. Determine o ponto de melhor eficiência e especifique os valores de operação do ventilador nesse ponto.

10.80 Os dados de desempenho do Problema 10.77 são para um rotor de ventilador de 36,5 pol. Esse ventilador também é fabricado com rotores de 40,3, 44,5, 49,0 e 54,3 polegadas. Selecione um ventilador padrão que forneça 30.000 cfm contra um aumento de pressão estática de 5 pol. de H_2O. Admita ar padrão na entrada do ventilador. Determine a velocidade e a potência do ventilador necessárias.

10.81 As características de desempenho de um ventilador de fluxo axial da Buffalo Forge são apresentadas na figura. O ventilador é utilizado para alimentar um túnel de vento de 1 pé² de seção transversal. O túnel consiste em uma contração de entrada suave, duas telas (cada uma com coeficiente de perda $K = 0{,}12$), a seção de teste e um difusor, onde a seção transversal é ampliada para o diâmetro de 24 pol. na entrada do ventilador. O fluxo do ventilador é descarregado de volta no ambiente. Calcule e plote a curva característica de perda de pressão do sistema *versus* vazão em volume. Estime a máxima velocidade do escoamento de ar disponível na seção de teste desse túnel de vento.

10.82 Considere novamente o ventilador de fluxo axial e o túnel de vento do Problema 10.81. Transponha por escala o desempenho do ventilador à medida que ela varia com a velocidade de operação. Desenvolva e plote uma "curva de calibração" mostrando a velocidade do escoamento na seção de teste (em m/s) *versus* a velocidade do ventilador (em rpm).

10.83 Dados de testes experimentais para a bomba de combustível de um motor de avião são mostrados abaixo. Essa bomba de engrenagens é necessária para suprir combustível de jatos a 450 lbm/h e 150 psig para o controlador de combustível do motor. Os testes foram conduzidos a 10, 96 e 100% da velocidade nominal da bomba de 4536 rpm. A cada velocidade constante, a contrapressão sobre a bomba era ajustada e a vazão, medida. Num único gráfico, plote curvas de pressão *versus* vazão para as três velocidades constantes. Estime o volume de deslocamento da bomba por revolução. Calcule a eficiência volumétrica para cada ponto de teste e esboce os contornos de η_v constante. Avalie a perda de energia devida ao estrangulamento por válvula para 100% de velocidade e vazão total para o motor.

Velocidade da Bomba (rpm)	Contrapressão (psig)	Vazão de combustível (pph*)	Velocidade da Bomba (rpm)	Contrapressão (psig)	Vazão de Combustível (pph)	Velocidade da Bomba (rpm)	Contrapressão (psig)	Vazão de Combustível (pph)
	200	1810		200	1730		200	89
4536	300	1810	4355	300	1750	453	250	73
(100%)	400	1810	(96%)	400	1735	(10%)	300	58,5
	500	1790		500	1720		350	45
	900	1720		900	1635		400	30

*Vazão de combustível medida em libras por hora (pph ou lbm/h).

10.84 Um barco a ar é impulsionado por uma hélice com $D = 5$ pés, acionada à velocidade máxima, $N = 1800$ rpm, por um motor de 160 hp. Estime o máximo empuxo produzido pela hélice (a) em repouso e (b) a $V = 30$ mph.

10.85 A hélice de um barco de propulsão a ar movimenta ar na razão de 40 kg/s. Quando em repouso, a velocidade da corrente de ar atrás da hélice é de 40 m/s em um local onde a pressão é atmosférica. Calcule (a) o diâmetro da hélice, (b) o empuxo produzido em repouso e (c) o empuxo produzido quando o barco move-se para frente a 10 m/s, se a vazão mássica através da hélice permanece constante.

10.86 Um avião a jato viajando a 200 m/s aspira 40 kg/s de ar e descarrega-o a uma velocidade de 500 m/s, relativa ao avião. Determine a eficiência de propulsão (definida como a razão entre o trabalho útil fornecido e a energia mecânica cedida para o fluido) desse avião.

10.87 Dados de arrasto para modelo e protótipo de fragatas de mísseis guiados são apresentados nas Figs. 7.1 e 7.2. As dimensões do navio protótipo são dadas no Problema 9.67. Utilize esses dados com as características de desempenho da hélice da Fig. 10.40, para dimensionar uma única hélice para impulsionar o navio real. Calcule o tamanho da hélice, a velocidade de operação e a potência absorvida, se ela operar na eficiência máxima quando o navio viaja a sua velocidade máxima, $V = 37{,}6$ nós.

10.88 A hélice da "aeronave" a propulsão humana Gossamer Condor tem diâmetro $D = 12$ pés e gira a $N = 107$ rpm. Detalhes adicionais da aeronave são dados no Problema 9.147. Estime as características adimensionais de desempenho e eficiência dessa hélice nas condições de cruzeiro. Suponha que o piloto gasta 70% da potência máxima no regime de cruzeiro. (Veja a Referência 45 para mais informações sobre vôo a propulsão humana.)

10.89 A eficiência de propulsão, η, de uma hélice é definida como a razão entre o trabalho útil produzido e a energia mecânica adicionada ao fluido. Determine a eficiência de propulsão do barco em movimento do Problema 10.85.

10.90 Equações para o empuxo, potência e eficiência de dispositivos de propulsão foram deduzidas na Seção 10.5.1d. Mostre que aquelas equações podem ser combinadas para a condição de empuxo constante para obter

$$\eta = \frac{2}{1 + \left(1 + \dfrac{F_T}{\dfrac{\rho V^2}{2}\dfrac{\pi D^2}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Interprete esse resultado fisicamente.

10.91 Cálculos preliminares de uma usina hidroelétrica mostram que uma altura de carga líquida de 2350 pés está disponível com uma vazão de 75 pés³/s. Compare a geometria e efici-

ência de rodas Pelton projetadas para funcionar a (a) 450 rpm e (b) 600 rpm.

10.92 As condições na entrada do bocal de uma turbina Pelton são $p = 4{,}81$ MPa (manométrica) e $V = 6{,}10$ m/s. O diâmetro do jato é $d = 200$ mm e o coeficiente de perda do bocal é $K_{bocal} = 0{,}04$. O diâmetro da roda é $D = 2{,}45$ m. Nesta condição de operação, $\eta = 0{,}86$. Calcule (a) a potência produzida, (b) a velocidade normal de operação, (c) a velocidade aproximada de descarga, (d) o torque na velocidade normal de operação e (e) o torque aproximado a velocidade nula.

10.93 As turbinas de reação em Niagara Falls são do tipo Francis. O diâmetro externo do impulsor é de 176 pol. Cada turbina produz 72.500 hp a 107 rpm, com eficiência de 93,8% sob uma altura de carga líquida de 214 pés. Calcule a velocidade específica dessas unidades. Avalie a vazão em volume em cada turbina. Estime o diâmetro do tubo de adução, se ele tem 1300 pés de comprimento e a altura de carga líquida é 85% da altura de carga bruta.

10.94 As Unidades 19, 20 e 21 de turbinas Francis instaladas na represa de Grand Coulee no rio Columbia, são *muito* grandes [46]. Cada rotor tem 32,6 pés de diâmetro e contém 550 tons de aço fundido. Em condições nominais, cada turbina desenvolve 820.000 hp a 72 rpm sob uma altura de carga de 285 pés. A eficiência é de aproximadamente 95% nas condições nominais. As turbinas operam com alturas de carga de 220 a 355 pés. Calcule a velocidade específica nas condições nominais de operação. Estime a vazão máxima de água através de cada turbina.

10.95 A Fig. 10.11 apresenta dados para a eficiência de uma grande roda d'água Pelton instalada na Usina Hidroelétrica de Tiger Creek da Pacific Gas & Electric Company, perto de Jackson, Califórnia. Essa unidade tem potência nominal de 36.000 hp quando operada a 225 rpm sob uma altura de carga de 1190 pés de água. Admita ângulos de escoamento e coeficiente de perda no bocal razoáveis. Determine o diâmetro do rotor e estime o diâmetro do jato e a vazão volumétrica.

10.96 Dados medidos do desempenho das turbinas de reação da represa de Shasta, perto de Redding, Califórnia, são mostrados na Fig. 10.13. Cada turbina tem potência nominal de 103.000 hp quando operada a 138,6 rpm sob uma altura de carga líquida de 380 pés. Avalie a velocidade específica e calcule o torque no eixo desenvolvido por cada turbina nas condições nominais de operação. Calcule e plote a vazão de água, por turbina, necessária para produzir a potência nominal, como uma função da altura de carga.

10.97 Uma turbina de impulsão deve desenvolver 20.000 hp com um único rotor, num local onde a altura de carga líquida é de 1120 pés. Determine a velocidade, diâmetro do rotor e diâmetro do jato adequados para operação com um jato único e com jatos múltiplos. Compare com uma instalação de dois rotores em série. Estime o consumo de água requerido.

10.98 Os testes de um modelo de uma turbina de impulsão sob uma altura de carga líquida de 65,5 pés produziram os seguintes resultados:

Velocidade da Roda (rpm)	Vazão sem Carga (cfs)	Leitura do Dinamômetro (lbf) (R = 5,25 pé)					
275	0,110	6,8	14,9	22,0	28,9	40,0	48,0
300	0,125	5,9	12,9	19,8	25,5	36,0	43,8
Vazão (cfs)		0,397	0,773	1,114	1,414	1,896	2,315

Calcule e plote a potência produzida pela máquina e a sua eficiência *versus* vazão de água.

10.99 De acordo com um porta-voz da Pacific Gas & Electric Company, a usina de Tiger Creek, localizada a leste de Jackson, Califórnia, é uma entre as 71 usinas hidroelétricas da companhia. A usina tem 1219 pés de altura de carga bruta, consome 750 cfs de água, tem potência nominal de 60 MW e opera a 58 MW. Alega-se que a usina produz 968 kW·h/(acre·pé) de água e $336{,}4 \times 10^6$ kW·h por ano de operação. Estime a altura de carga líquida do local, a velocidade específica da turbina e a sua eficiência. Comente quanto à consistência interna desses dados.

10.100 Em unidades típicas dos Estados Unidos, a definição comum de velocidade específica para uma turbina hidráulica é dada pela Eq. 10.18*b*. Desenvolva uma conversão entre essa definição e uma outra verdadeiramente adimensional em unidades SI. Avalie a velocidade específica de uma turbina de impulsão, operando a 400 rpm, sob uma altura de carga líquida de 1190 pés com 86% de eficiência, quando suprida por um único jato de diâmetro 6 pol. Use ambas as unidades, americana e SI. Estime o diâmetro do rotor.

10.101 Projete um sistema de tubulação para o suprimento de água para uma turbina a partir de um reservatório na montanha. O reservatório está localizado a 300 m acima do local da turbina. A eficiência da turbina é de 80%, e ela deve produzir 25 kW de potência mecânica. Defina o mínimo tamanho padrão requerido para o tubo de suprimento de água para a turbina e a vazão volumétrica de água requerida. Discuta os efeitos de eficiência da turbina, rugosidade do tubo e instalação de um difusor na saída da turbina, sobre o desempenho da instalação.

10.102 Uma pequena turbina hidráulica de impulsão é suprida com água através de um tubo de adução, com diâmetro D e comprimento L; o diâmetro do jato é d. A diferença de elevação entre a superfície no reservatório e a linha de centro do bocal é Z. O coeficiente de perda de carga no bocal é K_{bocal} e o coeficiente de perda de carga do reservatório para a entrada do adutor é $K_{entrada}$. Determine a velocidade do jato de água, a vazão em volume e a potência hidráulica do jato, para o caso em que $Z = 300$ pés, $L = 1000$ pés, $D = 6$ pol., $K_{entrada} = 0{,}5$, $K_{bocal} = 0{,}04$ e $d = 2$ pol., se o tubo for de aço comercial. Plote a potência do jato como uma função do seu diâmetro para determinar o diâmetro ótimo e a potência hidráulica resultante desse jato. Comente sobre os efeitos de variação dos coeficientes de perda e da rugosidade do tubo.

10.103 A NASA (National Aeronautics & Space Administration) e o DOE (Department of Energy) dos Estados Unidos copatrocinam um grande gerador a turbina eólica de demonstração, em Plum Brook, perto de Sandusky, Ohio [41]. A turbina tem duas pás, com $D = 38$ m, e fornece potência máxima quando a velocidade do vento é acima de $V = 29$ km/h. Ela foi projetada para produzir 100 kW com uma eficiência mecânica de 0,75. O rotor foi projetado para operar a uma velocidade constante de 40 rpm, em ventos acima de 6 mph, por meio do controle da carga do sistema e do ajuste dos ângulos das pás. Para a condição de potência máxima, calcule a velocidade periférica do rotor e o coeficiente de potência.

10.104 Um modelo de um moinho de vento de pás múltiplas, típico das fazendas americanas, deve ser construído para demonstração. O modelo, com $D = 2$ pés, deve desenvolver potência máxima a uma velocidade do vento de $V = 22$ mph. Calcule a velocidade angular do modelo para ótima geração de potência. Estime a potência produzida.

10.105 A maior turbina eólica Darrieus conhecida, de eixo vertical, foi construída pelo DOE dos Estados Unidos perto de Sandia, Novo México [42]. Essa máquina tem altura de 60

pés e diâmetro de 30 pés; a área varrida pelo rotor é de quase 1200 pés². Estime a potência máxima que essa turbina pode produzir num vento de 20 mph.

10.106 Um moinho típico de fazenda americana, com múltiplas pás, tem $D = 7$ pés e foi projetado para produzir potência máxima em ventos de $V = 15$ mph. Estime a vazão de água fornecida como função da altura para a qual a água é bombeada por esse moinho.

10.107 Extrudados de alumínio, com os padrões dos aerofólios simétricos da NACA, são freqüentemente empregados para constituir as "pás" de turbinas eólicas Darrieus. A seguir, encontram-se coeficientes de sustentação e de arrasto [47] para uma seção NACA 0012, testada a $Re = 6 \times 10^6$ com rugosidade padrão (a seção estola para $\alpha > 12°$):

Ângulo de ataque, α (grau)	0	2	4	6	8	10	12
Coeficiente de sustentação, C_L (—)	0	0,23	0,45	0,68	0,82	0,94	1,02
Coeficiente de arrasto, C_D (—)	0,0098	0,0100	0,0119	0,0147	0,0194	—	—

Analise o escoamento de ar relativo a um elemento de pá de uma turbina eólica Darrieus girando em torno do seu eixo troposquiano. Desenvolva um modelo numérico para o elemento de pá. Calcule o coeficiente de potência desenvolvido pelo elemento de pá como uma função da razão de velocidade periférica. Compare seu resultado com a tendência geral de potência produzida pelos rotores Darrieus mostrada na Fig. 10.45.

10.108 Os dados de sustentação e arrasto para a seção de aerofólio NACA 23015 são apresentados na Fig. 9.17. Considere uma turbina eólica de duas hélices, de eixo horizontal, com seção de pá NACA 23015. Analise o escoamento de ar relativo a um elemento de pá da turbina eólica quando em rotação. Desenvolva um modelo numérico para o elemento de pá. Calcule o coeficiente de potência desenvolvido pelo elemento de pá como uma função da razão de velocidade periférica. Compare seu resultado com a tendência geral de potência produzida para rotores de turbinas de alta velocidade, de duas pás, mostrados na Fig. 10.45.

Capítulo 11

INTRODUÇÃO AO ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

No Cap. 4 desenvolvemos formulações para volume de controle das equações básicas. Para escoamento incompressível, as duas variáveis de principal interesse eram a pressão e a velocidade. As equações da continuidade e da quantidade de movimento forneceram as duas relações independentes necessárias para equacionar essas variáveis. No Cap. 8, a equação da energia foi utilizada para identificar as perdas de energia mecânica decorrentes do atrito nos escoamentos em dutos.

O escoamento "compressível" implica variações apreciáveis na massa específica num campo de escoamento. A compressibilidade torna-se importante nos escoamentos de alta velocidade ou com grandes mudanças de temperatura. Grandes variações de velocidade envolvem grandes variações de pressão; no escoamento de gases, essas variações de pressão são acompanhadas de alterações significativas tanto na massa específica quanto na temperatura. Uma vez que duas variáveis adicionais são encontradas no tratamento do escoamento compressível, duas equações adicionais são necessárias. Tanto a equação da energia quanto uma equação de estado devem ser aplicadas para resolver problemas de escoamento compressível.

Em nosso estudo de escoamento de fluido compressível, lidaremos primariamente com o escoamento permanente e unidimensional de um gás ideal. Embora muitos escoamentos reais de interesse sejam mais complexos, essas restrições permitem que nos concentremos nos efeitos de processos básicos do escoamento.

Na próxima seção, faz-se uma revisão da termodinâmica necessária para o estudo de escoamentos compressíveis, incluindo uma equação de estado e as equações $T\,ds$.

11.1 REVISÃO DE TERMODINÂMICA

A pressão, a massa específica e a temperatura de uma substância podem ser relacionadas por uma equação de estado. Embora muitas substâncias apresentem comportamento complexo, a experiência mostra que a maioria dos gases de interesse da engenharia, à pressão e temperatura moderadas, são bem representados pela equação de estado do gás ideal,

$$p = \rho RT \tag{11.1}$$

onde R é uma constante para cada gás;[1] R é dado por

$$R = \frac{R_u}{M_m}$$

onde R_u é a constante universal dos gases, $R_u = 8314$ N·m/(kgmol·K) $= 1544$ pés·lbf/(lbmol·°R) e M_m é a massa molecular do gás. Embora nenhuma substância real comporte-se exatamente como um gás ideal,[2] a Eq. 11.1 erra em menos de 1% para o ar à temperatura ambiente, para pressões tão elevadas quanto 30 atm. Para o ar a 1 atm, a equação erra em menos de 1% para temperaturas tão baixas quanto 140 K.

O gás ideal tem outras características que são simples e úteis. Em geral, a energia interna de uma substância pode ser expressa como $u = u(v, T)$, onde $v \equiv 1/\rho$ é o volume específico. Logo,

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$$

O calor específico a volume constante é definido como

$c_v \equiv \left(\dfrac{\partial u}{\partial T}\right)_v$, de modo que

$$du = c_v\, dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$$

Para qualquer substância que siga a equação de estado do gás ideal, $p = \rho RT$, logo $(\partial u/\partial v)_T = 0$ (veja a Seção 4.2 de [2]), e portanto $u = u(T)$. Conseqüentemente,

$$du = c_v\, dT \tag{11.2}$$

para um gás ideal; isso significa que variações de energia interna e de temperatura podem ser relacionadas se c_v for conhecido. Além disso, como $u = u(T)$, então $c_v = c_v(T)$.

A entalpia de uma substância é definida como $h \equiv u + p/\rho$. Para um gás ideal, $p = \rho RT$, e por conseguinte $h = u + RT$. Uma vez que $u = u(T)$ para um gás ideal, h também deve ser uma função de temperatura, apenas.

Para obter a relação entre h e T, expressamos h na sua forma mais geral como

$$h = h(p, T)$$

Então

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

---

[1] Para o ar, $R = 287$ N·m/(kg·K) $= 53{,}3$ pés·lbf/(lbm·°R).

[2] Veja, por exemplo, [1].

Visto que o calor específico a pressão constante é definido como

$c_p \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$,

$$dh = c_p\, dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

Mostramos que, para um gás ideal, h é uma função apenas de T. Conseqüentemente, $(\partial h/\partial p)_T = 0$ e

$$dh = c_p\, dT \qquad (11.3)$$

Novamente, como h é uma função apenas de T, a Eq. 11.3 exige que c_p seja uma função de T, apenas, para um gás ideal.

Os calores específicos para um gás ideal são funções de temperatura, apenas, como mostramos. A diferença entre eles é uma constante para cada gás. De

$$h = u + RT$$

Podemos escrever

$$dh = du + R\,dT$$

Combinando essa equação com a Eq. 11.3, e usando a Eq. 11.2, podemos escrever

$$dh = c_p\, dT = du + R\,dT = c_v\, dT + R\,dT$$

Então

$$c_p - c_v = R \qquad (11.4)$$

A razão entre calores específicos é definida como

$$k \equiv \frac{c_p}{c_v} \qquad (11.5)$$

Utilizando a definição de k, a Eq. 11.4 pode ser resolvida para ambos, c_p e c_v, em termos de k e R. Assim,

$$c_p = \frac{kR}{k-1} \qquad (11.6a)$$

e

$$c_v = \frac{R}{k-1} \qquad (11.6b)$$

Dentro de faixas de temperatura razoáveis, os calores específicos de um gás ideal podem ser tratados como constantes para cálculos com precisão de engenharia. Nessas condições,

$$u_2 - u_1 = \int_{u_1}^{u_2} du = \int_{T_1}^{T_2} c_v\, dT = c_v(T_2 - T_1) \qquad (11.7a)$$

$$h_2 - h_1 = \int_{h_1}^{h_2} dh = \int_{T_1}^{T_2} c_p\, dT = c_p(T_2 - T_1) \qquad (11.7b)$$

A Tabela A.6 do Apêndice A apresenta dados para M_m, c_p, c_v, R e k, para gases comuns.

A propriedade entropia é extremamente útil na análise de escoamentos compressíveis. Diagramas de estado, particularmente o diagrama temperatura-entropia (Ts), são auxílios valiosos na interpretação física de resultados analíticos. Como faremos uso extensivo de diagramas Ts na resolução de problemas de escoamentos compressíveis, vamos rever brevemente algumas relações úteis envolvendo a propriedade entropia [3, 4].

A entropia é definida pela equação

$$\Delta S \equiv \int_{\text{rev}} \frac{\delta Q}{T} \quad \text{ou} \quad dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}} \qquad (11.8)$$

onde o subscrito significa *reversível*.

A desigualdade de Clausius, deduzida da segunda lei da termodinâmica, estabelece que

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Como uma conseqüência da segunda lei, podemos escrever

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad \text{ou} \quad T\,dS \geq \delta Q \qquad (11.9a)$$

Para processos *reversíveis*, vale a igualdade, e

$$T\,ds = \frac{\delta Q}{m} \text{ (processo reversível)} \qquad (11.9b)$$

A desigualdade vale para processos *irreversíveis*, e

$$T\,ds > \frac{\delta Q}{m} \text{ (processo irreversível)} \qquad (11.9c)$$

Para um processo *adiabático*, $\delta Q/m \equiv 0$. Portanto,

$$ds = 0 \text{ (processo adiabático reversível)} \qquad (11.9d)$$

e

$$ds > 0 \text{ (processo adiabático irreversível)} \qquad (11.9e)$$

Dessa forma, um processo que é reversível e adiabático é também *isoentrópico*; a entropia permanece constante durante o processo. A desigualdade 11.9e mostra que a entropia deve *aumentar* para um processo adiabático que é irreversível.

As Eqs. 11.9 mostram que duas quaisquer das restrições — reversível, adiabático ou isoentrópico — implicam a terceira. Por exemplo, um processo que é isoentrópico e reversível deve ser também adiabático.

Uma relação útil entre as propriedades (p, v, T, s, u) pode ser obtida considerando-se a primeira e a segunda lei conjuntamente. O resultado é a equação de Gibbs, ou equação $T\,ds$,

$$T\,ds = du + p\,dv \qquad (11.10a)$$

Esta é uma relação entre propriedades, válida para todos os processos entre estados de equilíbrio. Embora seja derivada da primeira e da segunda lei, ela mesma não é um enunciado de nenhuma das duas.

Uma forma alternativa da Eq. 11.10a pode ser obtida substituindo-se

$$du = d(h - pv) = dh - p\,dv - v\,dp$$

para obter

$$T\,ds = dh - v\,dp \qquad (11.10b)$$

Para um gás ideal, a variação de entropia pode ser avaliada das equações $T\,ds$ como

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{p}{T}\,dv = c_v \frac{dT}{T} + R\frac{dv}{v}$$

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{v}{T}\,dp = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

Para calores específicos constantes, essas equações podem ser integradas para dar

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

O Problema-Exemplo 11.1 ilustra o uso das relações para o gás ideal e das equações $T\,ds$ para avaliar as propriedades termodinâmicas e a variação de entropia de um processo.

Para o caso especial de um processo isoentrópico, $ds = 0$, e as equações $T\,ds$ (Eqs. 11.10) reduzem-se a

$$0 = du + p\,dv$$

$$0 = dh - v\,dp$$

Para um gás ideal, temos

$$0 = c_v\,dT + p\,dv$$

$$0 = c_p\,dT - v\,dp$$

Resolvendo para dT, vem

$$dT = \frac{v\,dp}{c_p} = -\frac{p\,dv}{c_v}$$

ou

$$\frac{dp}{p} + \frac{c_p}{c_v}\frac{dv}{v} = \frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0$$

Integrando (para k = constante) dá

$$\ln p + \ln v^k = \ln c$$

Dessa forma

$$pv^k = \frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \qquad (11.11)$$

A Eq. 11.11 fornece relações entre propriedades para um gás ideal submetido a um processo isoentrópico.

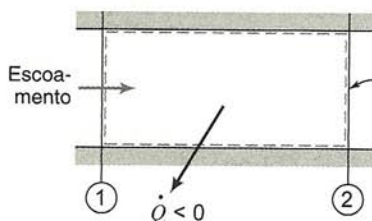
Informações qualitativas, úteis para o traçado de diagramas de estado, também podem ser obtidas das equações $T\,ds$. Para completar nossa revisão de fundamentos da termodinâmica, vamos avaliar as inclinações das linhas de pressão e de volume constantes no diagrama Ts no Problema-Exemplo 11.2.

EXEMPLO 11.1 — Variações de Propriedades no Escoamento Compressível num Duto

Ar escoa através de um duto longo de área constante a 0,15 kg/s. Um trecho curto do duto é resfriado por nitrogênio líquido que o envolve. A taxa de perda de calor pelo ar nessa seção do duto é de 15,0 kJ/s. A pressão absoluta, temperatura e velocidade, entrando na seção resfriada são, respectivamente, 188 kPa, 440 K e 210 m/s. Na saída, a pressão absoluta e a temperatura são 213 kPa e 351 K. Calcule a área da seção do duto e as variações de entalpia, energia interna e entropia para esse escoamento.

PROBLEMA-EXEMPLO 11.1

DADOS: Escoamento de ar, permanente, através de um trecho curto de um duto com seção constante, resfriado por nitrogênio líquido.

$T_1 = 440$ K
$p_1 = 188$ kPa (abs)
$V_1 = 210$ m/s

$T_2 = 351$ K
$p_2 = 213$ kPa (abs)

DETERMINAR: **(a)** Área do duto. **(b)** Δh. **(c)** Δu. **(d)** Δs.

SOLUÇÃO:

A área do duto pode ser obtida da equação da continuidade.

Equação básica:

$$0 = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento uniforme em cada seção
(3) Gás ideal

Então

$$0 = \{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

ou

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A$$

uma vez que $A = A_1 = A_2$ = constante. Usando a relação de gás ideal, $p = \rho RT$, encontramos

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 1{,}88 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\,\text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{440\,\text{K}} = 1{,}49\ \text{kg/m}^3$$

Da continuidade,

$$A = \frac{\dot{m}}{\rho_1 V_1} = 0{,}15\frac{\text{kg}}{\text{s}} \times \frac{\text{m}^3}{1{,}49\,\text{kg}} \times \frac{\text{s}}{210\,\text{m}} = 4{,}79 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 \longleftarrow A$$

Para um gás ideal, $dh = c_p\, dT$, logo

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p\, dT = c_p(T_2 - T_1)$$

$$\Delta h = 1{,}00 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times (351 - 440)\ \text{K} = -89{,}0\ \text{kJ/kg} \longleftarrow \Delta h$$

Também, $du = c_v\, dT$, logo

$$\Delta u = u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v\, dT = c_v(T_2 - T_1)$$

$$\Delta u = 0{,}717 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times (351 - 440)\ \text{K} = -63{,}8\ \text{kJ/kg} \longleftarrow \Delta u$$

A variação de entropia pode ser obtida da equação $T\, ds$,

$$T\, ds = dh - v\, dp$$

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{v\, dp}{T} = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

ou

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T} - \int_{p_1}^{p_2} R\frac{dp}{p} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$= 1{,}00 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times \ln\left(\frac{351}{440}\right) - 0{,}287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times \ln\left(\frac{2{,}13 \times 10^5}{1{,}88 \times 10^5}\right)$$

$$\Delta s = -0{,}262\ \text{kJ/(kg} \cdot \text{K)} \longleftarrow \Delta s$$

Vemos que a entropia pode decrescer para um processo não adiabático no qual o gás é resfriado.

{ O objetivo desse problema foi revisar o cálculo de propriedades termodinâmicas e de variação de entropia para um processo de um gás ideal. }

EXEMPLO 11.2 — Linhas de Propriedades Constantes no Diagrama *Ts*

Para um gás ideal, determine a inclinação de (a) uma linha de volume constante e (b) uma linha de pressão constante no plano *Ts*.

PROBLEMA-EXEMPLO 11.2

DADOS: Um gás ideal.

DETERMINAR: **(a)** A inclinação da linha de volume constante no plano *Ts*.
(b) A inclinação da linha de pressão constante no plano *Ts*.

SOLUÇÃO:
As equações $T\, ds$ podem ser aplicadas.

$$T\, ds = du + p\, dv \tag{11.10a}$$

$$T\, ds = dh - v\, dp \tag{11.10b}$$

Substituindo para o gás ideal, $du = c_v\, dT$ e $dh = c_p\, dT$, obtemos

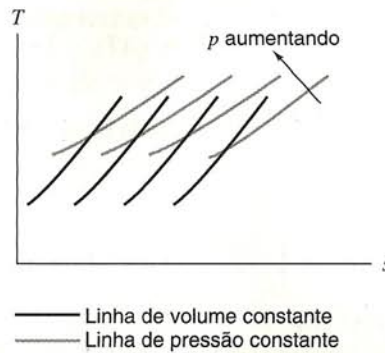
$$T\, ds = c_v\, dT + p\, dv$$

$$T\, ds = c_p\, dT - v\, dp$$

Para um processo de volume constante, $dv = 0$. Da primeira equação

$$\left.\frac{dT}{ds}\right)_{\substack{\text{volume}\\ \text{constante}}} = \left.\frac{\partial T}{\partial s}\right)_v = \frac{T}{c_v} \longleftarrow \text{inclinação de volume constante}$$

Para um processo de pressão constante, $dp = 0$. Da segunda equação,

$$\left.\frac{dT}{ds}\right)_{\substack{\text{pressão}\\ \text{constante}}} = \left.\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p} \longleftarrow \text{inclinação de pressão constante}$$

{ Note que a inclinação de cada linha é proporcional, em qualquer ponto, à temperatura absoluta. Além disso, em qualquer ponto, a inclinação de uma linha de volume constante é $c_p/c_v = k$ vezes maior que a inclinação de uma linha de pressão constante. }

11.2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS SONORAS

11.2.1 A Velocidade do Som

Os termos *supersônico* e *subsônico* são familiares; eles referem-se a velocidades que são, respectivamente, maior e menor que a velocidade do som. A velocidade do som (aquela de uma onda de pressão de intensidade infinitesimal) é um importante parâmetro característico de escoamento compressível. Introduzimos anteriormente (Caps. 2 e 7) o número de Mach, $M = V/c$, a razão entre a velocidade local do escoamento e a velocidade local do som como um importante parâmetro adimensional que caracteriza os escoamentos compressíveis. Antes de estudarmos escoamentos compressíveis, obteremos uma expressão geral para o cálculo da velocidade sônica.

Considere a propagação de uma onda sonora de intensidade infinitesimal num meio não perturbado, conforme mostrado na Fig. 11.1*a*. Estamos interessados em relacionar a velocidade de propagação da onda, c, com as variações de propriedades através da onda. Se a pressão e a massa específica no meio não perturbado à frente da onda forem denotadas por p e ρ, a passagem da onda provocará nelas variações infinitesimais, tornando-as $p + dp$ e $\rho + d\rho$. Como a onda propaga-se num fluido estacionário, a velocidade à frente da onda, V_x, é zero. A magnitude da velocidade atrás da onda, $V_x + dV_x$, será então simplesmente dV_x; na Fig. 11.1*a*, o sentido do movimento atrás da onda foi admitido como sendo para a esquerda.[3]

O escoamento da Fig. 11.1*a* parece não permanente para um observador estacionário, vendo o movimento da onda de um ponto fixo no solo. Contudo, o escoamento parecerá permanente para um observador localizado *sobre* um volume de controle inercial movendo-se com um segmento da onda, conforme mostrado na Fig. 11.1*b*. A velocidade aproximando-se do volume de controle é c, e a velocidade deixando-o é $c - dV_x$.

As equações básicas podem ser aplicadas ao volume de controle diferencial mostrado na Fig. 11.1*b* (usamos V_x para a componente x da velocidade a fim de evitar confusão com a energia interna, u).

(*a*) Propagação de onda

(*b*) Volume de controle inercial movendo-se com a onda, velocidade *c*

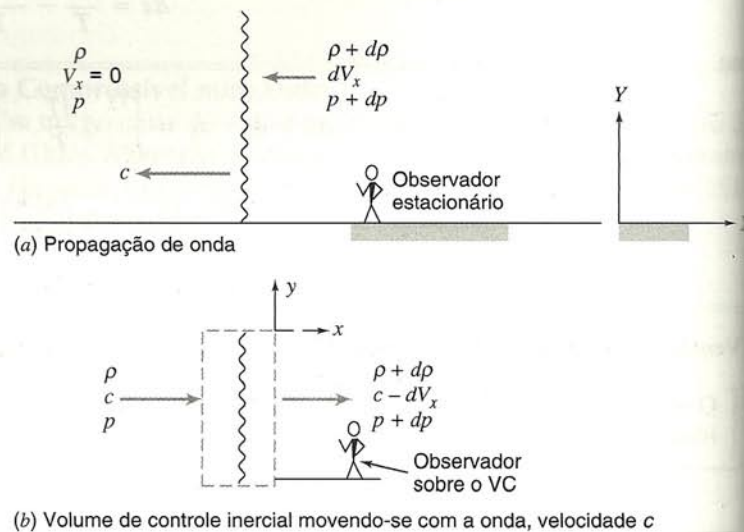



Fig. 11.1 Propagação de onda de som mostrando o volume de controle escolhido para análise.

a. Equação da Continuidade

Equação básica:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

(o primeiro termo $= 0(1)$)

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento uniforme em cada seção

Então

$$0 = \{-|\rho c A|\} + \{|(\rho + d\rho)(c - dV_x)A|\} \qquad (11.12a)$$

ou

$$0 = -\rho c A + \rho c A - \rho dV_x A + d\rho c A - d\rho dV_x A$$

(com $d\rho \, dV_x A \approx 0$)

ou

$$dV_x = \frac{c}{\rho} d\rho \qquad (11.12b)$$

[3] O mesmo resultado final é obtido independentemente do sentido inicialmente assumido para o movimento atrás da onda (veja Problema 11.16).

b. Equação da Quantidade de Movimento

Equação básica:

$$F_{S_x} + \underbrace{F_{B_x}}_{=0(3)} - \int_{VC} \underbrace{a_{rf_x}}_{=0(4)} \rho \, dV\!\!\!/ = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} V_x \rho \, dV\!\!\!/}_{=0(1)} + \int_{SC} V_x \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \qquad (4.35a)$$

Considerações: (3) $F_{B_x} = 0$

(4) $a_{rf_x} = 0$

As forças de superfície que atuam sobre o volume de controle infinitesimal são

$$F_{S_x} = dR_x + pA - (p + dp)A$$

onde dR_x representa todas as forças aplicadas nas partes horizontais da superfície de controle mostrada na Fig. 11.1*b*. Consideramos apenas uma porção da onda sonora em movimento, de modo que $dR_x = 0$ porque não há movimento relativo ao longo da onda. Assim, a força de superfície é simplificada para

$$F_{S_x} = -A\,dp$$

Substituindo na equação básica, vem

$$-A\,dp = c\{-|\rho c A|\} + (c - dV_x)\{|(\rho + d\rho)(c - dV_x)A|\}$$

Usando a equação da continuidade, na forma da Eq. 11.12a, a equação reduz-se para

$$-A\,dp = c\{-|\rho c A|\} + (c - dV_x)\{|\rho c A|\} =$$

$$= (-c + c - dV_x)\{|\rho c A|\}$$

$$-A\,dp = -\rho c A\,dV_x$$

ou

$$dV_x = \frac{1}{\rho c}\,dp \qquad (11.12c)$$

Combinando as Eqs. 11.12b e 11.l2c, obtemos

$$dV_x = \frac{c}{\rho}\,d\rho = \frac{1}{\rho c}\,dp$$

da qual

$$dp = c^2\,d\rho \qquad \text{ou} \qquad c^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

Para avaliar a derivada de uma propriedade termodinâmica, devemos especificar a propriedade a ser mantida constante durante a diferenciação. Para o caso presente, o limite para a intensidade de uma onda sonora tendendo a zero será

$$\lim_{\text{intensidade}\to 0} \frac{dp}{d\rho} = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s\,=\,\text{constante}}$$

Uma justificativa física para a hipótese de propagação isoentrópica é que uma variação infinitesimal de pressão é reversível. Como há muito pouco tempo para transferência de calor, o processo é reversível e adiabático; um processo reversível adiabático deve ser isoentrópico. Desta forma, a velocidade de propagação de uma onda sonora é dada por

$$c = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

Dados para os meios sólido e líquido são usualmente apresentados como o módulo de compressibilidade,

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} = \rho\frac{dp}{d\rho} \qquad (2.14)$$

Para esses meios,

$$c = \sqrt{E_v/\rho} \qquad (11.13)$$

Para um gás ideal, a pressão e a massa específica no escoamento isoentrópico relacionam-se por

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \qquad (11.11)$$

como mostrado anteriormente. Tomando os logaritmos e diferenciando, obtemos

$$\frac{dp}{p} - k\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Portanto,

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = k\frac{p}{\rho}$$

Porém $p/\rho = RT$, e assim finalmente

$$c = \sqrt{kRT} \qquad (11.14)$$

para um gás ideal. A velocidade do som no ar foi medida precisamente por diversos pesquisadores [5]. Os resultados concordam muito bem com a previsão teórica da Eq. 11.14.

A característica importante da propagação do som num gás ideal, como mostrada pela Eq. 11.14, é que a velocidade do som é uma função da temperatura apenas. A variação na temperatura atmosférica com a altitude num dia padrão foi discutida no Cap. 3; as propriedades estão resumidas na Tabela A.3. A correspondente variação em c é calculada no Problema-Exemplo 11.3 e traçada em gráfico como uma função da altitude.

EXEMPLO 11.3 — Velocidade do Som na Atmosfera Padrão

Calcule a velocidade do som ao nível do mar no ar padrão. Avalie a velocidade do som e trace um gráfico para altitudes de até 15 km.

PROBLEMA-EXEMPLO 11.3

DADOS: Ar sob condições de atmosfera padrão.

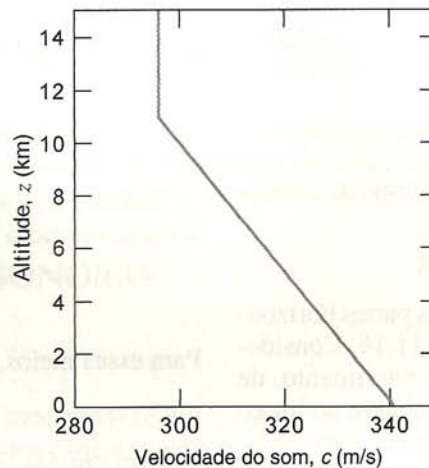
DETERMINAR: **(a)** A velocidade do som ao nível do mar.

(b) A velocidade do som para altitudes de até 15 km; plote.

SOLUÇÃO:
Admita um gás ideal.

Equação de cálculo: $c = \sqrt{kRT}$
Da Tabela 3.1, a temperatura ao nível do mar num dia padrão é de 288 K. Portanto,

$$c = \left(1{,}4 \times 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 288 \text{ K} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right)^{1/2} = 340 \text{ m/s}$$

As temperaturas para várias altitudes podem ser encontradas na Tabela A.3. As velocidades do som resultantes estão plotadas na figura seguinte.

Do gráfico, verificamos que a velocidade do som no ar, num dia padrão, varia de 340 m/s ao nível do mar a 295 m/s a uma altitude de 11 km.

{A temperatura do ar varia linearmente do nível do mar até cerca de 11 km de altitude. A velocidade do som é proporcional à raiz quadrada da temperatura absoluta, logo a sua variação com a altitude é não linear. A não linearidade não é óbvia na escala desse gráfico.}

11.2.2 Tipos de Escoamento — O Cone de Mach

Os escoamentos para os quais $M < 1$ são *subsônicos*, enquanto aqueles para os quais $M > 1$ são *supersônicos*. Os campos de escoamento que possuem ambas as regiões, subsônica e supersônica, são denominados *transônicos*. (O regime transônico ocorre para números de Mach entre 0,9 e 1,2.) Embora a maioria dos escoamentos, na nossa experiência, seja subsônica, há importantes casos práticos em que $M \geq 1$ ocorre num campo de escoamento. Talvez os mais óbvios sejam os aviões supersônicos e os escoamentos transônicos nos compressores e ventiladores de aeronaves. Ainda um outro regime de escoamento, o *hipersônico* ($M \gtrsim 5$), é de interesse no projeto de mísseis e de veículos de reentrada na atmosfera. O "National Aerospace Plane", atualmente em estudo, voaria a números de Mach perto de 20. Algumas importantes diferenças qualitativas entre escoamentos subsônico e supersônico podem ser deduzidas a partir das propriedades de uma fonte sonora simples em movimento.

Considere uma fonte puntiforme que emite perturbações instantâneas infinitesimais, que se propagam em todas as direções com a velocidade c. Num instante qualquer, t, a localização da frente de onda da perturbação emitida no instante t_0 será representada por uma esfera, com raio $c(t - t_0)$, cujo centro coincide com a localização da perturbação no instante t_0.

Estamos interessados na determinação da natureza da propagação da perturbação para diferentes velocidades da fonte móvel. Quatro casos são mostrados na Fig. 11.2:

1. $V = 0$. A configuração sonora propaga-se uniformemente em todas as direções. No instante Δt após a emissão, qualquer pulso sonoro dado localiza-se no raio $c\Delta t$ a partir da fonte. No instante $2\Delta t$, o raio é $c(2\Delta t)$. Cada frente de onda é esférica; todas as frentes de onda são esferas concêntricas.

2. $0 < V < c$. A concentricidade da configuração de onda desapareceu. As frentes de onda individuais são esféricas, mas cada som sucessivo é emitido de uma posição diferente, distante $V\,\Delta t$ da posição anterior.

Se você imaginar os círculos mostrados como sendo os picos de amplitude de um tom senoidal, o mesmo quadro qualitativo prevalece para uma fonte móvel de som contínuo. Se essa fonte mover-se com a velocidade constante, V, toda a configuração mostrada na Fig. 11.2*b* é transportada juntamente com a emissora. Desta forma, um observador estacionário ouve mais picos por unidade de tempo à medida que a fonte se aproxima do que quando ela se afasta. Isto é conhecido como "efeito Doppler". (Você já ouviu um trem veloz passar apitando num cruzamento?)

3. $V = c$. O lugar geométrico das superfícies frontais de todas as ondas será um plano na fonte, perpendicular à trajetória do movimento. Nenhuma onda sonora pode viajar à frente da fonte. Conseqüentemente, um observador à frente da fonte não a ouvirá aproximando-se.

4. $V > c$. Neste caso, o lugar geométrico das superfícies frontais das ondas sonoras será um cone. Novamente, nenhum som será ouvido fora do cone.

O ângulo do cone pode ser relacionado com o número de Mach com o qual a fonte se move. Da geometria da Fig. 11.2*d*

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{M}$$

ou

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{M}\right) \tag{11.15}$$

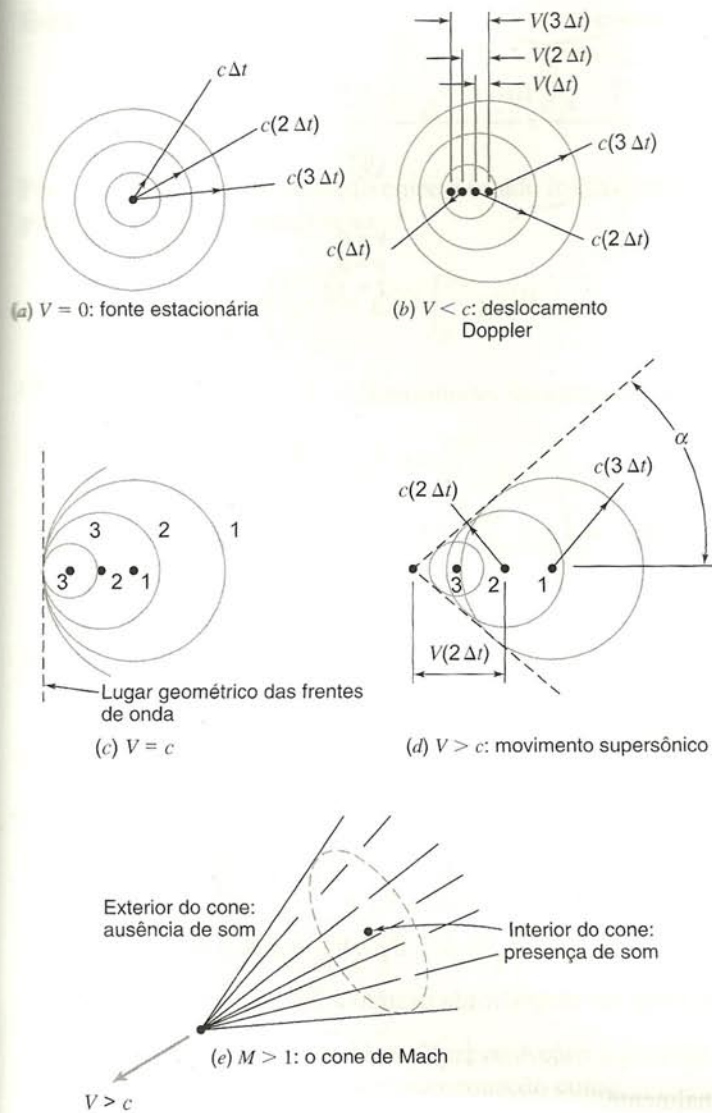



Fig. 11.2 Propagação de ondas sonoras de uma fonte móvel: o cone de Mach.

O cone mostrado na Fig. 11.2*e* é denominado *cone de Mach*; α é o *ângulo de Mach*. As regiões dentro e fora do cone são às vezes chamadas de *zona de ação* e *zona de silêncio*, respectivamente.

11.3 ESTADO DE REFERÊNCIA: PROPRIEDADES DE ESTAGNAÇÃO ISOENTRÓPICA LOCAL

Se desejarmos descrever o estado de um fluido em qualquer ponto de um campo de escoamento, deveremos especificar duas propriedades termodinâmicas intensivas independentes (geralmente pressão e temperatura), mais a velocidade no ponto.[4]

Em nossa discussão sobre escoamento compressível, julgamos conveniente usar o estado de estagnação como referência. O estado de estagnação é caracterizado por velocidade zero; as propriedades de estagnação em qualquer ponto num campo de escoamento são aquelas que existiriam naquele ponto se a velocidade fosse reduzida a zero. Considere um ponto num campo de escoamento tendo temperatura T, pressão p e velocidade V. O estado de estagnação naquele ponto do campo de escoamento seria caracterizado pela pressão de estagnação, p_0, pela temperatura de estagnação, T_0, e pela velocidade zero. Antes que possamos calcular as propriedades de estagnação, devemos especificar o processo pelo qual se imagina desacelerar o fluido até a velocidade zero.

Para escoamento incompressível (Cap. 6), sem atrito, a integração da equação de Euler ao longo de uma linha de corrente levou-nos à equação de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.9}$$

O processo de desaceleração sem atrito leva à pressão de estagnação p_0, dada por

$$p_0 = p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 \tag{6.12}$$

Para o escoamento compressível usamos novamente o processo de desaceleração sem atrito; além disso, especificamos que o processo é adiabático. Em resumo, especificamos um processo isoentrópico de desaceleração para definir as propriedades locais de estagnação:

> As *propriedades de estagnação isoentrópica local* são aquelas que seriam obtidas em qualquer ponto de um campo de escoamento se o fluido naquele ponto fosse desacelerado das condições locais para a velocidade zero, seguindo um processo adiabático, sem atrito (isoentrópico).

As propriedades de estagnação isoentrópica podem ser avaliadas em qualquer ponto num campo de escoamento. As variações nessas propriedades de referência de ponto a ponto num campo de escoamento dão informações a respeito do processo de escoamento entre os pontos. Isso tornar-se-á claro na nossa abordagem de casos de escoamento unidimensional. Para calcular as propriedades de estagnação isoentrópica local, imaginamos um processo hipotético de desaceleração até a velocidade zero. No início do processo, as condições correspondem ao escoamento real no ponto (velocidade V, pressão p, temperatura T etc.); no fim do processo a velocidade é zero e as condições são aquelas correspondentes às propriedades de estagnação isoentrópica local (pressão de estagnação p_0, temperatura de estagnação T_0 etc.).

11.3.1 Propriedades de Estagnação Isoentrópica Local para o Escoamento de um Gás Ideal

Nós precisamos desenvolver uma expressão que descreva o relacionamento entre as propriedades do fluido durante o processo. Como tanto as propriedades iniciais quanto as finais são especificadas, desenvolvemos a relação entre propriedades na forma diferencial. Em seguida integramos para obter expressões para as condições de estagnação em termos das condições iniciais correspondentes ao escoamento real no ponto.

O processo de desaceleração hipotética é mostrado esquematicamente na Fig. 11.3. Nós estamos interessados em determinar as propriedades de estagnação para o escoamento no ponto ①. Para encontrar uma relação entre propriedades do fluido durante

[4]O estado de uma substância pura, na ausência de movimento, gravidade e de efeitos de superfície, magnéticos ou elétricos, é definido por duas propriedades termodinâmicas intensivas independentes.

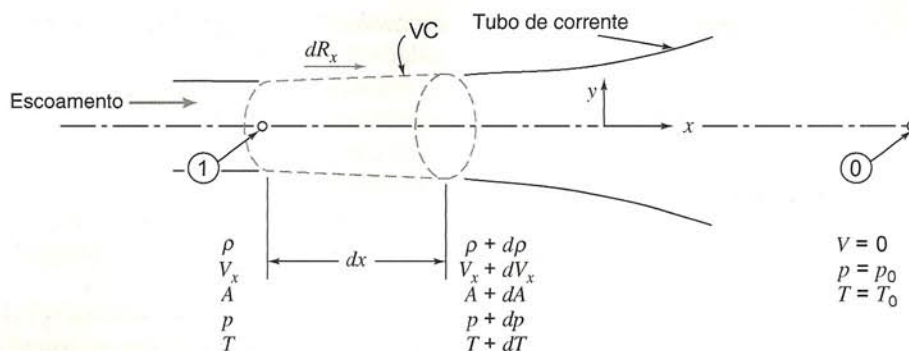



Fig. 11.3 Escoamento compressível num tubo de corrente infinitesimal.

o processo, aplicamos as equações da continuidade e da quantidade de movimento ao volume de controle diferencial de tubo de corrente estacionário mostrado.

a. Equação da Continuidade

Equação básica:

$$0 = \overset{=0(1)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}} \int_{\text{VC}} \rho d\forall + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento uniforme em cada seção

Então

$$0 = \{-|\rho V_x A|\} + \{|(\rho + d\rho)(V_x + dV_x)(A + dA)|\}$$

ou

$$\rho V_x A = (\rho + d\rho)(V_x + dV_x)(A + dA) \qquad (11.16a)$$

b. Equação da Quantidade de Movimento

Equação básica:

$$F_{S_x} + \overset{=0(3)}{\cancel{F_{B_x}}} - \int_{\text{VC}} \overset{=0(4)}{\cancel{a_{rf_x}}} \rho \, d\forall = \overset{=0(1)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}} \int_{\text{VC}} V_x \rho \, d\forall + \int_{\text{SC}} V_x \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \qquad (4.35a)$$

Considerações: (3) $F_{B_x} = 0$
(4) $a_{rf_x} = 0$
(5) Escoamento sem atrito

As forças de superfície atuando sobre o volume de controle infinitesimal são

$$F_{S_x} = dR_x + pA - (p + dp)(A + dA)$$

A força dR_x é aplicada ao longo da fronteira do tubo de corrente, conforme mostrado na Fig. 11.3, onde a pressão média é $p + dp/2$ e a componente de área na direção x é dA. Não há atrito. Dessa forma,

$$F_{S_x} = \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA + pA - (p + dp)(A + dA)$$

ou

$$F_{S_x} = p\cancel{dA} + \overset{\approx 0}{\cancel{\frac{dp\,dA}{2}}} + \cancel{pA} - \cancel{pA} - dp\,A - p\cancel{dA} - \overset{\approx 0}{\cancel{dp\,dA}}$$

Substituindo este resultado na equação da quantidade de movimento resulta

$$-dp\,A = V_x\{-|\rho V_x A|\} + (V_x + dV_x)\{|(\rho + d\rho)(V_x + dV_x)(A + dA)|\}$$

que pode ser simplificada usando a Eq. 11.16a para obter

$$-dp\,A = (-V_x + V_x + dV_x)(\rho V_x A)$$

Finalmente,

$$dp = -\rho V_x \, dV_x = -\rho d\left(\frac{V_x^2}{2}\right)$$

ou

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V_x^2}{2}\right) = 0 \qquad (11.16b)$$

A Eq. 11.16b é uma relação entre propriedades durante o processo de desaceleração. No desenvolvimento dessa relação, nós especificamos um processo sem atrito. Para integrar entre os estados inicial e final (de estagnação), devemos antes especificar a relação existente entre a pressão, p, e a massa específica, ρ, ao longo da trajetória do processo.

Uma vez que o processo de desaceleração é isoentrópico, então p e ρ para um gás ideal são relacionados pela expressão

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \qquad (11.11)$$

A nossa tarefa agora é integrar a Eq. 11.16b sujeita a essa relação. Ao longo da linha de corrente de estagnação existe somente uma componente de velocidade; V_x é a magnitude da velocidade. Por conseguinte, podemos abandonar o índice na Eq. 11.16b.

De p/ρ^k = constante = C, podemos escrever

$$p = C\rho^k \qquad \text{e} \qquad \rho = p^{1/k} C^{-1/k}$$

Então, da Eq. 11.16b,

$$-d\left(\frac{V^2}{2}\right) = \frac{dp}{\rho} = p^{-1/k}C^{1/k}\,dp$$

Podemos integrar essa equação entre o estado inicial e o correspondente estado de estagnação

$$-\int_V^0 d\left(\frac{V^2}{2}\right) = C^{1/k}\int_p^{p_0} p^{-1/k}\,dp$$

obtendo

$$\frac{V^2}{2} = C^{1/k}\frac{k}{k-1}\left[p^{(k-1)/k}\right]_p^{p_0} =$$

$$= C^{1/k}\frac{k}{k-1}\left[p_0^{(k-1)/k} - p^{(k-1)/k}\right]$$

$$\frac{V^2}{2} = C^{1/k}\frac{k}{k-1}p^{(k-1)/k}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

Como $C^{1/k} = p^{1/k}/\rho$, segue-se que

$$\frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1}\frac{p^{1/k}}{\rho}p^{(k-1)/k}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

Uma vez que buscamos uma expressão para a pressão de estagnação, podemos reescrever essa equação como

$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} = 1 + \frac{k-1}{k}\frac{\rho}{p}\frac{V^2}{2}$$

e

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{k}\frac{\rho V^2}{2p}\right]^{k/(k-1)}$$

Para um gás ideal, $p = \rho RT$, e por conseguinte

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\frac{V^2}{kRT}\right]^{k/(k-1)}$$

Também, para um gás ideal, a velocidade sônica é $c = \sqrt{kRT}$, e assim

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right]^{k/(k-1)}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \qquad (11.17a)$$

A Eq. 11.17a possibilita-nos calcular a pressão isoentrópica de estagnação em qualquer ponto do campo de escoamento para um gás ideal, desde que conheçamos a pressão estática e o número de Mach naquele ponto.

Podemos imediatamente obter expressões para outras propriedades de estagnação isoentrópica aplicando a relação

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante}$$

entre os estados extremos do processo. Dessa forma,

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k \quad \text{e} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/k}$$

Para um gás ideal, então,

$$\frac{T_0}{T} = \frac{p_0}{p}\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p_0}{p}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{-1/k} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k}$$

Usando a Eq. 11.17a, podemos resumir as equações de determinação das propriedades de estagnação isoentrópica local de um gás ideal como

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \qquad (11.17a)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \qquad (11.17b)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{1/(k-1)} \qquad (11.17c)$$

Das Eqs. 11.17, a razão entre cada propriedade de estagnação isoentrópica local e a correspondente propriedade estática, em qualquer ponto de um campo de escoamento, para um gás ideal, pode ser determinada se conhecermos o número de Mach local. O procedimento de cálculo é ilustrado no Problema-Exemplo 11.4.

A faixa de números de Mach para a validade da hipótese de escoamento incompressível é pesquisada no Problema-Exemplo 11.5.

EXEMPLO 11.4 — Condições de Estagnação Isoentrópica Local no Escoamento em Duto

O ar escoa em regime permanente através do duto mostrado de 350 kPa (abs.), 60°C, e 183 m/s no estado de entrada, para M = 1,3 na saída onde as condições de estagnação isoentrópica local são conhecidas como 385 kPa (abs.) e 350 K. Calcule a pressão e a temperatura de estagnação isoentrópica local na entrada, e a pressão estática e a temperatura na saída do duto. Localize os pontos de estado estático na entrada e na saída num diagrama Ts, e indique os processos de estagnação.

PROBLEMA-EXEMPLO 11.4

DADOS: Escoamento permanente de ar num duto, conforme mostrado na figura.

DETERMINAR: **(a)** p_{0_1}.
(b) T_{0_1}.
(c) p_2.
(d) T_2.
(e) Os pontos dos estados ① e ② num diagrama Ts; indique os processos de estagnação.

SOLUÇÃO:

Para avaliar as condições de estagnação isoentrópica local na seção ①, devemos calcular o número de Mach, $M_1 = V_1/c_1$. Para um gás ideal, $c = \sqrt{kRT}$. Portanto,

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \left[1{,}4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times (273+60)\,\text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 366\text{ m/s}$$

e

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{183}{366} = 0{,}5$$

As propriedades de estagnação isoentrópica local podem ser avaliadas das Eqs. 11.17. Assim,

$$p_{0_1} = p_1\left[1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right]^{k(k-1)} = 350\text{ kPa}\,[1 + 0{,}2(0{,}5)^2]^{3{,}5} = 415\text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_{0_1}$$

$$T_{0_1} = T_1\left[1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right] = 333\text{ K}[1 + 0{,}2(0{,}5)^2] = 350\text{ K} \longleftarrow T_{0_1}$$

Na seção ②, as Eqs. 11.17 podem ser aplicadas novamente. Dessa forma, da Eq. 11.17a,

$$p_2 = \frac{p_{0_2}}{\left[1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right]^{k/(k-1)}} = \frac{385\text{ kPa}}{[1 + 0{,}2(1{,}3)^2]^{3{,}5}} = 139\text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_2$$

Da Eq. 11.17b,

$$T_2 = \frac{T_{0_2}}{1 + \frac{k-1}{2}M_2^2} = \frac{350\text{ K}}{1 + 0{,}2(1{,}3)^2} = 262\text{ K} \longleftarrow T_2$$

A variação de entropia deve ser avaliada para localizar o estado ② com respeito ao estado ①. Usando a equação $T\,ds$,

$$Tds = dh - v\,dp$$

ou

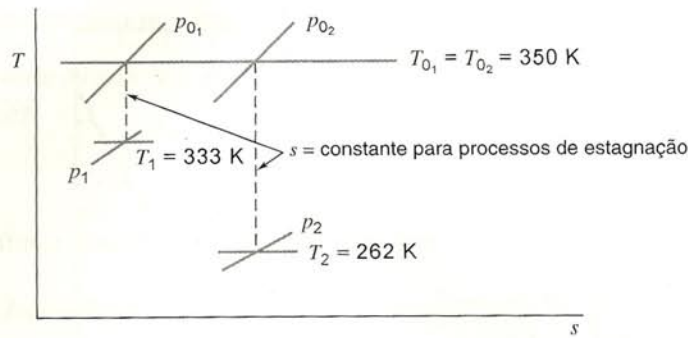
$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{v\,dp}{T} = c_p\frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

Integrando dá

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p\frac{dT}{T} - \int_{p_1}^{p_2} R\frac{dp}{p} = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$= 1{,}00\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times \ln\left(\frac{262}{333}\right) - 0{,}287\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times \ln\left(\frac{139}{350}\right)$$

$$s_2 - s_1 = 0{,}0252\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$$

Por conseguinte, o estado ② situa-se à direita do estado ① no plano Ts, conforme mostrado na figura seguinte:

O processo que o fluido segue entre os estados ① e ② não é especificado. Contudo, ele não precisa ser conhecido. Um processo único de estagnação isoentrópica é definido para cada ponto de estado. Note que $s_{0_2} - s_{0_1} = s_2 - s_1$.

EXEMPLO 11.5 — Limite do Número de Mach para Escoamento Incompressível

Deduzimos equações para p_0/p para ambos os escoamentos, compressível e "incompressível". Escrevendo as duas equações em termos do número de Mach, compare o seu comportamento. Determine o número de Mach abaixo do qual as duas equações concordam dentro da precisão requerida pela engenharia.

PROBLEMA-EXEMPLO 11.5

DADOS: As formas incompressível e compressível das equações para a pressão de estagnação, p_0.

Incompressível
$$p_0 = p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 \tag{6.12}$$

Compressível
$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \tag{11.17a}$$

DETERMINAR: **(a)** O comportamento de ambas as equações como uma função do número de Mach.
(b) O número de Mach abaixo do qual os valores calculados de p_0/p concordam dentro da precisão de engenharia.

SOLUÇÃO:

Primeiro, vamos escrever a Eq. 6.12 em termos do número de Mach. Usando a equação de estado do gás ideal e $c^2 = kRT$,

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\rho V^2}{2p} = 1 + \frac{V^2}{2RT} = 1 + \frac{kV^2}{2kRT} = 1 + \frac{kV^2}{2c^2}$$

Portanto,

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k}{2}M^2 \tag{1}$$

para escoamento "incompressível".

A Eq. 11.17a pode ser expandida usando o teorema binomial,

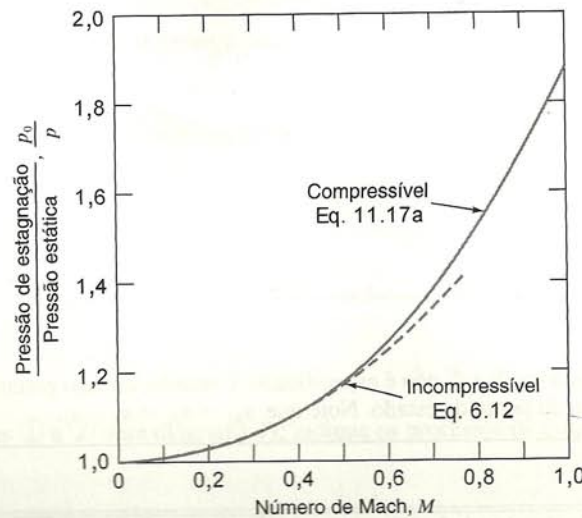
$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots, |x| < 1$$

Para a Eq. 11.17a, $x = [(k-1)/2]M^2$, e $n = k/(k-1)$. Dessa forma, a série converge para $[(k-1)/2]M^2 < 1$, e para escoamento compressível,

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \left(\frac{k}{k-1}\right)\left[\frac{k-1}{2}M^2\right] + \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{k}{k-1} - 1\right)\frac{1}{2!}\left[\frac{k-1}{2}M^2\right]^2$$
$$+ \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{k}{k-1} - 1\right)\left(\frac{k}{k-1} - 2\right)\frac{1}{3!}\left[\frac{k-1}{2}M^2\right]^3 + \cdots$$

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k}{2}M^2 + \frac{k}{8}M^4 + \frac{k(2-k)}{48}M^6 + \cdots$$

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k}{2}M^2\left[1 + \frac{1}{4}M^2 + \frac{(2-k)}{24}M^4 + \cdots\right] \tag{2}$$

No limite, quando $M \to 0$, o termo entre colchetes na Eq. 2 aproxima-se de 1,0. Assim, para escoamento a baixos números de Mach, as equações para escoamento compressível e para escoamento incompressível dão o mesmo resultado. A variação de p_0/p com o número de Mach é mostrada na figura seguinte. Quando o número de Mach é aumentado, a equação compressível dá uma razão maior, p_0/p.

As equações 1 e 2 podem ser comparadas quantitativamente, de modo mais simples, escrevendo-se

$$\frac{p_0}{p} - 1 = \frac{k}{2}M^2 \quad (\text{"incompressível"})$$

$$\frac{p_0}{p} - 1 = \frac{k}{2}M^2\left[1 + \frac{1}{4}M^2 + \frac{(2-k)}{24}M^4 + \cdots\right] \quad (\text{compressível})$$

O termo entre colchetes é aproximadamente igual a 1,02 para $M = 0{,}3$, e a 1,04 para $M = 0{,}4$. Assim, para cálculos com a precisão da engenharia, o escoamento pode ser considerado incompressível se $M < 0{,}3$. As duas equações concordam dentro de 5% para $M \lesssim 0{,}45$.

11.4 CONDIÇÕES CRÍTICAS

As condições de estagnação são extremamente úteis como condições de referência para propriedades termodinâmicas; isso não é verdadeiro para a velocidade, uma vez que, por definição, $V = 0$. Um valor de referência útil para a velocidade é a *velocidade crítica* — a velocidade para um número de Mach unitário. Mesmo que não exista um ponto no campo de escoamento em que o número de Mach seja igual a um, tal condição hipotética ainda é útil como uma condição de referência.

Usando asteriscos para denotar condições para $M = 1$, então, por definição,

$$V^* \equiv c^* \tag{11.18}$$

Nas condições críticas, as Eqs. 11.17 para as propriedades de estagnação isoentrópica tornam-se

$$\frac{p_0}{p^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{k/(k-1)} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{k/(k-1)}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{1/(k-1)} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{1/(k-1)}$$

A velocidade crítica pode ser escrita em termos da temperatura crítica, T^*, ou da temperatura de estagnação isoentrópica, T_0.

Para um gás ideal, $c^* = \sqrt{kRT^*}$, e assim $V^* = \sqrt{kRT^*}$. Como

$$T^* = \frac{T_0}{1 + (k-1)/2} = \frac{2}{k+1}T_0$$

segue-se que

$$V^* = c^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_0} \tag{11.19}$$

Utilizaremos ambas as condições, de estagnação e crítica, como condições de referência no próximo capítulo, quando consideraremos uma variedade de escoamentos compressíveis unidimensionais.

11.5 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o estudo do Cap. 11, você deverá ser capaz de:

1. Definir:
   - número de Mach
   - escoamento subsônico
   - escoamento supersônico
   - escoamento transônico
   - ângulo de Mach
   - zona de ação
   - zona de silêncio
   - escoamento hipersônico
   - cone de Mach
   - propriedades de estagnação isoentrópica local
   - condições críticas

2. Para um gás ideal, escrever expressões para
   (a) as variações em energia interna e em entalpia.

(b) as equações $T\,ds$.
(c) a relação entre pressão e massa específica para um processo isoentrópico.

3. Deduzir uma equação para a velocidade do som num meio e mostrar que, para um gás ideal, $c = \sqrt{kRT}$.
4. Escrever (e deduzir) expressões para as propriedades de estagnação isoentrópica local (temperatura, pressão e massa específica) para o escoamento de um gás ideal.
5. Resolver os problemas ao final do capítulo que se relacionam com o material que você estudou.

REFERÊNCIAS

1. Zucrow, M. J., and J. D. Hoffman, *Gas Dynamics, Vol. 1.* New York: Wiley, 1976, Chapter 1.
2. Jones, J. B., and R. E. Dugan, *Engineering Thermodynamics.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.
3. Sonntag, R. E., C. Borgnakke, and G. J. Van Wylen, *Fundamentals of Classical Thermodynamics,* 5th ed. New York: Wiley, 1998, Chapter 7.
4. Moran, M. J., and H. N. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics,* 2nd ed. New York: Wiley, 1995, Chapter 6.
5. Wong, G. S. K., "Speed of Sound in Standard Air," *J. Acoustical Society of America, 79,* 5, May 1986, pp. 1359–1366.

PROBLEMAS

11.1 Ar é expandido num processo de escoamento permanente através de uma turbina. As condições iniciais são 1300°C e 2,0 MPa (abs.). As condições finais são 500°C e pressão atmosférica. Mostre esse processo num diagrama *Ts*. Avalie as variações de energia interna, entalpia e entropia específica para o processo.

11.2 É possível uma expansão adiabática do ar de 300 kPa (abs.), 60°C, para 150 kPa (abs.), 27°C? Justifique sua resposta. Mostre os pontos de estado do processo num diagrama *Ts*.

11.3 Dez lbm de ar são resfriados num tanque fechado de 500 para 100°F. A pressão inicial é de 400 psia. Calcule as variações de entropia, energia interna e entalpia. Mostre os pontos de estado do processo num diagrama *Ts*.

11.4 Num sistema fechado, um gás é submetido a um ciclo constituído dos seguintes processos: 1-2 compressão isotérmica reversível, 2-3 aquecimento reversível a volume constante, 3-4 expansão reversível a pressão constante, e 4-1 expansão adiabática reversível.
(a) Esboce os diagramas *pv* e *Ts* do ciclo.
(b) Verifique se cada uma das seguintes quantidades é positiva, negativa, nula ou indeterminada:

$$\oint \delta W, \quad \oint \delta Q, \quad \oint dS, \quad \oint dU, \quad \oint dH$$

11.5 Um gás ideal é aquecido a volume constante do estado ① para o estado ②, expandido isotermicamente para o estado ③, expandido adiabaticamente para o estado ④, que está à mesma pressão que o estado ①, e então retornado ao estado ① por um processo de pressão constante. Todos os quatro processos são reversíveis.
(a) Esboce os diagramas *pv* e *Ts* do ciclo.
(b) Verifique se cada uma das seguintes quantidades é positiva, negativa, nula ou indeterminada:

$$\oint \delta Q, \quad \oint \delta W, \quad \oint du, \quad \oint dh, \quad \oint ds$$

11.6 Ar entra numa turbina em escoamento permanente a 0,5 kg/s com velocidade desprezível. As condições de entrada são 1300°C e 2,0 MPa (abs.). O ar é expandido através da turbina até a pressão atmosférica. Se a temperatura e a velocidade reais na saída da turbina forem 500°C e 200 m/s, determine a potência produzida pela turbina. Determine os pontos de estado num diagrama *Ts* para este processo.

11.7 Um tanque de volume $V = 10\ m^3$ contém ar comprimido a 15°C. A pressão manométrica no tanque é de 4,5 MPa. Avalie o trabalho requerido para encher o tanque comprimindo-se ar da atmosfera padrão para (a) compressão isotérmica e (b) compressão isoentrópica seguida de resfriamento a pressão constante. Qual o pico de temperatura do processo de compressão isoentrópica? Calcule a energia removida durante o resfriamento para o processo (b). Admita comportamento de gás ideal e processos reversíveis. Marque pontos de estado num diagrama *Ts* para cada processo.

11.8 Gás natural, com as propriedades termodinâmicas do metano, escoa numa tubulação subterrânea de 0,6 m de diâmetro. A pressão manométrica na entrada de uma estação de compressores é de 0,5 MPa; a pressão na saída é de 8,0 MPa (man.). A temperatura do gás e velocidade na entrada são 13°C e 32 m/s, respectivamente. A eficiência do compressor é $\eta = 0{,}85$. Calcule a vazão mássica de gás natural através da tubulação. Marque pontos de estado num diagrama *Ts* para a entrada e saída do compressor. Avalie a temperatura e a velocidade do gás na saída do compressor e a potência necessária para acionar o compressor.

11.9 Num processo isotérmico, 0,1 pé cúbico de ar padrão (SCFM, 14,7 psia e 60°F) por minuto é bombeado para o interior de um balão. A tração no tecido de borracha do balão é dada por $\sigma = kA$, onde $k = 200$ lbf/pé³, e A é a área superficial do balão em pé². Calcule o tempo necessário para aumentar o raio do balão de 5 para 7 polegadas.

11.10 Um avião voa a 180 m/s a 500 m de altitude num dia padrão. O avião sobe para 15 km e voa a 320 m/s. Calcule o número de Mach do vôo em ambos os casos.

11.11 O avião Boeing 727 do Problema-Exemplo 9.8 voa em cruzeiro a 520 mph a uma altitude de 33.000 pés num dia padrão. Calcule o número de Mach do vôo de cruzeiro da aeronave. Se o número de Mach máximo permitido de operação da aeronave for 0,9, qual a correspondente velocidade de vôo?

11.12 As características reais de desempenho do avião de reconhecimento Lockheed SR-71 "Blackbird" nunca foram divulgadas. Contudo, acredita-se que ele voe em cruzeiro a $M = 3{,}3$ a uma altitude de 85.000 pés. Avalie a velocidade do som e a velocidade de vôo para tais condições. Compare com a velocidade de saída da boca do cano de uma bala de fuzil 30-06 (700 m/s).

11.13 Você enxerga ao longe o clarão de um raio. Poucos segundos mais tarde você escuta o trovão. Explique como você poderia estimar a distância do ponto atingido pelo raio.

11.14 Use dados de tabela de volume específico para calcular e plotar a velocidade do som na água líquida saturada para uma faixa de temperatura de 32 a 400°F.

11.15 Dados publicados indicam que o avião F-5G é capaz de fazer curvas horizontais sustentáveis a uma taxa de 6°/s a $M = 0{,}7$ e a 30.000 pés de altitude. A $M = 1{,}6$ o avião pode sustentar uma curva a 3,5°/s. Calcule o raio de curvatura e a aceleração normal produzida por essas curvas.

11.16 Deduza novamente a equação para a velocidade sônica (Eq. 11.14) admitindo que o sentido do movimento do fluido atrás da onda de som é dV_x para a *direita*. Mostre que o resultado é idêntico ao dado pela Eq. 11.14.

11.17 A temperatura varia linearmente do nível do mar até cerca de 11 km de altitude na atmosfera padrão. Avalie a *taxa de lapso* — a taxa de diminuição de temperatura com a altitude — na atmosfera padrão. Deduza uma expressão para a taxa de variação da velocidade sônica com a altitude num gás ideal sob condição atmosférica padrão. Avalie para o nível do mar e para a altitude de 10 km.

11.18 Como você mediria a velocidade aproximada do som no ar?

11.19 A fotografia de uma bala mostra um ângulo de Mach de 28°. Determine a velocidade da bala no ar padrão.

11.20 Ar a 25°C escoa a $M = 1{,}9$. Determine a velocidade do ar e o ângulo de Mach.

11.21 Um projétil é disparado num gás no qual a pressão é de 50 psia e a massa específica é de 0,27 lbm/pé³. Observa-se experimentalmente que um cone de Mach surge do projétil com 20° de ângulo total. Qual a velocidade do projétil com relação ao gás?

11.22 Um avião F-4 faz uma passagem de alta velocidade sobre um aeroporto num dia em que $T = 35°C$. O avião voa a $M = 1{,}4$ e a 200 m de altitude. Calcule a velocidade do avião. Quanto tempo após a sua passagem diretamente sobre o ponto A no solo o seu cone de Mach passará sobre o ponto A?

11.23 O National Transonic Facility (NTF) constitui-se de um túnel de vento de alta velocidade projetado para operar com ar a temperaturas criogênicas a fim de reduzir a viscosidade, aumentando assim o número de Reynolds unitário (Re/x) e reduzindo os requisitos de potência de bombeamento. A operação é prevista para temperaturas de $-270°F$ e abaixo. Uma fotografia *schlieren* tirada no NTF mostra um ângulo de Mach de 57° quando $T = -270°F$ e $p = 1{,}3$ psia. Avalie o número de Mach local e a velocidade do escoamento. Calcule o número de Reynolds unitário para o escoamento.

11.24 Um avião F-5G passa reto a 3 km de altitude. O avião voa a $M = 1{,}35$; admita que a temperatura do ar é constante a 30°C. Determine a velocidade do ar da aeronave. Um vento contrário sopra a 10 m/s. Quanto tempo após o avião passar diretamente acima de um ponto no solo o seu som alcança esse ponto no solo?

11.25 Um avião supersônico voa a 10.000 pés de altitude a uma velocidade de 3000 pés/s num dia padrão. Quanto tempo após ele passar diretamente acima de um observador que está no solo o seu som será ouvido pelo observador?

11.26 Para as condições do Problema 11.25, determine o local em que a onda sonora que primeiro alcança o observador no solo foi emitida.

11.27 O transporte supersônico Concorde voa em cruzeiro a $M = 2{,}2$ a 17 km de altitude num dia padrão. Quanto tempo após a passagem do avião diretamente acima de um observador no solo o som da aeronave será ouvido pelo observador?

11.28 Opositores do avião de transporte supersônico afirmam que as ondas sonoras podem ser refratadas na camada de atmosfera superior e que, como resultado, barulhos sônicos podem ser ouvidos a várias milhas de distância do local sobrevoado pela aeronave. Explique o fenômeno da refração de onda sonora.

11.29 A massa específica máxima num campo de escoamento compressível ocorre nas condições de estagnação. Avalie os números de Mach para o escoamento de ar no qual ρ_0 e ρ diferem de 2% e de 5%. Comente sobre o significado desses resultados.

11.30 A pressão de estagnação no nariz de um avião em vôo é 44,3 kPa (abs.). Estime o número de Mach e a velocidade da aeronave, considerando que o ar não perturbado está a 27,6 kPa (abs.) e $-50°C$.

11.31 Considere o escoamento de ar padrão a 600 m/s. Qual é a pressão de estagnação isoentrópica local? A entalpia de estagnação? A temperatura de estagnação?

11.32 Um corpo move-se através do ar padrão a 200 m/s. Qual é a pressão de estagnação sobre o corpo? Admita (a) escoamento compressível e (b) escoamento incompressível.

11.33 Um avião DC-10 voa em cruzeiro a 12 km de altitude em um dia padrão. Um tubo de pitot-estático no nariz do avião mede as pressões de estagnação e estática de 29,6 kPa e 19,4 kPa. Calcule (a) o número de Mach de vôo do avião, (b) a velocidade do avião e (c) a temperatura de estagnação que seria sentida por uma sonda no avião.

11.34 O transporte supersônico anglo-francês "Concorde" voa em cruzeiro a $M = 2{,}2$ e a 20 km de altitude. Avalie a velocidade do som, a de vôo da aeronave e o ângulo de Mach. Compare a velocidade da aeronave com a velocidade de saída de uma bala do cano de um rifle calibre 22 (460 m/s). Qual é a temperatura máxima do ar nos pontos de estagnação na estrutura da aeronave?

11.35 Um avião de transporte a jato voa em cruzeiro a $M = 0{,}85$ e a 12,0 km de altitude num dia padrão. Avalie a pressão de estagnação sentida por uma sonda na aeronave. Que velocidade seria calculada a partir da equação de Bernoulli para escoamento incompressível? De qual percentagem essa velocidade difere da verdadeira velocidade da aeronave?

11.36 Um canhão "12 libras" de tubo liso, usado nos navios a vela, dispara uma bola esférica de ferro fundido com diâmetro $D = 110$ mm e massa $m = 5{,}44$ kg, horizontalmente, ao nível do mar, num dia padrão. Inicialmente, o projétil viaja à velocidade supersônica, mas ele é retardado rapidamente pelo arrasto aerodinâmico. No instante em que a velocidade é sônica, estime (a) a aceleração horizontal do projétil (admita que o coeficiente de arrasto para uma esfera à velocidade sônica é $C_A = 1{,}3$), (b) a pressão máxima sobre a superfície do projétil e (c) a temperatura máxima do ar próximo da superfície do projétil.

11.37 A seção de teste de um túnel de vento supersônico é projetada para ter $M = 3{,}0$ a 60°F e 5 psia. O fluido é o ar. Determine as condições de entrada requeridas (estagnação), T_0 e p_0. Calcule a vazão em massa requerida para uma seção de teste com área de 2,0 pés².

11.38 Ar escoa em regime permanente através de um trecho (① denota entrada e ② denota saída) de um duto de seção constante, isolado termicamente. As propriedades mudam ao longo do duto como resultado do atrito.

(a) Começando com a forma da primeira lei da termodinâmica para volume de controle, mostre que a equação pode ser reduzida para

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = \text{constante}$$

(b) Denotando a constante por h_0 (a entalpia de estagnação), mostre que para escoamento adiabático de um gás ideal com atrito,

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2$$

(c) Para esse escoamento, $T_{0_1} = T_{0_2}$? $p_{0_1} = p_{0_2}$?

11.39 Para aviões voando a velocidades supersônicas, os coeficientes de sustentação e de arrasto são funções apenas do número de Mach. Um transporte supersônico com envergadura de 75 m deve voar a 780 m/s e a uma altitude de 20 km num dia

padrão. O desempenho do avião deve ser medido a partir de testes de um modelo, com 0,9 m de envergadura, num túnel de vento supersônico. O túnel é suprido por um grande reservatório de ar comprimido, que pode ser aquecido se desejado. A temperatura estática do ar na seção de teste deve ser de 10°C para evitar congelamento de umidade. A que velocidade do ar os testes no túnel de vento deverão ser conduzidos para que haja a reprodução do número de Mach do protótipo? Qual deve ser a temperatura de estagnação no reservatório? Que pressão é requerida no reservatório se a pressão na seção de teste deve ser de 10 kPa (abs.)?

11.40 As características reais de desempenho do avião de reconhecimento Lockheed SR-71 "Blackbird" eram secretas. Contudo, pensava-se que ele voava em cruzeiro a $M = 3,3$ e a 26 km de altitude. Calcule a velocidade do vôo da aeronave para essas condições. Determine a pressão de estagnação isoentrópica local. Como a velocidade do avião é supersônica, um choque normal ocorre na frente de um tubo de pressão total. A pressão de estagnação cai de 74,7% através do choque. Avalie a pressão de estagnação sentida por uma sonda no avião. Qual é a temperatura máxima do ar em pontos de estagnação na estrutura do avião?

11.41 Ar entra em um duto longo, isolado termicamente, a $M_1 = 0,2$, $T_1 = 286$ K e $p_1 = 98,5$ kPa (abs.). A jusante as propriedades são $M_2 = 0,6$, $T_2 = 268,9$ K e $p_2 = 31,3$ kPa (abs.). (Quatro algarismos significativos são dados a fim de minimizar erros de arredondamento.) Avalie as condições de estagnação isoentrópica local (a) na seção de entrada e (b) na seção de saída. Calcule a variação na entropia específica ao longo do duto. Plote os pontos de estado de estagnação e estático num diagrama *Ts*.

11.42 Ar entra numa câmara de combustão a $M_1 = 0,2$, $T_1 = 580$ K e $p_1 = 1,0$ MPa (abs.). A adição de calor leva as propriedades de saída para $M_2 = 0,4$, $T_2 = 1727$ K e $p_2 = 862,7$ kPa (abs.). (Quatro algarismos significativos são dados a fim de minimizar erros de arredondamento.) Avalie as condições de estagnação isoentrópica local (a) na seção de entrada e (b) na saída da câmara de combustão. Calcule a variação na entropia específica ao longo do combustor. Plote os pontos de estado de estagnação e estático num diagrama *Ts*.

11.43 Ar passa através de um choque normal num túnel de vento supersônico. As condições a montante são $M_1 = 1,8$, $T_1 = 270$ K e $p_1 = 10,0$ kPa (abs.). As condições a jusante são $M_2 = 0,6165$, $T_2 = 413,6$ K e $p_2 = 36,13$ kPa (abs.). (Quatro algarismos significativos são dados a fim de minimizar erro de arredondamento.) Avalie as condições de estagnação isoentrópica local (a) a montante e (b) a jusante do choque normal. Calcule a variação na entropia específica do ar através do choque. Plote os pontos de estado de estagnação e estático num diagrama *Ts*.

11.44 Ar entra numa turbina a $M_1 = 0,4$, $T_1 = 2350$°F e $p_1 = 90,0$ psia. As condições na saída da turbina são $M_2 = 0,8$, $T_2 = 1200$°F e $p_2 = 3,00$ psia. (Quatro algarismos significativos são dados a fim de minimizar erros de arredondamento.) Avalie as condições de estagnação isoentrópica local (a) na entrada da turbina e (b) na saída da turbina. Calcule a variação na entropia específica do ar através da turbina. Plote os pontos de estado de estagnação e estático num diagrama *Ts*.

11.45 Para as condições do Problema 11.35, plote a porcentagem de erro na velocidade como uma função do número de Mach para $0,1 \leq M \leq 0,9$.

11.46 A massa específica máxima num campo de escoamento compressível ocorre nas condições de estagnação. Plote a variação percentual na massa específica $(\rho_0 - \rho)/\rho$ como uma função do número de Mach na faixa de $0,1 \leq M \leq 0,9$. Para quais valores de M a variação percentual é menor que 5%?

11.47 Um Boeing 747 voa em cruzeiro a $M = 0,87$ a uma altitude de 13 km num dia padrão. Uma janela na cabine do piloto localiza-se onde o número de Mach do escoamento externo é 0,2 em relação à superfície do avião. A cabine é pressurizada para uma altitude equivalente de 2500 m numa atmosfera padrão. Estime a diferença de pressão através da janela. Certifique-se de especificar o sentido da força de pressão resultante.

11.48 Ar escoa em regime permanente através de um duto de área constante. Na seção ①, o ar está a 60 psia, 600°R e 500 pés/s. Como resultado da transferência de calor e do atrito, o ar na seção ② a jusante está a 40 psia, 800°R. Calcule a transferência de calor por libra de ar entre as seções ① e ②, e a pressão de estagnação na seção ②.

11.49 Considere o escoamento permanente, adiabático de ar através de um longo tubo reto com $A = 0,05$ m². Na entrada (seção ①), o ar está a 200 kPa (abs.), 60°C e 146 m/s. A jusante na seção ②, o ar está a 95,6 kPa (abs.) e 280 m/s. Determine p_{01}, p_{02}, T_{01}, T_{02} e a variação de entropia para o escoamento. Mostre os pontos de estado estático e de estagnação num diagrama *Ts*.

11.50 Todos os aviões modernos de alta velocidade usam "computadores de dados do ar" para calcular a velocidade do ar a partir da pressão dinâmica medida. Avalie o número de Mach subsônico acima do qual a equação de Bernoulli para escoamento incompressível prevê um erro de 2% em comparação com a velocidade verdadeira do ar, calculada com a inclusão de efeitos de compressibilidade. Admita o vôo a 10 km de altitude num dia padrão. O resultado obtido por você é independente das condições da corrente livre?

11.51 Um cartucho de CO_2 é usado para propelir um foguete de brinquedo. O gás no cartucho é pressurizado a 45 MPa (man.) e está a 25°C. Calcule as condições críticas (temperatura, pressão e velocidade de escoamento) que correspondem a essas condições de estagnação.

11.52 O reservatório de armazenamento de gás de um túnel de vento de alta velocidade contém hélio a 2500 K e 6,0 MPa (man.). Calcule as condições críticas (temperatura, pressão e velocidade do escoamento) que correspondem a essas condições de estagnação.

11.53 As condições de estagnação num motor de um foguete a propelente sólido são $T_0 = 3500$ K e $p_0 = 40$ MPa (man.). As condições críticas ocorrem na garganta do bocal do foguete onde o número de Mach é igual a 1. Avalie a temperatura, pressão e velocidade do escoamento na garganta. Admita comportamento de gás ideal com $R = 323$ J/(kg · K) e $k = 1,2$.

11.54 A corrente de gás quente na entrada da turbina de um motor a jato JT9-D está a 2350°F, 140 kPa (abs.) e $M = 0,32$. Calcule as condições críticas (temperatura, pressão e velocidade do escoamento) que correspondem a essas condições. Admita as propriedades do fluido como as do ar puro.

Capítulo 12

ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL, UNIDIMENSIONAL, PERMANENTE

As propriedades de um fluido em escoamento compressível são afetadas por variação de área, atrito, transferência de calor e choques normais. Neste capítulo, cada um desses efeitos é considerado separadamente para o escoamento compressível, unidimensional, permanente.

O escoamento isoentrópico, no qual a área é a variável independente (o atrito e a transferência de calor são desprezados), é considerado em primeiro lugar para um fluido genérico. Em seguida, o escoamento isoentrópico de um gás ideal e aplicações a bocais serão considerados com mais detalhes.

Após o escoamento isoentrópico, o escoamento adiabático num duto de área constante com atrito e o escoamento sem atrito num duto de área constante com transferência de calor serão considerados. Uma discussão sobre choques normais e escoamento supersônico em dutos com choque conclui o capítulo.

12.1 EQUAÇÕES BÁSICAS PARA ESCOAMENTO ISOENTRÓPICO

Considere o escoamento isoentrópico, unidimensional, permanente, de um fluido compressível qualquer através de um duto de seção transversal arbitrária; uma porção de um duto como esse é mostrada na Fig. 12.1. A fim de desenvolver as equações que regem esse escoamento, aplicamos as equações básicas, deduzidas no Cap. 4, ao volume de controle fixo, finito, da Fig. 12.1. As propriedades nas seções ① e ② são denotadas com índices apropriados; R_x é a componente x da força superficial atuando sobre o volume de controle.

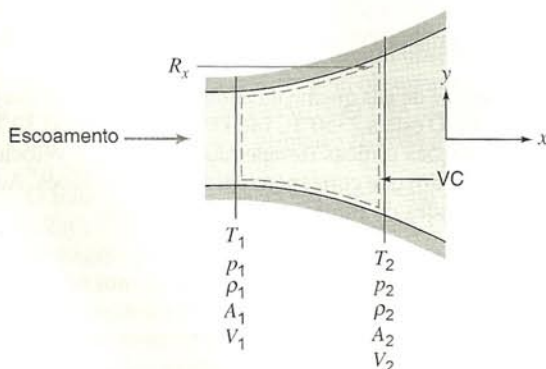



Fig. 12.1 Volume de controle para a análise de um escoamento isoentrópico genérico.

a. Equação da Continuidade

Equação básica:

$$0 = \cancelto{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento unidimensional

Logo,

$$0 = \{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

Usando grandezas escalares e abandonando os sinais de valor absoluto obtemos a fórmula familiar

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = \dot{m} = \text{constante} \tag{12.1a}$$

b. Equação da Quantidade de Movimento

Equação básica:

$$F_{S_x} + \cancelto{=0(3)}{F_{B_x}} = \cancelto{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} V_x \rho \, d\forall} + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Hipóteses: (3) $F_{B_x} = 0$

A força de superfície será devida às forças de pressão nas superfícies ① e ② da força de pressão distribuída, R_x, ao longo das paredes do duto. Substituindo dá

$$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = V_1\{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

Usando grandezas escalares e abandonando os sinais de valor absoluto, obtemos

$$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{12.1b}$$

c. Primeira Lei da Termodinâmica

Equação básica:

$$\overset{=0(4)}{\dot{Q}} - \overset{=0(5)}{\dot{W}_s} - \overset{=0(6)}{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}} - \overset{=0(6)}{\dot{W}_{\text{outros}}} = \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{VC} e\rho\, dV + \int_{SC}(e + pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.57}$$

onde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + \overset{\simeq 0(7)}{gz}$$

Considerações: (4) $\dot{Q} = 0$ (isoentrópico, i.e., escoamento sem atrito, adiabático)
(5) $\dot{W}_s = 0$
(6) $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = \dot{W}_{\text{outros}} = 0$
(7) Os efeitos da gravidade são desprezados

Com essas considerações, a primeira lei reduz-se a

$$0 = \left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)\{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2}\right)\{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

Mas sabemos da continuidade que os termos de vazão em massa entre as chaves são iguais, de modo que podem ser cancelados. Também podemos substituir $h \equiv u + pv$ para obter

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h + \frac{V^2}{2} = h_0 \tag{12.1c}$$

A combinação $h + V^2/2$ ocorre com freqüência nos problemas de escoamento compressível. Ela é definida como a entalpia de estagnação, h_0.

Fisicamente, a entalpia de estagnação é aquela que seria atingida se o fluido fosse desacelerado adiabaticamente para a velocidade zero. Notamos, da Eq. 12.1c, que a entalpia de estagnação é constante através de um campo de escoamento adiabático.

d. Segunda Lei da Termodinâmica

Equação básica:

$$\int_{SC}\frac{1}{T}\overset{=0(4)}{\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right)}dA \le \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{VC} s\rho\, dV + \int_{SC} s\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.59}$$

Então, para um processo adiabático reversível, vale a igualdade, e

$$0 = s_1\{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + s_2\{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

Uma vez que os termos da vazão em massa { } são iguais pela continuidade,

$$s_1 = s_2 = s = \text{constante} \tag{12.1d}$$

e. Equação de Estado

Equações de estado são relações entre propriedades termodinâmicas intensivas. Essas relações podem ser expressas na forma de tabelas, gráficos ou expressões algébricas. Para uma substância pura, é possível especificar qualquer propriedade termodinâmica intensiva em termos de outras duas propriedades intensivas quaisquer; podemos escrever,

$$h = h(s, p) \tag{12.1e}$$

e

$$\rho = \rho(s, p) \tag{12.1f}$$

como equações de estado.

Antes de resumirmos as formas simplificadas das equações básicas para escoamento isoentrópico, permanente, unidimensional de qualquer fluido compressível, voltemo-nos para uma representação do escoamento isoentrópico num diagrama *hs*. Em algum ponto no campo de escoamento isoentrópico (seja o estado ①), as propriedades são h_1, s_1, p_1, V_1 etc. Claramente, em condição isoentrópica, o escoamento pode prosseguir para o estado ② (com as propriedades h_2, $s_2 = s_1$, p_2, V_2 etc.) ou para o estado ③ (com as propriedades h_3, $s_3 = s_1$, p_3, V_3 etc.), como mostrado na Fig. 12.2.

Como se relacionam as propriedades isoentrópicas de estagnação nos estados ①, ② e ③? Para responder a essa pergunta, considere os resultados obtidos da análise da primeira lei da termodinâmica para escoamento isoentrópico. Da Eq. 12.1c e da definição de entalpia de estagnação, temos h_0 = constante. Conseqüentemente, todos os estados num escoamento isoentrópico têm a mesma entalpia de estagnação. Além disso, por definição, todos os estados num escoamento isoentrópico têm a mesma entropia de estagnação. Segue então que as propriedades de estagnação são constantes para todos os estados em um escoamento isoentrópico.

Para um escoamento isoentrópico, a primeira lei, na forma

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0 = \text{constante}$$

indica que a entalpia de estagnação, h_0, representa a energia total por unidade de massa de fluido em escoamento. Então, a energia cinética por unidade de massa é representada pela diferença de entalpia, $h_0 - h$, como ilustrado graficamente na Fig. 12.3.

As Eqs. 12.1a a 12.1f são as formas simplificadas das equações básicas que descrevem o escoamento isoentrópico, unidi-

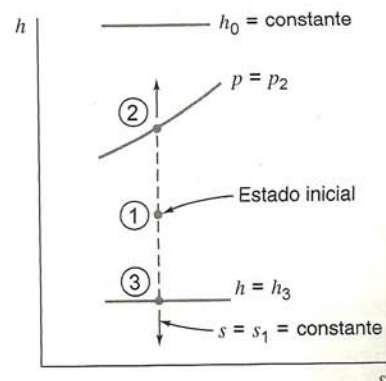



Fig. 12.2 Representação do escoamento isoentrópico no plano *hs*.

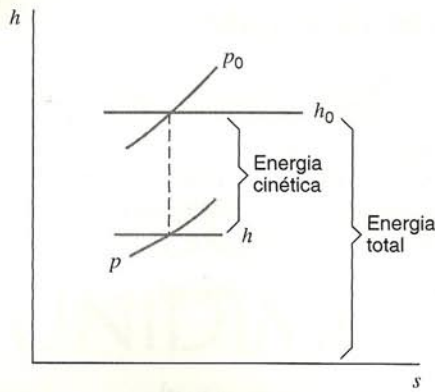



Fig. 12.3 Diagrama esquemático *hs* ilustrando a interpretação da energia por unidade de massa num escoamento.

mensional, permanente, de qualquer fluido compressível. Há seis equações independentes. Se todas as propriedades do escoamento forem conhecidas no estado ①, então teremos um total de sete incógnitas (p_2, A_2, V_2, ρ_2, h_2, s_2 e R_x) nessas seis equações. Conseqüentemente, um escoamento isoentrópico pode prosseguir para uma variedade de estados a partir do estado ①. Cada um desses estados deve ter $s_2 = s_1$, satisfazendo à Eq. 12.1d. Isto deixa, de fato, seis incógnitas e cinco equações, e o problema é indeterminado. Para determinar as condições no estado ②, uma das seis incógnitas deve ser especificada.

O que causa variações nas propriedades do fluido no escoamento isoentrópico? Você certamente reconheceria que é a variação de área. Na próxima seção, analisaremos o efeito da variação de área em propriedades no escoamento isoentrópico.

12.2 EFEITO DA VARIAÇÃO DE ÁREA EM PROPRIEDADES NO ESCOAMENTO ISOENTRÓPICO

Ao considerarmos o efeito da variação de área nas propriedades do fluido num escoamento isoentrópico, iremos nos preocupar, principalmente, com a velocidade e a pressão. Desejamos determinar o efeito de uma variação de área, A, sobre a velocidade, V, e a pressão, p; ou seja, para uma variação dA de área, dV e dp são positivos ou negativos?

Para responder a essa questão, é conveniente trabalhar com as formas diferenciais das equações governantes. Essas foram deduzidas para o volume de controle diferencial da Fig. 11.3 (Seção 11.3.1). A equação diferencial da quantidade de movimento para escoamento isoentrópico reduz-se a:

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \qquad (11.16b)$$

ou

$$dp = -\rho V\,dV$$

Dividindo por ρV^2, obtemos

$$\frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V} \qquad (12.2)$$

Uma forma diferencial conveniente da equação da continuidade pode ser obtida da Eq. 12.1a,

$$\rho AV = \text{constante} \qquad (12.1a)$$

Diferenciando a Eq. 12.1a e dividindo por ρAV resulta

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \qquad (12.3)$$

Resolvendo a Eq. 12.3 para dA/A, vem

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V} - \frac{d\rho}{\rho}$$

Substituindo da Eq. 12.2,

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} - \frac{d\rho}{\rho}$$

ou

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2}\left[1 - \frac{V^2}{dp/d\rho}\right]$$

Lembre, agora, que para um processo isoentrópico, $dp/d\rho = \partial p/\partial\rho)_s = c^2$, logo

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2}\left[1 - \frac{V^2}{c^2}\right] = \frac{dp}{\rho V^2}[1 - M^2] \qquad (12.4)$$

Da Eq. 12.4, vemos que, para $M < 1$, uma variação de área dá origem a uma variação de pressão de mesmo sinal (dA positivo significa dp positivo, para $M < 1$); para $M > 1$, uma variação de área causa uma variação de pressão de sinal oposto.

Substituindo da Eq. 12.2 na Eq. 12.4, obtemos

$$\frac{dA}{A} = \frac{-dV}{V}[1 - M^2] \qquad (12.5)$$

Da Eq. 12.5, verificamos que, para $M < 1$, uma variação de área provoca uma variação de velocidade de sinal oposto (dA positivo significa dV negativo, para $M < 1$); para $M > 1$, uma variação de área causa uma variação de velocidade de mesmo sinal.

Esses resultados estão resumidos na Fig. 12.4. Para escoamentos subsônicos ($M < 1$), a aceleração do escoamento num *bocal* requer uma passagem de seção transversal decrescente; a área deve diminuir para provocar um aumento de velocidade. Isso produz uma passagem com a forma parecida com aquela mostrada na parte superior esquerda da Fig. 12.4, e esse resultado está de acordo com a nossa experiência. Um *difusor* subsônico requer que a área da passagem aumente para provocar um decréscimo de velocidade. Novamente, esse resultado concorda com a nossa experiência.

Nos escoamentos supersônicos ($M > 1$), os efeitos de variação de área são o oposto. De acordo com a Eq. 12.5, um *bocal supersônico* deve ser construído com um aumento de área no sentido do escoamento. Um *difusor supersônico* deve ser um canal convergente. Embora essas previsões possam ser contrárias à nossa experiência, experimentos em laboratório mostram que elas são válidas. Podemos nos lembrar, também, do emprego de bocais divergentes projetados para produzir escoamento supersônico em mísseis e veículos de lançamento.

E quanto ao caso remanescente, $M = 1$? Uma outra inspeção da Eq. 12.5 mostra que, para $M = 1$, $dA/dV = 0$; isto significa que a área do duto deve passar por um mínimo ou máximo para

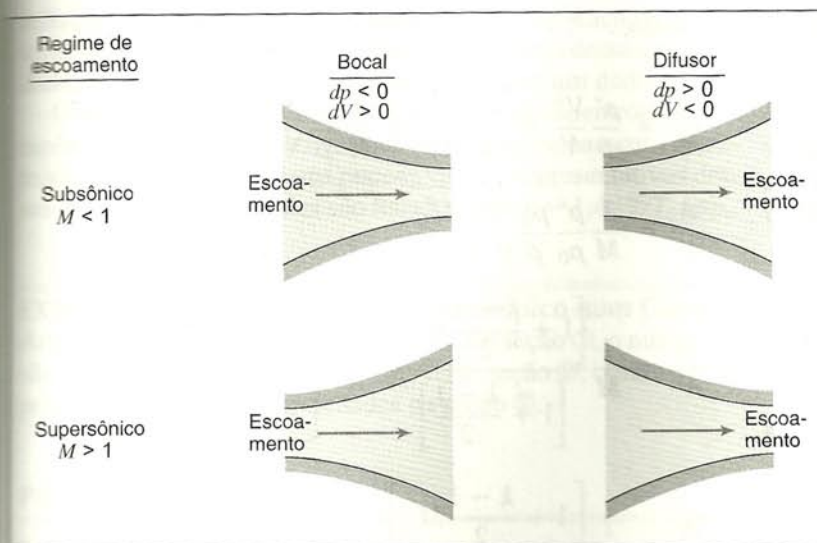



Fig. 12.4 Formas de bocal e difusor como função do número de Mach inicial.

$M = 1$. A inspeção da Fig. 12.4 mostra que $M = 1$ pode ser atingido apenas numa *garganta* ou seção de área mínima.

Para acelerar o escoamento de repouso até a velocidade supersônica ($M > 1$) é necessário, em primeiro lugar, um *bocal convergente* subsônico. Em condições apropriadas, o escoamento estará a $M = 1$ na garganta, onde a área é um mínimo. Aceleração posterior é possível se um segmento de *bocal divergente* supersônico for adicionado a jusante da garganta. O escoamento isoentrópico em bocais convergentes será abordado na Seção 12.3.4, e o escoamento isoentrópico em bocais convergentes-divergentes será coberto na Seção 12.3.5.

Para desacelerar um escoamento de velocidade supersônica ($M > 1$) para subsônica, é necessário, em primeiro lugar, um difusor supersônico (convergente). Teoricamente, a velocidade do escoamento poderia ser reduzida isoentropicamente para $M = 1$ numa garganta onde a área fosse um mínimo, e uma posterior desaceleração isoentrópica poderia ocorrer numa seção de difusor divergente, subsônico. Na prática, o escoamento supersônico não pode ser desacelerado para exatamente $M = 1$ numa garganta porque o escoamento sônico nas proximidades de uma garganta é instável, num gradiente de pressão crescente (adverso). (As perturbações que estão sempre presentes num escoamento subsônico real propagam-se a montante perturbando o escoamento sônico na garganta e provocando a formação de ondas de choque que viajam a montante e desembocam na entrada do difusor supersônico.)

A área da garganta de um difusor supersônico real deve ser ligeiramente maior do que a requerida para reduzir o escoamento para $M = 1$. Em condições de jusante apropriadas, um choque normal de pouca intensidade forma-se no duto divergente logo após a garganta. O escoamento deixando o choque é subsônico e desacelera-se no duto divergente. Dessa forma, a desaceleração de escoamento supersônico para subsônico não pode ocorrer isoentropicamente, na prática, uma vez que o choque normal fraco causa um aumento de entropia. Choques normais serão analisados na Seção 12.6.

Para escoamentos em aceleração (gradientes de pressão favoráveis), a idealização do escoamento isoentrópico é quase sempre um modelo realista do comportamento real do fluido. Para escoamentos em desaceleração, a idealização de escoamento isoentrópico pode não ser um modelo realista, devido aos gradientes de pressão adversos e da possibilidade iminente de separação do escoamento, conforme discutido para o escoamento de camada limite incompressível no Cap. 9.

12.3 ESCOAMENTO ISOENTRÓPICO DE UM GÁS IDEAL

12.3.1 Equações Básicas

Na Seção 12.1, aplicamos as equações básicas a um volume de controle finito para um escoamento isoentrópico, unidimensional, permanente de um fluido compressível qualquer. Para restringir a nossa abordagem a um gás ideal, precisamos apenas modificar a equação de estado. Para um gás ideal, a equação de estado é $p = \rho RT$. Além disso, para o escoamento isoentrópico de um gás ideal, temos a equação de processo, $p/\rho^k =$ constante. Portanto, para o escoamento isoentrópico de um gás ideal, podemos resumir as equações básicas como segue:

Continuidade:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = \dot{m} \qquad (12.1a)$$

Quantidade de movimento:

$$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \qquad (12.1b)$$

Primeira lei:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h + \frac{V^2}{2} \qquad (12.1c)$$

Segunda lei:

$$s_1 = s_2 = s \qquad (12.1d)$$

Equação de estado:

$$p = \rho RT \qquad (11.1)$$

Equação de processo:

$$p/\rho^k = \text{constante} \qquad (11.11)$$

Essas são as equações que governam o escoamento isoentrópico, unidimensional, permanente, de um gás ideal. Se todas as propriedades no estado ① forem conhecidas, teremos então oito incógnitas (ρ_2, A_2, V_2, p_2, h_2, s_2, T_2 e R_x) nessas seis equações. Entretanto, dispomos da relação conhecida entre h e T para um

gás ideal, $dh = c_p dT$. Para um gás ideal com calores específicos constantes,

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p(T_2 - T_1) \qquad (11.7b)$$

Dessa forma, como no caso geral (Seção 12.1), o problema é indeterminado. Uma condição (exceto s_2) deve ser especificada no estado ② antes que as condições nesse estado possam ser completamente determinadas.

12.3.2 Condições de Referência para Escoamento Isoentrópico de um Gás Ideal

No Cap. 11 (Seção 11.3.1), foram desenvolvidas expressões para as propriedades de estagnação isoentrópica local de um gás ideal. Essas expressões são:

Pressão de estagnação:

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \qquad (11.17a)$$

Temperatura de estagnação:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \qquad (11.17b)$$

Massa específica de estagnação:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{1/(k-1)} \qquad (11.17c)$$

Conforme mostrado na Seção 12.1, as propriedades de estagnação são constantes através de um campo de escoamento isoentrópico em regime permanente.

As condições críticas — as propriedades do escoamento para as quais o número de Mach é a unidade — foram introduzidas na Seção 11.3.2. Como as propriedades de estagnação são constantes num escoamento isoentrópico, então, a partir das Eqs. 11.17, podemos escrever

$$\frac{p_0}{p^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{k/(k-1)} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{k/(k-1)}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{1/(k-1)} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{1/(k-1)}$$

Além disso, da Eq. 11.19, temos

$$V^* = c^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_0}$$

Na Seção 12.2, verificamos a necessidade de uma passagem ter uma seção de área mínima (uma garganta) para acelerar isoentropicamente um escoamento, do repouso até um número de Mach maior que a unidade. Além disto, em tal escoamento, $M = 1$ na garganta. Se a área na qual o número de Mach iguala-se à unidade for designada por A^*, é possível, então, expressar o contorno de uma passagem em termos da razão de áreas A/A^*.

Para escoamento unidimensional, permanente, a equação da continuidade pode ser escrita

$$\rho A V = \text{constante} = \rho^* A^* V^*$$

Portanto,

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{V^*}{V} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{c^*}{Mc} = \frac{1}{M}\frac{\rho^*}{\rho}\sqrt{\frac{T^*}{T}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\frac{\rho^*}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{\frac{T^*/T_0}{T/T_0}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\frac{\left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{1/(k-1)}}{\left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{1/(k-1)}}\left[\frac{1 + \frac{k-1}{2}M^2}{1 + \frac{k-1}{2}}\right]^{1/2}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{1 + \frac{k-1}{2}M^2}{1 + \frac{k-1}{2}}\right]^{(k+1)/2(k-1)} \qquad (12.6)$$

Da Eq. 12.6, vemos que uma escolha de M dá um valor único de A/A^*. A variação de A/A^* com M é mostrada na Fig. 12.5. A curva fornece valores duplos; para qualquer A/A^* diferente da unidade, há dois possíveis valores do número de Mach. Isto é coerente com os resultados da Seção 12.2 (veja a Fig. 12.4), onde foi verificado que uma passagem convergente-divergente, com uma seção de área mínima, é necessária para acelerar de velocidade subsônica para supersônica.

A Eq. 12.6 é uma ferramenta útil que deve ser vista como uma forma conveniente da equação da continuidade, escrita entre a condição de referência (*), onde o número de Mach é a unidade, e outra seção qualquer de área A, onde o número de Mach é M.

12.3.3 Funções de Escoamento Isoentrópico para Escoamento Unidimensional de um Gás Ideal

Na seção anterior, nós vimos (Eqs. 11.17a, 11.17b, 11.17c e 12.6) que as propriedades em um ponto de um escoamento compressível de um gás ideal podem ser relacionadas às condições de

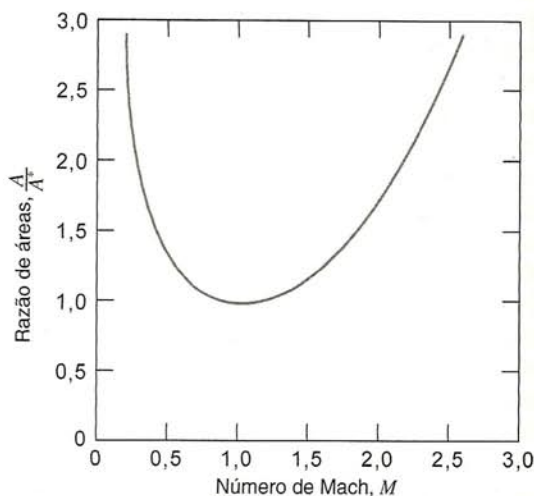



Fig. 12.5 Variação de A/A^* com o número de Mach para escoamento isoentrópico de um gás ideal com $k = 1,4$.

referência apropriadas por funções do número de Mach local. Isto torna possível a confecção de tabelas ou gráficos dessas propriedades como funções do número de Mach para um dado k.

O Apêndice E.1 lista funções de escoamento isoentrópico para razões de propriedades em termos de M para escoamento isoentrópico de um gás ideal; uns poucos valores representativos dessas razões de propriedades são listados para $k = 1{,}4$;[1] T/T_0, p/p_0, ρ/ρ_0 e A/A^* são plotados como funções de M para escoamento isoentrópico de um gás ideal com $k = 1{,}4$.

Desde que as condições de referência permaneçam constantes no escoamento isoentrópico, a razão de propriedades em dois pontos no escoamento pode ser prontamente determinada a partir dessas funções de escoamento. O uso dessas funções de escoamento é ilustrado no Problema-Exemplo 12.1.

EXEMPLO 12.1 — Escoamento Isoentrópico num Canal Convergente

Ar escoa isoentropicamente num duto. Na seção ①, o número de Mach é 0,3, a área é 0,001 m² e a pressão absoluta e a temperatura são respectivamente 650 kPa e 62°C. Na seção ②, o número de Mach é 0,8. Esboce a forma do canal, plote um diagrama Ts para o processo e avalie as propriedades na seção ②.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.1

DADOS: Escoamento isoentrópico de ar num canal. Nas seções ① e ②, respectivamente, são fornecidos os seguintes dados: $M_1 = 0{,}3$, $T_1 = 62°\text{C}$, $P_1 = 650$ kPa (abs.), $A_1 = 0{,}001$ m² e $M = 0{,}8$.

DETERMINAR: (a) A forma do canal.
(b) Um diagrama Ts para o processo.
(c) Propriedades na seção ②.

Escoa-
mento
① ②

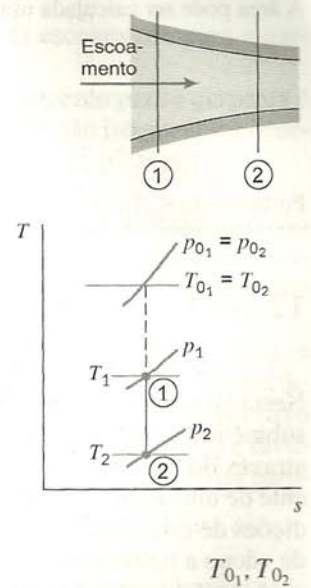
SOLUÇÃO:
Para acelerar um escoamento subsônico é necessário um bocal convergente. A forma do canal deve ser conforme mostrado.
No plano Ts, o processo segue uma linha de s = constante. As condições de estagnação permanecem fixas para escoamento isoentrópico.

Conseqüentemente, a temperatura de estagnação na seção ② pode ser calculada (para o ar, $k = 1{,}4$) de

$$T_{0_2} = T_{0_1} = T_1\left[1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right]$$

$$= (62 + 273)\,\text{K}\left[1 + \frac{1{,}4-1}{2}(0{,}3)^2\right]$$

$$T_{0_2} = T_{0_1} = 341\ \text{K} \qquad T_{0_1}, T_{0_2}$$

e

$$p_{0_2} = p_{0_1} = p_1\left[1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right]^{k/(k-1)} = 650\ \text{kPa}\,[1 + 0{,}2(0{,}3)^2]^{3{,}5}$$

$$p_{0_2} = 692\ \text{kPa (abs)} \qquad p_{0_2}$$

A partir das funções para escoamento isoentrópico da Tabela E.1, Apêndice E, encontramos

M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
0,3	0,9823	0,9395	0,9564	2,035
0,8	0,8865	0,6560	0,7400	1,038

Para o escoamento isoentrópico, $T_{0_1} = T_{0_2} = T_0$. Portanto

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_0}\frac{T_0}{T_1} = \frac{(T/T_0)_2}{(T/T_0)_1} = \frac{0{,}8865}{0{,}9823} = 0{,}9025$$

$$T_2 = 0{,}9025T_1 = 0{,}9025(273 + 62)\ \text{K} = 302\ \text{K} \qquad T_2$$

[1] É fácil programar as Eqs. 11.17a, 11.17b, 11.17c e 12.6 em uma calculadora ou computador pessoal. Dessa forma, tabelas e/ou gráficos podem ser gerados para qualquer valor desejado de k. O *FM Software Supplement*, que pode ser carregado a partir do *web site* da John Wiley, contém um módulo que calcula as razões de propriedades para escoamentos isoentrópicos. Tanto o número de Mach quanto uma razão de propriedades podem ser dados de entrada. O programa calcula a razão de propriedades e apresenta os resultados em um gráfico da razão de propriedades em função do número de Mach. Olfe [11] também escreveu um programa computacional comercial que inclui funções de escoamento.

Também $p_{0_1} = p_{0_2} = p_0$, então

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_0}\frac{p_0}{p_1} = \frac{(p/p_0)_2}{(p/p_0)_1} = \frac{0{,}6560}{0{,}9395} = 0{,}6982$$

$$p_2 = 0{,}6982 p_1 = 0{,}6982(650 \text{ kPa}) = 454 \text{ kPa (abs)}$$

e

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 4{,}54 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{287 \text{ N} \cdot \text{m}} \times \frac{1}{302 \text{ K}} = 5{,}24 \text{ kg/m}^3$$

Também, para um gás ideal,

$$c_2 = \sqrt{kRT_2} = \left[1{,}4 \times 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 302 \text{ K} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right]^{1/2} = 348 \text{ m/s}$$

Da definição do número de Mach,

$$V_2 = M_2 c_2 = (0{,}8)348 \text{ m/s} = 278 \text{ m/s}$$

A área pode ser calculada usando-se A/A^*. Assim, desde que $A^* =$ constante,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A^*}\frac{A^*}{A_1} = \frac{(A/A^*)_2}{(A/A^*)_1} = \frac{1{,}038}{2{,}035} = 0{,}5101$$

$$A_2 = 0{,}5101 A_1 = 0{,}5101(0{,}001 \text{ m}^2) = 5{,}10 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Portanto, $A_2 < A_1$, como esperado.

12.3.4 Escoamento Isoentrópico num Bocal Convergente

Nesta seção investigamos a operação de um bocal convergente submetido a diversos valores de contrapressão. O escoamento através do bocal convergente mostrado na Fig. 12.6 é proveniente de uma grande câmara de pressão, onde são admitidas condições de estagnação; o escoamento é induzido por uma bomba de vácuo a jusante, e controlado pela válvula mostrada.

A contrapressão, p_b, para a qual o bocal descarrega é controlada pela válvula. As condições de estagnação a montante (T_0, p_0 etc.) são mantidas constantes. A pressão no plano de saída do bocal é p_e. Desejamos investigar o efeito das variações na pressão na região de descarga sobre a distribuição de pressão através do bocal, sobre a vazão em massa e sobre a pressão no plano de saída. Os resultados estão ilustrados graficamente na Fig. 12.6. Examinemos cada um dos casos mostrados.

Quando a válvula é fechada, não há escoamento através do bocal. A pressão é p_0 em todo o escoamento, como mostrado pela condição (*i*) na Fig. 12.6*a*.

Se a pressão na região de descarga, p_b, for agora reduzida a um valor ligeiramente abaixo de p_0, haverá escoamento através do bocal com um decréscimo na pressão no sentido do escoamento, conforme mostrado pela condição (*ii*). O escoamento no plano de saída será subsônico e a pressão nesse plano será igual à contrapressão.

O que acontece à medida que continuamos a reduzir a contrapressão? A vazão em massa continuará a aumentar e a pressão no plano de saída continuará a diminuir, conforme mostrado

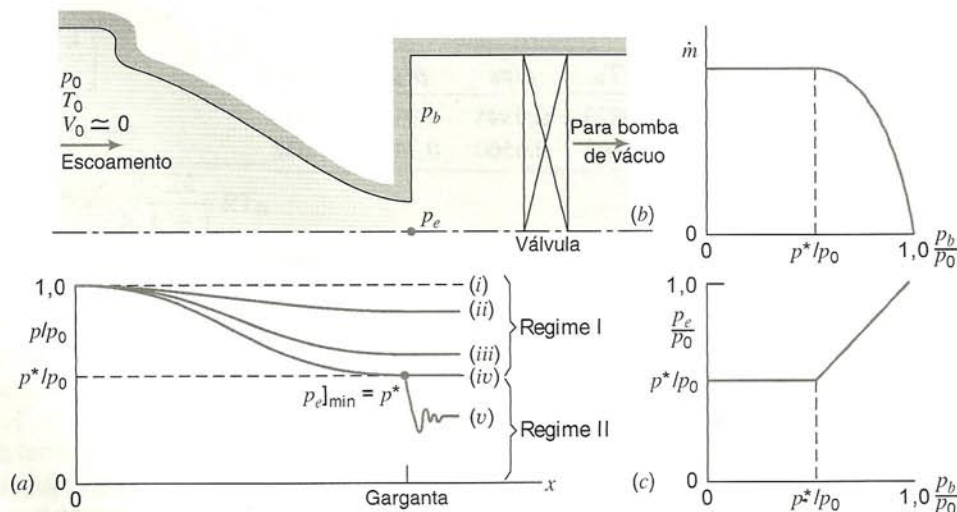



Fig. 12.6 Bocal convergente operando com diversas pressões na região de descarga.

pela condição (*iii*) na Fig. 12.6*a*. Essas tendências continuarão indefinidamente enquanto a contrapressão estiver sendo reduzida?

Relembre, das nossas discussões anteriores, que, num canal convergente, o número de Mach não pode aumentar além da unidade num escoamento isoentrópico. Portanto, com o decréscimo continuado da contrapressão, o escoamento no plano de saída do bocal atingirá, eventualmente, um número de Mach igual à unidade. A pressão correspondente é a pressão crítica, p^*. A condição (*iv*) ilustra o caso em que M_e iguala a unidade e p_b/p_0 iguala p^*/p_0.

Da Eq. 11.17a, com $M = 1$, a razão de pressão crítica para um gás ideal é dada por

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

Para o ar, $k = 1{,}4$, $p^*/p_0 = 0{,}528$.

O que acontece quando a contrapressão for reduzida ainda mais, abaixo de p^*, tal como na condição (*v*)? Uma vez que o número de Mach na garganta é igual à unidade ($V_e = c_e$), a informação sobre as condições na descarga do canal não podem ser transmitidas para montante. Conseqüentemente, reduções p_b abaixo de p^* não têm efeito sobre as condições do escoamento no bocal; dessa forma, nem a distribuição de pressão através do bocal, nem a pressão no plano de saída, nem a vazão em massa são afetadas pelo abaixamento de p_b a um valor inferior a p^*. Quando p_b é inferior ou igual a p^*, diz-se que o bocal está *bloqueado* ou "*engasgado*".

Para p_b menor que p^*, o escoamento deixando o bocal expandir-se-á até o valor da contrapressão, como mostrado para a condição (*v*), na Fig. 12.6*a*. Esse processo de expansão não confinada é tridimensional; a distribuição de pressão não pode ser prevista pela teoria unidimensional. Experimentos mostram que formam-se choques na corrente de saída, acarretando um aumento de entropia.

O escoamento através de um bocal convergente pode ser dividido em dois regimes:

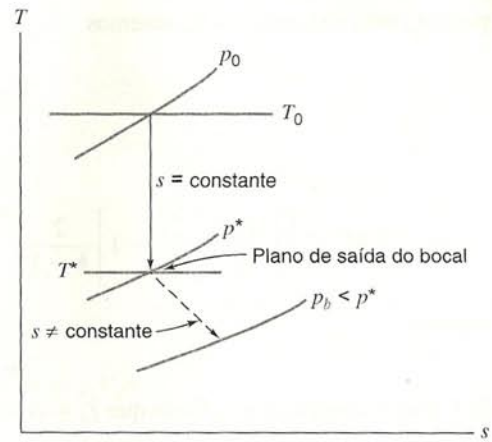



Fig. 12.7 Diagrama *Ts* esquemático para escoamento bloqueado através de um bocal convergente.

1. No Regime I, $1 \geq p_b/p_0 \geq p^*/p_0$. O escoamento para a garganta é isoentrópico, $p_e = p_b$.
2. No Regime II, $p_b/p_0 < p^*/p_0$. O escoamento para a garganta é isoentrópico e $M_e = 1$. Uma expansão não isoentrópica ocorre no escoamento deixando o bocal; $p_e = p^* > p_b$.

Os processos de escoamento correspondentes ao Regime II são mostrados num diagrama *Ts* na Fig. 12.7. Dois problemas envolvendo bocais convergentes são resolvidos nos Problemas-Exemplo 12.2 e 12.3.

Embora o escoamento isoentrópico seja uma idealização, é com freqüência uma aproximação muito boa para o comportamento real de bocais. Uma vez que um bocal é um dispositivo que acelera o escoamento, o gradiente de pressão interna é favorável. Isto tende a manter as camadas limites delgadas nas paredes e a minimizar os efeitos de atrito.

EXEMPLO 12.2 — Escoamento Isoentrópico num Bocal Convergente

Um bocal convergente, com área de garganta de 0,001 m², é operado com ar a uma contrapressão de 591 kPa (abs.). O bocal é alimentado a partir de uma grande câmara pressurizada onde a pressão absoluta de estagnação e a temperatura são, respectivamente, 1,0 MPa e 60°C. O número de Mach na saída e a vazão em massa deverão ser determinados.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.2

DADOS: Escoamento de ar através de um bocal convergente nas condições mostradas:
O escoamento é isoentrópico.

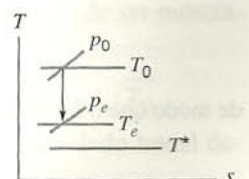
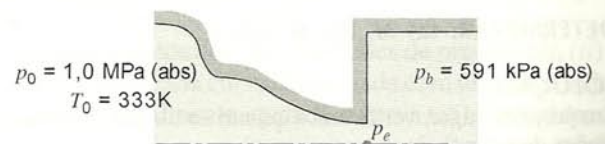
DETERMINAR: (a) M_e.
(b) $\dot{m}$.

SOLUÇÃO:
O primeiro passo é verificar quanto ao bloqueio. A razão de pressão é

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{5{,}91 \times 10^5}{1{,}0 \times 10^6} = 0{,}591 > 0{,}528$$

de modo que o escoamento não está bloqueado. Portanto, $p_b = p_e$, e o escoamento é isoentrópico, conforme esboçado no diagrama *Ts*.

Como p_0 = constante, M_e pode ser determinado a partir da razão de pressão,

$$\frac{p_0}{p_e} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M_e^2\right]^{k/(k-1)}$$

Resolvendo para M_e, uma vez que $p_e = p_b$, obtemos

$$1 + \frac{k-1}{2}M_e^2 = \left(\frac{p_0}{p_b}\right)^{(k-1)/k}$$

e

$$M_e = \left\{\left[\left(\frac{p_0}{p_b}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\frac{2}{k-1}\right\}^{1/2} = \left\{\left[\left(\frac{1{,}0 \times 10^6}{5{,}91 \times 10^5}\right)^{0{,}286} - 1\right]\frac{2}{1{,}4-1}\right\}^{1/2} = 0{,}90 \qquad M_e$$

A vazão em massa é

$$\dot{m} = \rho_e V_e A_e = \rho_e M_e c_e A_e$$

Precisamos de T_e para encontrar ρ_e e c_e. Dado que T_0 = constante,

$$\frac{T_0}{T_e} = 1 + \frac{k-1}{2}M_e^2$$

ou

$$T_e = \frac{T_0}{1 + \frac{k-1}{2}M_e^2} = \frac{(273+60)\text{ K}}{1 + 0{,}2(0{,}9)^2} = 287\text{ K}$$

$$c_e = \sqrt{kRT_e} = \left[1{,}4 \times \frac{287\text{ N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 287\text{ K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 340\text{ m/s}$$

e

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = 5{,}91 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\text{ N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{287\text{ K}} = 7{,}18\text{ kg/m}^3$$

Finalmente,

$$\dot{m} = \rho_e M_e c_e A_e = 7{,}18\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0{,}9 \times 340\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}001\text{ m}^2 = 2{,}20\text{ kg/s} \qquad \dot{m}$$

EXEMPLO 12.3 — Escoamento Bloqueado num Bocal Convergente

Ar escoa isentropicamente através de um bocal convergente. Numa seção em que a área do bocal é 0,013 pé², a pressão local, a temperatura e o número de Mach são 60 psia, 40°F e 0,52, respectivamente. A contrapressão é de 30 psia. O número de Mach na garganta, a vazão em massa e a área da garganta deverão ser determinados.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.3

DADOS: Escoamento de ar através de um bocal convergente nas condições mostradas:

$M_1 = 0{,}52$
$T_1 = 40°\text{F}$
$P_1 = 60$ psia
$A_1 = 0{,}013$ pé²

DETERMINAR: **(a)** M_t. **(b)** $\dot{m}$. **(c)** A_t.

SOLUÇÃO:

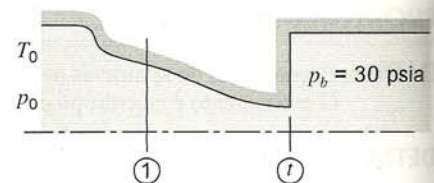
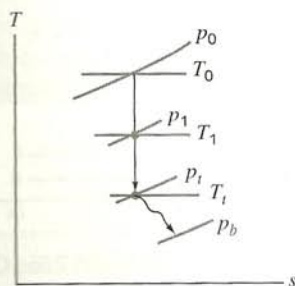
Em primeiro lugar, verificamos quanto ao bloqueio, a fim de determinar se o escoamento é isentrópico até p_b. Para verificar, avaliamos as condições de estagnação.

$$p_0 = p_1\left[1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right]^{k/(k-1)} = 60\text{ psia }[1 + 0{,}2(0{,}52)^2]^{3{,}5} = 72{,}0\text{ psia}$$

A razão de contrapressão é

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{30{,}0}{72{,}0} = 0{,}417 < 0{,}528$$

de modo que o escoamento está bloqueado! Para escoamento bloqueado,

$$M_t = 1{,}0 \qquad M_t$$

O diagrama Ts é

A vazão em massa pode ser determinada a partir das condições na seção ①, usando $\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1$.

$$V_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{kRT_1}$$

$$= 0{,}52\left[1{,}4 \times 53{,}3\,\frac{\text{pé}\cdot\text{lbf}}{\text{lbm}\cdot{}^\circ\text{R}} \times (460+40)\,{}^\circ\text{R} \times 32{,}2\,\frac{\text{lbm}}{\text{slug}} \times \frac{\text{slug}\cdot\text{pé}}{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_1 = 570\ \text{pés/s}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 60\,\frac{\text{lbf}}{\text{pol.}^2} \times \frac{\text{lbm}\cdot{}^\circ\text{R}}{53{,}3\,\text{pé}\cdot\text{lbf}} \times \frac{1}{500^\circ\text{R}} \times 144\,\frac{\text{pol.}^2}{\text{pé}^2} = 0{,}324\ \text{lbm/pé}^3$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = 0{,}324\,\frac{\text{lbm}}{\text{pé}^3} \times 570\,\frac{\text{pé}}{\text{s}} \times 0{,}013\,\text{pé}^2 = 2{,}40\ \text{lbm/s}$$

$\dot{m}$

Da Eq. 12.6

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{M_1}\left[\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}}\right]^{(k+1)/2(k-1)} = \frac{1}{0{,}52}\left[\frac{1+0{,}2(0{,}52)^2}{1{,}2}\right]^{3{,}00} = 1{,}303$$

Para escoamento bloqueado, $A_t = A^*$. Portanto

$$A_t = A^* = \frac{A_1}{1{,}303} = \frac{0{,}013\,\text{pé}^2}{1{,}303} = 9{,}98 \times 10^{-3}\ \text{pé}^2$$

A_t

12.3.5 Escoamento Isoentrópico num Bocal Convergente-Divergente

Tendo considerado o escoamento isoentrópico num bocal convergente, voltamo-nos agora para o mesmo tipo de escoamento num bocal convergente-divergente (C-D). Como no caso anterior, o escoamento através da passagem convergente-divergente da Fig. 12.8 é induzido por uma bomba de vácuo a jusante e controlado pela válvula mostrada; as condições de estagnação a montante são admitidas constantes. A pressão no plano de saída do bocal é p_e; o bocal descarrega para a contrapressão p_b. Desejamos investigar o efeito das variações na contrapressão sobre a distribuição de pressão através do bocal. Os resultados são ilustrados graficamente na Fig. 12.8. Vamos considerar cada um dos casos mostrados.

Com a válvula inicialmente fechada, não há escoamento através do bocal; a pressão é constante no valor p_0. Uma leve abertura da válvula (p_b ligeiramente inferior a p_0) produz a curva de distribuição de pressão (*i*). Se a vazão for suficientemente baixa, o escoamento será subsônico e essencialmente incompressível em todos os pontos sobre essa curva. Nestas condições, o bocal C-D comportar-se-á como um venturi, com o escoamento acelerando-se na parte convergente até que um ponto de velocidade máxima e pressão mínima seja atingido na garganta, desacelerando-se em seguida na parte divergente até a saída do bocal.

À medida que se abre mais a válvula e a vazão aumenta, ocorre um mínimo de pressão definido de forma mais pronunciada, conforme mostrado pela curva (*ii*). Embora os efeitos de compressibilidade tornem-se importantes, o escoamento ainda é subsônico em toda parte e a desaceleração acontece na parte divergente. Finalmente, abrindo-se ainda mais a válvula, resulta a curva (*iii*). Na seção de área mínima, o escoamento finalmente atinge $M = 1$ e o bocal é bloqueado — a vazão é a máxima possível para o bocal e as condições de estagnação dados.

Todos os escoamentos com distribuições de pressão (*i*), (*ii*) e (*iii*) são isoentrópicos; cada curva é associada com um único valor de vazão mássica. Finalmente, quando a curva (*iii*) é atingida, as condições críticas estão presentes na garganta. Para essa vazão em massa, o escoamento está bloqueado e

$$\dot{m} = \rho^* V^* A^*$$

onde $A^* = A_t$.

Usando as definições de condições críticas, pode ser mostrado que

$$\dot{m} = (k/R)^{1/2}[2/(k+1)]^{(k+1)/2(k-1)} A^* p_0/\sqrt{T_0}$$

Portanto, o escoamento máximo através de um dado bocal depende somente da razão $p_0/\sqrt{T_0}$.

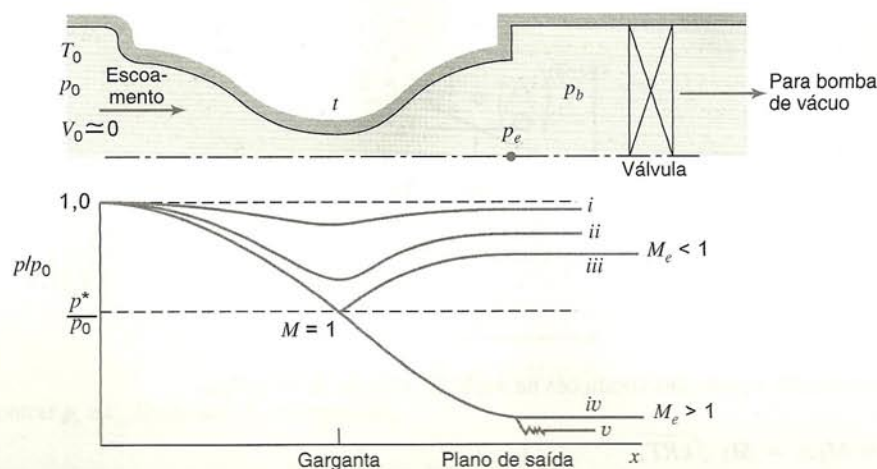



Fig. 12.8 Distribuições de pressão para escoamento isoentrópico num bocal convergente-divergente.

Na nossa discussão sobre o efeito da variação de área no escoamento isoentrópico, notamos que uma seção divergente era requerida para acelerar um escoamento isoentrópico à velocidade supersônica, partindo de $M = 1$ na garganta. A esta altura, cabe então a pergunta: "Que contrapressão, p_b, é necessária para acelerar o escoamento isoentropicamente na porção divergente do bocal?"

Para acelerar o escoamento na porção divergente, faz-se necessário um decréscimo de pressão. Esta condição é ilustrada pela curva (*iv*) na Fig. 12.8. O escoamento acelerará isoentropicamente no bocal desde que a pressão de saída seja ajustada no valor p_{iv}. Dessa forma, constatamos que, com um número de Mach igual à unidade na garganta, há duas possíveis condições de escoamento isoentrópico no bocal convergente-divergente. Isto é consistente com os resultados da Fig. 12.5, onde encontramos dois números de Mach para cada valor de A/A^* no escoamento isoentrópico.

A diminuição da contrapressão abaixo da condição (*iv*), digamos para a condição (*v*), não produz efeito sobre o escoamento no bocal. O escoamento é isoentrópico da grande câmara até a saída do bocal [o mesmo que a condição (*iv*)], passando em seguida por uma expansão irreversível, tridimensional, para a contrapressão mais baixa. Um bocal operando nessas condições é dito estar *subexpandido*, pois uma expansão adicional acontece fora dele.

Um bocal convergente-divergente tem, em geral, a finalidade de produzir escoamento supersônico no plano de saída. Se a contrapressão for ajustada em p_{iv}, o escoamento será isoentrópico através de todo o bocal e supersônico na sua saída. Bocais operando com $p_b = p_{iv}$ [correspondendo à curva (*iv*) na Fig. 12.8] são ditos operando em *condições de projeto*.

O escoamento deixando um bocal C-D é supersônico quando a contrapressão é igual ou inferior à pressão de projeto do bocal. O número de Mach na saída é fixado, uma vez que a razão de área, A_e/A^*, seja especificada. Todas as outras propriedades no plano de saída (para escoamento isoentrópico) são univocamente relacionadas com as propriedades de estagnação pelo número de Mach fixo do plano de saída.

A hipótese de escoamento isoentrópico para um bocal real em condições de projeto é razoável. Entretanto, o modelo de escoamento unidimensional é inadequado para o projeto de bocais relativamente curtos com a finalidade de produzir escoamento supersônico, uniforme, na saída.

Veículos propelidos por foguete utilizam bocais C-D para acelerar os gases de descarga até a maior velocidade possível, a fim de produzir empuxo elevado. Um bocal de propulsão é submetido a condições ambientais variáveis durante o vôo através da atmosfera; é impossível, portanto, atingir o empuxo máximo teórico em toda a faixa de operação. Como um só número de Mach supersônico pode ser obtido para cada razão de área, os bocais para túneis de vento supersônicos são freqüentemente construídos com seções intercambiáveis ou com geometria variável.

Sem dúvida, você notou que nada foi dito a respeito da operação de bocais convergentes-divergentes com contrapressão na faixa $p_{iii} > p_b > p_{iv}$. Para tais casos, o escoamento não pode expandir-se isoentropicamente até p_b. Sob essas condições, um choque (que pode ser tratado como uma descontinuidade irreversível envolvendo aumento de entropia) ocorre em algum lugar no escoamento. Após uma discussão sobre choques normais na Seção 12.6, retornaremos para completar a abordagem de escoamentos em bocais convergentes-divergentes.

Bocais operando com $p_{iii} > p_b > p_{iv}$ são ditos *superexpandidos* porque a pressão em algum ponto do bocal é inferior à contrapressão. Obviamente, um bocal superexpandido poderia operar numa nova condição de projeto com a remoção de uma porção da seção divergente.

Um outro comentário deve ser feito a esta altura. Os escoamentos de fluido compressível real são afetados por atrito, aquecimento ou resfriamento, e pela possível presença (no caso supersônico) de ondas de choque. Tratamos o escoamento isoentrópico em primeiro lugar porque é um modelo idealizado útil para muitos processos reais, e porque ele nos dá uma percepção valiosa do comportamento de fluidos em escoamento compressível. Nas duas próximas seções, consideraremos os efeitos do atrito e da transferência de calor separadamente, buscando com isso uma melhor compreensão do efeito de cada fator sobre o escoamento. Em seguida, retornaremos à discussão sobre choque normal e choques em canais, para completar o nosso estudo de escoamento em bocais convergentes-divergentes. Em cursos posteriores, será possível explorar escoamentos reais e os resultados da combinação de diversos desses efeitos.

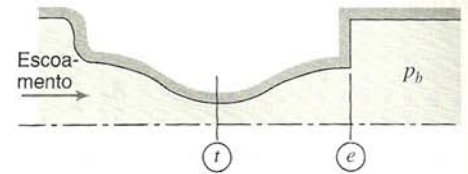
EXEMPLO 12.4 — Escoamento Isoentrópico num Bocal Convergente-Divergente

Ar escoa isoentropicamente num bocal convergente-divergente, com área de saída de 0,001 m². O bocal é alimentado a partir de uma grande câmara de pressão onde as condições de estagnação são de 350 K e de 1,0 MPa (abs.). A pressão de saída é de 954 kPa (abs.) e o número de Mach na garganta é 0,68. As condições de escoamento na garganta e o número de Mach de saída devem ser determinados.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.4

DADOS: Escoamento isoentrópico de ar num bocal C-D conforme mostrado

$$T_0 = 350 \text{ K}$$
$$p_0 = 1{,}0 \text{ MPa (abs)}$$
$$p_b = 954 \text{ kPa (abs)}$$
$$M_t = 0{,}68 \qquad A_e = 0{,}001 \text{ m}^2$$

DETERMINAR: **(a)** As propriedades e área na garganta do bocal.
(b) M_e.

SOLUÇÃO:

A temperatura de estagnação é constante para o escoamento isoentrópico. Logo, visto que

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2$$

segue-se que

$$T_t = \frac{T_0}{1 + \frac{k-1}{2}M_t^2} = \frac{350 \text{ K}}{1 + 0{,}2(0{,}68)^2} = 320 \text{ K} \longleftarrow T_t$$

Também, uma vez que p_0 é constante no escoamento isoentrópico, segue-se que

$$p_t = p_0\left(\frac{T_t}{T_0}\right)^{k/(k-1)} = p_0\left[\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2}M_t^2}\right]^{k/(k-1)}$$

$$p_t = 1{,}0 \times 10^6 \text{ Pa}\left[\frac{1}{1 + 0{,}2(0{,}68)^2}\right]^{3,5} = 734 \text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_t$$

logo

$$\rho_t = \frac{p_t}{RT_t} = 7{,}34 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287 \text{ N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{320 \text{ K}} = 7{,}99 \text{ kg/m}^3 \longleftarrow \rho_t$$

e

$$V_t = M_t c_t = M_t\sqrt{kRT_t}$$

$$V_t = 0{,}68\left[1{,}4 \times 287 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 320 \text{ K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 244 \text{ m/s} \longleftarrow V_t$$

A partir da Eq. 12.6 podemos obter o valor de A_t/A^*

$$\frac{A_t}{A^*} = \frac{1}{M_t}\left[\frac{1 + \frac{k-1}{2}M_t^2}{1 + \frac{k-1}{2}}\right]^{(k+1)/2(k-1)} = \frac{1}{0{,}68}\left[\frac{1 + 0{,}2(0{,}68)^2}{1{,}2}\right]^{3,00} = 1{,}110$$

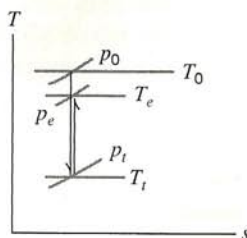
mas nesse ponto A^* não é conhecido.

Como $M_t < 1$, o escoamento na saída deve ser subsônico. Por conseguinte, $p_e = p_b$. As propriedades de estagnação são constantes, logo

$$\frac{p_0}{p_e} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M_e^2\right]^{k/(k-1)}$$

Resolvendo para M_e, resulta

$$M_e = \left\{\left[\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\frac{2}{k-1}\right\}^{1/2} = \left\{\left[\left(\frac{1{,}0 \times 10^6}{9{,}54 \times 10^5}\right)^{0,286} - 1\right](5)\right\}^{1/2} = 0{,}26 \longleftarrow M_e$$

O diagrama *Ts* para este escoamento é

Uma vez que A_e e M_e são conhecidos, podemos calcular A^*. Da Eq. 12.6

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e}\left[\frac{1+\frac{k-1}{2}M_e^2}{1+\frac{k-1}{2}}\right]^{(k+1)/2(k-1)} = \frac{1}{0{,}26}\left[\frac{1+0{,}2(0{,}26)^2}{1{,}2}\right]^{3{,}00} = 2{,}317$$

Dessa forma,

$$A^* = \frac{A_e}{2{,}317} = \frac{0{,}001\ \text{m}^2}{2{,}317} = 4{,}32 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

e

$$A_t = 1{,}110A^* = (1{,}110)(4{,}32 \times 10^{-4}\text{m}^2) = 4{,}80 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

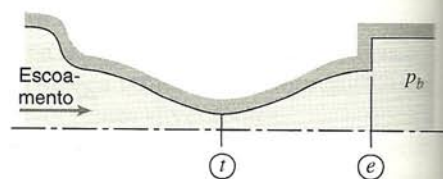
Conforme notado anteriormente, a Eq. 12.6 é uma equação de cálculo conveniente deduzida a partir dos primeiros princípios. Ela surge da aplicação da equação de continuidade entre os estados real e crítico. Aplicando-se essa equação entre a garganta e o estado crítico, e novamente entre a saída e o estado crítico, nós estaremos aptos a determinar a área da garganta sem ter que calcular todas as propriedades na saída.

EXEMPLO 12.5 — Escoamento Isoentrópico num Bocal Convergente-Divergente: Escoamento Bloqueado

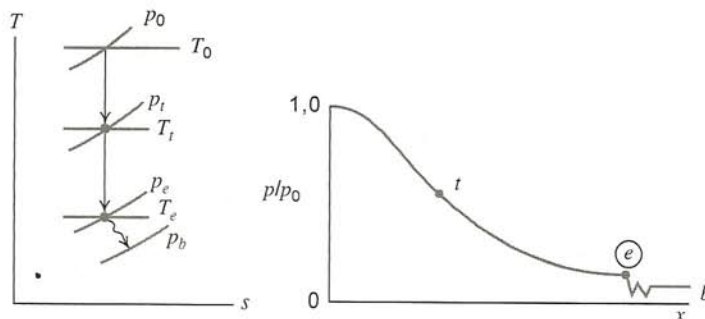
O bocal do Exemplo 12.4 tem uma contrapressão de projeto de 87,5 kPa (abs.) mas é operado a uma contrapressão de 50,0 kPa (abs.). Admita que o escoamento dentro do bocal é isoentrópico. Determine o número de Mach da saída e a vazão em massa.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.5

DADOS: Escoamento de ar através de um bocal C-D conforme mostrado:

$$T_0 = 350\ \text{K}$$
$$p_0 = 1{,}0\ \text{MPa (abs.)}$$
$$p_e(\text{projeto}) = 87{,}5\ \text{kPa (abs.)}$$
$$p_b = 50{,}0\ \text{kPa (abs.)}$$
$$A_e = 0{,}001\ \text{m}^2$$

DETERMINAR: (a) M_e. (b) $\dot{m}$.

SOLUÇÃO:

A contrapressão de operação está abaixo da pressão de projeto. Conseqüentemente, o bocal está subexpandido e o diagrama *Ts* e a distribuição de pressão serão como mostrados:

O escoamento *dentro* do bocal será isoentrópico, mas a expansão irreversível de p_e a p_b causará um aumento de entropia; $p_e = p_e(\text{projeto}) = 87{,}5$ kPa (abs.).

Como as propriedades de estagnação são constantes para o escoamento isoentrópico, o número de Mach de saída pode ser calculado da razão de pressão. Assim,

$$\frac{p_0}{p_e} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M_e^2\right]^{k/(k-1)}$$

ou

$$M_e = \left\{\left[\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\frac{2}{k-1}\right\}^{1/2} = \left\{\left[\left(\frac{1{,}0 \times 10^6}{8{,}75 \times 10^4}\right)^{0{,}286} - 1\right]\frac{2}{0{,}4}\right\}^{1/2} = 2{,}24 \longleftarrow M_e$$

A vazão em massa é dada por

$$\dot{m} = \rho_e V_e A_e = \rho_e M_e c_e A_e = \rho_e M_e \sqrt{kRT_e} A_e = \frac{p_e}{RT_e} M_e \sqrt{kRT_e} A_e$$

ou

$$\dot{m} = p_e M_e \sqrt{\frac{k}{RT_e}} A_e$$

Como T_0 é constante,

$$\frac{T_0}{T_e} = 1 + \frac{k-1}{2}M_e^2; \quad T_e = \frac{T_0}{1 + \frac{k-1}{2}M_e^2} = \frac{350 \text{ K}}{1 + 0{,}2(2{,}24)^2} = 175 \text{ K}$$

Então

$$\dot{m} = p_e M_e \sqrt{\frac{k}{RT_e}} A_e$$

$$= 8{,}75 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 2{,}24 \left[1{,}4 \times \frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{287 \text{ N} \cdot \text{m}} \times \frac{1}{175 \text{ K}} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right]^{1/2} 0{,}001 \text{ m}^2$$

$$\dot{m} = 1{,}03 \text{ kg/s} \longleftarrow \dot{m}$$

12.4 ESCOAMENTO EM DUTO DE SEÇÃO CONSTANTE, COM ATRITO

Escoamentos de gases em dutos de seção constante são comumente encontrados em diversas aplicações da engenharia. Nesta seção, consideraremos escoamentos nos quais o atrito nas paredes é responsável por mudanças nas propriedades dos fluidos.

As Seções 12.4.1 a 12.4.3 tratam do escoamento adiabático num duto de seção constante, com atrito. A hipótese de escoamento adiabático é apropriada para escoamentos nos quais o comprimento do duto é razoavelmente curto. Em dutos longos, como as tubulações de gás natural não isoladas, há disponibilidade de área superficial significativa para a transferência de calor e o escoamento é aproximadamente isotérmico. O escoamento isotérmico será abordado na Seção 12.4.4.

Para analisar o escoamento compressível em dutos de seção constante, com atrito, a força de atrito na parede pode ser relacionada com as propriedades do fluido através do fator de atrito, usando-se os métodos desenvolvidos para escoamento incompressível no Cap. 8.

12.4.1 Equações Básicas para o Escoamento Adiabático

Para obter uma visão global do problema de escoamento adiabático com atrito, apliquemos as equações básicas a um escoamento permanente, uniforme, de um gás ideal, com calores específicos constantes, através do volume de controle finito mostrado na Fig. 12.9.

a. Equação da Continuidade

Equação básica:

$$0 = \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento uniforme em cada seção

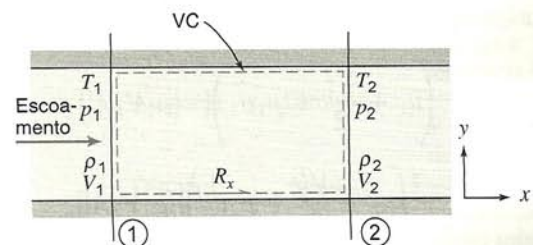



Fig. 12.9 Volume de controle usado para análise integral de escoamento adiabático com atrito.

Então,

$$0 = \{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

A área é constante, logo,

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \equiv G = \frac{\dot{m}}{A} \qquad (12.7a)$$

b. Equação da Quantidade de Movimento

Equação básica:

$$F_{S_x} + \underbrace{F_{B_x}}_{=0(3)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=0(1)} \int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Consideração: (3) $F_{B_x} = 0$

A força de superfície é devida às forças de pressão nas seções ① e ② e à força de atrito, R_x, da parede do duto *sobre* o escoamento. Substituindo e reconhecendo que $A_2 = A_1 = A$,

$$R_x + p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Usando grandezas escalares e abandonando os sinais de valor absoluto, vem

$$R_x + p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \qquad (12.7b)$$

c. Primeira Lei da Termodinâmica

Equação básica:

$$\underbrace{\dot{Q}}_{=0(4)} - \underbrace{\dot{W}_s}_{=0(5)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}}_{=0(6)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{outros}}}_{=0(6)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=0(1)} \int_{VC} e \rho \, d\forall + \int_{SC} (e + pv) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.57)$$

onde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + \underbrace{gz}_{\simeq 0(7)}$$

Considerações: (4) $\dot{Q} = 0$ (escoamento adiabático)
(5) $\dot{W}_s = 0$
(6) $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = \dot{W}_{\text{outros}} = 0$
(7) Os efeitos da gravidade são desprezíveis.

Com estas restrições, a equação torna-se

$$0 = \left(u_1 + \frac{V_1^2}{2} + p_1 v_1\right)\{-|\rho_1 V_1 A|\} + \left(u_2 + \frac{V_2^2}{2} + p_2 v_2\right)\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Uma vez que os termos de vazão em massa entre chaves são idênticos pela continuidade, segue-se que

$$u_1 + \frac{V_1^2}{2} + p_1 v_1 = u_2 + \frac{V_2^2}{2} + p_2 v_2$$

ou

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \qquad (12.7c)$$

Também poderíamos escrever

$$h_{0_1} = h_{0_2}$$

que é uma conseqüência física da nossa consideração de escoamento adiabático.

d. Segunda Lei da Termodinâmica

Equação básica:

$$\int_{SC} \frac{1}{T} \underbrace{\frac{\dot{Q}}{A}}_{=0(4)} dA \leq \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=0(1)} \int_{VC} s \rho \, d\forall + \int_{SC} s \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.59)$$

Como o escoamento é com atrito, e portanto irreversível, então

$$0 < s_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + s_2\{|\rho_2 V_2 A|\} = \dot{m}(s_2 - s_1)$$

A forma da segunda lei da termodinâmica para o volume de controle nos diz que $s_2 - s_1 > 0$.

Esse fato é de pouca ajuda no cálculo da variação real de entropia entre duas seções quaisquer num escoamento adiabático com atrito. Para calcular a variação de entropia, usamos como recurso as equações $T\,ds$. Como

$$T\,ds = dh - v\,dp$$

para um gás ideal, podemos escrever

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Para calores específicos constantes, integramos para obter

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \qquad (12.7d)$$

e. Equações de Estado

Para um gás ideal, a equação de estado é dada por

$$p = \rho R T \qquad (12.7e)$$

As Eqs. 12.7a a 12.7e são as equações governantes para o escoamento unidimensional, adiabático, permanente, com atrito, de um gás ideal, num duto de área constante. Se todas as propriedades no estado ① forem conhecidas, teremos então sete incógnitas (T_2, p_2, ρ_2, V_2, h_2, s_2 e R_x) nessas cinco equações. Contudo, também temos a relação conhecida entre h e T para um gás ideal, $dh = c_p\,dT$. Para um gás ideal com calores específicos constantes,

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p(T_2 - T_1) \qquad (12.7f)$$

Temos, portanto, a situação de seis equações e sete incógnitas.

Se todas as condições no estado ① forem conhecidas, quantos possíveis estados ② existirão? A formulação matemática da situação (seis equações e cinco incógnitas) indica um número infinito de possíveis estados ②.

Com um número infinito de possíveis estados ② para um dado estado ①, o que deverá ser esperado se todos os possíveis esta-

dos ② forem plotados num diagrama Ts? Segue-se que o lugar geométrico de todos os possíveis estados ②, alcançáveis a partir do estado ①, é uma curva contínua passando pelo estado ①.

Como podemos determinar essa curva? Talvez a maneira mais simples seja admitir valores diferentes para T_2. Para cada valor admitido de T_2, poderíamos calcular todas as outras propriedades no estado ② e também R_x.

12.4.2 Escoamento Adiabático: A Linha de Fanno

Os resultados desses cálculos são mostrados qualitativamente no plano Ts da Fig. 12.10. O lugar geométrico de todos os possíveis estados a jusante é referido como a *linha de Fanno*. Cálculos detalhados mostram algumas características interessantes do escoamento de linha de Fanno. No ponto de entropia máxima, o número de Mach é igual à unidade. No ramo superior da curva, o número de Mach é sempre inferior à unidade, e ele aumenta monotonicamente à medida que prosseguimos para a direita ao longo da curva. Em cada ponto na porção inferior da curva, o número de Mach é maior que a unidade; o número de Mach decresce monotonicamente à medida que movemos para a direita ao longo da curva.

Para qualquer estado inicial sobre a linha de Fanno, cada ponto da linha representa um estado a jusante matematicamente possível. Na verdade, determinamos o lugar geométrico de todos os estados possíveis a jusante deixando T_2 variar e calculando as propriedades correspondentes. Embora a linha de Fanno represente todos os estados a jusante matematicamente possíveis, serão todos eles fisicamente atingíveis? Se refletirmos por um momento concluiremos que não. Por que não? A segunda lei requer que a entropia aumente num processo adiabático. Conseqüentemente, os estados de escoamento devem sempre se mover para a direita ao longo da linha de Fanno da Fig. 12.10. De fato, é o efeito do atrito que causa as mudanças nas propriedades do escoamento em relação ao estado inicial. Referindo-nos novamente à Fig. 12.10, verificamos que, para um escoamento inicialmente subsônico (estado ①), o efeito do atrito é aumentar o número de Mach em direção à unidade. Para um escoamento que é inicialmente supersônico (estado ①'), o efeito do atrito é diminuir o número de Mach em direção à unidade.

Ao desenvolvermos a forma simplificada da primeira lei para o escoamento de linha de Fanno, verificamos que a entalpia de estagnação permanece constante. Em conseqüência, quando o

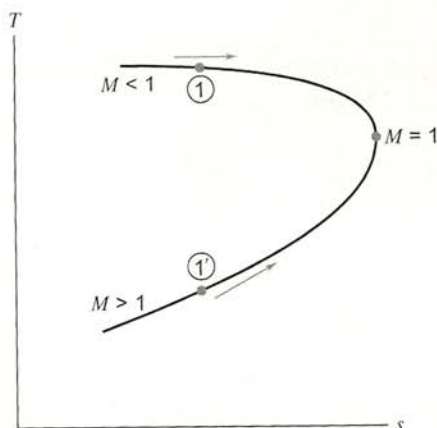



Fig. 12.10 Diagrama Ts esquemático para escoamento adiabático com atrito (linha de Fanno), num duto de área constante.

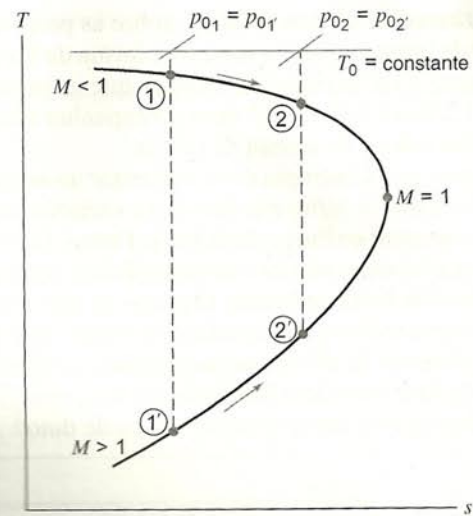



Fig. 12.11 Esquema de escoamento de linha de Fanno no plano Ts, mostrando a redução na pressão de estagnação isoentrópica local causada por atrito.

fluido é um gás ideal com calores específicos constantes, a temperatura de estagnação também deve permanecer constante. O que acontece com a pressão de estagnação? O atrito causa a diminuição da pressão de estagnação isoentrópica local para todos os escoamentos de linha de Fanno, como mostrado na Fig. 12.11. Lembre que a segunda lei requer $s_2 - s_1 > 0$. Uma vez que a entropia deve aumentar na direção do escoamento, o processo deve prosseguir para a direita, no diagrama Ts. Na Fig. 12.11, uma trajetória do estado ① para o estado ② é mostrada na porção subsônica da curva. As pressões de estagnação isoentrópica locais, p_{0_1} e p_{0_2}, mostram claramente que $p_{0_2} < p_{0_1}$. Um resultado idêntico é obtido para o escoamento no ramo supersônico da curva, do estado ①'para o ②'. Novamente, $p_{0_{2'}} < p_{0_{1'}}$. Assim, p_0 decresce para qualquer escoamento de linha de Fanno.

Os efeitos do atrito sobre as propriedades do escoamento de linha de Fanno estão resumidos na Tabela 12.1.

Tabela 12.1 Resumo dos Efeitos do Atrito sobre o Escoamento de Linha de Fanno

Propriedade	Subsônico $M < 1$	Supersônico $M > 1$	Obtido de:
Temperatura de estagnação, T_0	Constante	Constante	Equação de energia
Entropia, s	Aumenta	Aumenta	Equação $T\,ds$
Pressão de estagnação, p_0	Diminui	Diminui	T_0 = constante s aumenta
Temperatura, T	Diminui	Aumenta	Forma de linha de Fanno
Velocidade, V	Aumenta	Diminui	Equação de energia e tendência de T
Número de Mach, M	Aumenta	Diminui	Tendências de V e T e definição de M
Massa específica, ρ	Diminui	Aumenta	Equação de continuidade e efeito sobre V
Pressão, p	Diminui	Aumenta	Equação de estado e efeitos sobre ρ e T

Ao deduzirmos os efeitos do atrito sobre as propriedades do escoamento de linha de Fanno, usamos a forma da linha de Fanno no diagrama Ts e as equações básicas que governam o processo (Eqs. 12.7a a 12.7f). Você deve acompanhar a lógica indicada na última coluna da direita da tabela.

Assinalamos que a entropia deve aumentar no sentido do escoamento: é o efeito do atrito que provoca a variação nas propriedades do escoamento ao longo da linha de Fanno. Da Fig. 12.11, verificamos que há um ponto de entropia máxima correspondente a $M = 1$ para cada linha de Fanno. O ponto de entropia máxima é atingido aumentando-se a quantidade de atrito (através da adição de comprimento de duto), apenas o suficiente para produzir um número de Mach unitário (escoamento bloqueado) na saída. Como calculamos este comprimento crítico de duto?

Para calcular o comprimento crítico de duto, devemos analisar o escoamento em detalhe, levando em conta o atrito. Esta análise requer que comecemos com um volume de controle diferencial, desenvolvamos expressões em termos do número de Mach e integremos ao longo do duto até a seção onde $M = 1$. A análise é completada na Seção 12.4.3, onde funções de escoamento são desenvolvidas para o escoamento de linha de Fanno. O algebrismo exigido para a análise detalhada tende a obscurecer a física do escoamento; as tendências gerais de variação nas propriedades, causadas pelo atrito, podem ser demonstradas usando-se volumes de controle finitos e as equações básicas que governam o processo, como ilustrado no Problema-Exemplo 12.6.

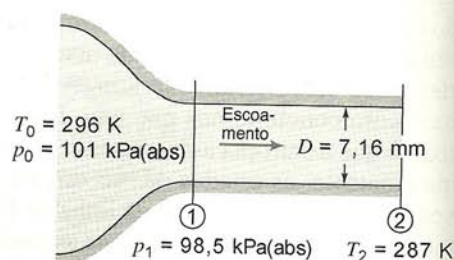
EXEMPLO 12.6 — Escoamento Adiabático com Atrito num Duto de Área Constante

Escoamento de ar é induzido, por uma bomba de vácuo, num tubo de 7,16 mm de diâmetro termicamente isolado. O ar é extraído de um recinto, onde $p_0 = 101$ kPa (abs.) e $T_0 = 23°C$, através de um bocal convergente de contornos suaves. Na seção ①, onde o bocal une-se ao tubo de área constante, a pressão estática é de 98,5 kPa (abs.). Na seção ②, localizada a alguma distância a jusante no tubo de área constante, a temperatura do ar é de 14°C. Determine a vazão em massa, a pressão de estagnação isoentrópica local na seção ② e a força de atrito sobre a parede do duto entre as seções ① e ②.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.6

DADOS: Escoamento de ar num duto termicamente isolado.

DETERMINAR: (a) $\dot{m}$.
(b) A pressão de estagnação na seção ②.
(c) A força sobre a parede do duto.

SOLUÇÃO:
A vazão em massa pode ser obtida das propriedades na seção ①. Para escoamento isoentrópico através de um bocal convergente, as propriedades de estagnação isoentrópica local permanecem constantes. Assim,

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)^{k/(k-1)}$$

e

$$M_1 = \left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_{0_1}}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\right\}^{1/2} = \left\{\frac{2}{0,4}\left[\left(\frac{1,01\times 10^5}{9,85\times 10^4}\right)^{0,286} - 1\right]\right\}^{1/2} = 0,190$$

$$T_1 = \frac{T_{0_1}}{1 + \frac{k-1}{2}M_1^2} = \frac{(273+23)\text{ K}}{1 + 0,2(0,190)^2} = 294\text{ K}$$

Para um gás ideal,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 9,85\times 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\times\frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\text{ N}\cdot\text{m}}\times\frac{1}{294\text{ K}} = 1,17\text{ kg/m}^3$$

$$V_1 = M_1c_1 = M_1\sqrt{kRT_1} = (0,190)\left[1,4\times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\times 294\text{ K}\times\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_1 = 65,3\text{ m/s}$$

A área, A_1, é

$$A_1 = A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4}(7,16\times 10^{-3})^2\text{ m}^2 = 4,03\times 10^{-5}\text{ m}^2$$

Da continuidade,

$$\dot{m} = \rho_1V_1A_1 = 1,17\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times 65,3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\times 4,03\times 10^{-5}\text{ m}^2$$

$$\dot{m} = 3,08\times 10^{-3}\text{ kg/s}$$ ← $\dot{m}$

O escoamento é adiabático, logo, T_0 é constante e

$$T_{0_2} = T_{0_1} = 296 \text{ K} \qquad T_{0_2}$$

Então

$$\frac{T_{0_2}}{T_2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2$$

Resolvendo para M_2, vem

$$M_2 = \left[\frac{2}{k-1}\left(\frac{T_{0_2}}{T_2} - 1\right)\right]^{1/2} = \left[\frac{2}{0,4}\left(\frac{296}{287} - 1\right)\right]^{1/2} = 0,396 \qquad M_2$$

$$V_2 = M_2 c_2 = M_2\sqrt{kRT_2} = (0,396)\left[1,4 \times 287 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 287 \text{ K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_2 = 134 \text{ m/s} \qquad V_2$$

Da continuidade, $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, logo,

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} = 1,17 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{65,3}{134} = 0,570 \text{ kg/m}^3 \qquad \rho_2$$

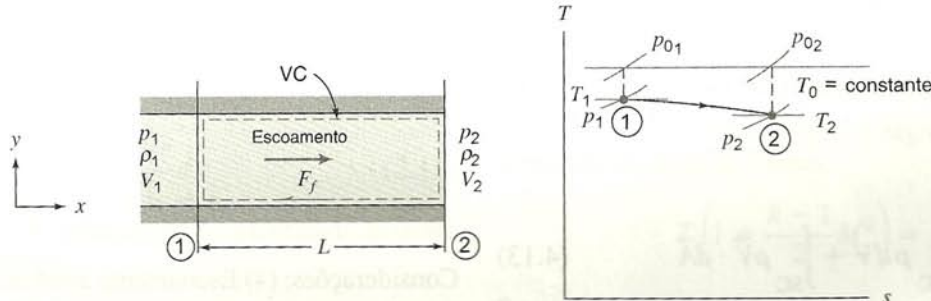
e

$$p_2 = \rho_2 R T_2 = 0,570 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 287 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 287 \text{ K} = 47,0 \text{ kPa (abs)} \qquad p_2$$

A pressão de estagnação isoentrópica local é

$$p_{0_2} = p_2\left(1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right)^{k/(k-1)} = 4,70 \times 10^4 \text{ Pa}[1 + 0,2(0,396)^2]^{3,5}$$

$$p_{0_2} = 52,4 \text{ kPa (abs)} \qquad p_{0_2}$$

A força de atrito pode ser determinada pela aplicação da equação de quantidade de movimento ao volume de controle mostrado:

Equação básica:

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(1)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(2)} \int_{\text{VC}} V_x \rho \, d\forall + \int_{\text{SC}} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Considerações: (1) $F_{B_x} = 0$
(2) Escoamento permanente
(3) Escoamento uniforme em cada seção

Portanto,

$$-F_f + p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\} = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

e

$$-F_f = (p_2 - p_1)A + \dot{m}(V_2 - V_1)$$

$$-F_f = (4,70 - 9,85)10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 4,03 \times 10^{-5} \text{ m}^2 + 3,08 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \times (134 - 65,3)\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

ou

$F_f = 1,86$ N (para a esquerda, conforme mostrado)

Essa é a força exercida sobre o volume de controle pela parede do duto. A força do *fluido* sobre o *duto* é

$$K_x = F_f = 1,86 \text{ N} \quad \text{(para a direita)} \qquad K_x$$

*12.4.3 Funções de Escoamento de Linha de Fanno para o Escoamento Unidimensional de um Gás Ideal

A variável primária independente no escoamento de linha de Fanno é a força de atrito, F_f. O conhecimento da força de atrito total entre dois pontos quaisquer num escoamento de linha de Fanno nos permitiria prever as condições a jusante a partir de condições conhecidas a montante. A força de atrito total é a integral da tensão de cisalhamento na parede sobre a área da superfície do duto. Como a tensão de cisalhamento na parede varia ao longo do duto, devemos desenvolver uma equação diferencial e, em seguida, integrá-la para determinar as variações de propriedades. Para estabelecer a equação diferencial, usamos o volume de controle diferencial mostrado na Fig. 12.12.

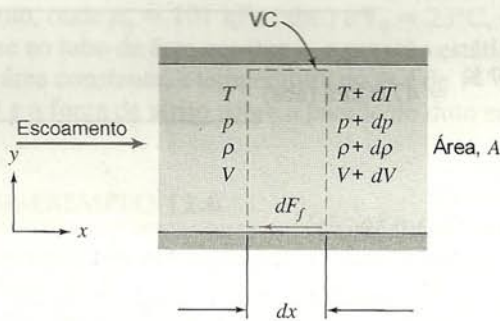



Fig. 12.12 Volume de controle diferencial usado para a análise do escoamento de linha de Fanno.

a. Equação da Continuidade

Equação básica:

$$0 = \overset{=0(1)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}} \int_{\mathrm{VC}} \rho \, d\forall + \int_{\mathrm{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento uniforme em cada seção

Logo,

$$0 = \{-|\rho V A|\} + \{|(\rho + d\rho)(V + dV)A|\}$$

ou

$$\rho V A = (\rho + d\rho)(V + dV)A$$

Simplificando e cancelando A, vem

$$0 = -\cancel{\rho V} + \cancel{\rho V} + \rho \, dV + V \, d\rho + \overset{\simeq 0}{\cancel{d\rho} \, dV}$$

que reduz-se a

$$\rho \, dV + V \, d\rho = 0 \qquad (12.8a)$$

visto que os produtos de diferenciais são desprezíveis.

* Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

b. Equação de Quantidade de Movimento

Equação básica:

$$F_{S_x} + \overset{=0(3)}{\cancel{F_{B_x}}} = \overset{=0(1)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}} \int_{\mathrm{VC}} V_x \rho \, d\forall + \int_{\mathrm{SC}} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Consideração: (3) $F_{B_x} = 0$

A equação da quantidade de movimento torna-se

$$-dF_f + pA - (p + dp)A =$$
$$= V\{-|\rho V A|\} + (V + dV)\{|(\rho + d\rho)(V + dV)A|\}$$

que pode ser simplificada, usando a continuidade, dando

$$-\frac{dF_f}{A} - dp = \rho V \, dV \qquad (12.8b)$$

c. Primeira Lei da Termodinâmica

Equação básica:

$$\overset{=0(4)}{\cancel{\dot{Q}}} - \overset{=0(5)}{\cancel{\dot{W}_s}} - \overset{=0(6)}{\cancel{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}}} - \overset{=0(6)}{\cancel{\dot{W}_{\text{outros}}}} = \overset{=0(1)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}} \int_{\mathrm{VC}} e \rho \, d\forall +$$
$$+ \int_{\mathrm{SC}} (e + pv) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.57)$$

onde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + \overset{\simeq 0(7)}{\cancel{g}z}$$

Considerações: (4) Escoamento adiabático, $\dot{Q} = 0$
(5) $\dot{W}_s = 0$
(6) $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = \dot{W}_{\text{outros}} = 0$
(7) Os efeitos da gravidade são desprezíveis.

Com essas restrições, obtemos

$$0 = \left(u + \frac{V^2}{2} + pv\right)\{-|\rho V A|\} +$$
$$+ \left[u + du + \frac{V^2}{2} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + pv + d(pv)\right]\{|(\rho + d\rho)(V + dV)A|\}$$

Notando, da continuidade, que os termos de vazão { } são iguais, e substituindo $h = u + pv$, obtemos

$$dh + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \qquad (12.8c)$$

Para completar nossa formulação, devemos relacionar a força de atrito, dF_f, com as variáveis do escoamento em cada seção transversal. Notamos que

$$dF_f = \tau_w dA_w = \tau_w P dx \tag{12.9}$$

onde P é o perímetro molhado do duto. Para obter uma expressão para τ_w em termos das variáveis do escoamento em cada seção transversal, admitimos que as mudanças nas variáveis em função de x são graduais e usamos as correlações desenvolvidas no Cap. 8 para escoamento incompressível inteiramente desenvolvido em dutos. Para escoamento incompressível, a tensão de cisalhamento local na parede pode ser escrita em termos das propriedades do escoamento e do fator de atrito. Das Eqs. 8.16, 8.30 e 8.32, temos, para escoamento incompressível,

$$\tau_w = -\frac{R}{2}\frac{dp}{dx} = \frac{\rho R}{2}\frac{dh_l}{dx} = \frac{f\rho V^2}{8} \tag{12.10}$$

onde f é o fator de atrito para escoamento em tubo, Fig. 8.13. (Admitimos que essa correlação de dados experimentais também se aplica ao escoamento compressível. Esta hipótese, quando verificada contra dados experimentais, mostra uma concordância surpreendentemente boa para escoamentos subsônicos; os dados para escoamentos supersônicos são esparsos.)

Os dutos de forma não circular podem ser incluídos na nossa análise pela introdução do diâmetro hidráulico

$$D_h = \frac{4A}{P} \tag{8.45}$$

(Lembre que o fator 4 foi incluído na Eq. 8.45 para que D_h iguale-se ao diâmetro D para dutos circulares.)

Combinando as Eqs. 8.45, 12.9 e 12.10, obtemos

$$dF_f = \tau_w P\,dx = f\frac{\rho V^2}{8}\frac{4A}{D_h}dx$$

ou

$$dF_f = \frac{fA}{D_h}\frac{\rho V^2}{2}dx \tag{12.11}$$

Substituindo esse resultado na equação da quantidade de movimento (Eq. 12.8b), obtemos

$$-\frac{f}{D_h}\frac{\rho V^2}{2}dx - dp = \rho V\,dV$$

ou, após dividir por p,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{D_h}\frac{\rho V^2}{2p}dx - \frac{\rho V\,dV}{p}$$

Notando que $p/\rho = RT = c^2/k$, e $V\,dV = d(V^2/2)$, obtemos

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx - \frac{k}{c^2}d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

e, finalmente,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx - \frac{kM^2}{2}\frac{d(V^2)}{V^2} \tag{12.12}$$

Para relacionar M e x, devemos eliminar dp/p e $d(V^2)/V^2$ da Eq. 12.12. Da definição do número de Mach, $M = V/c$, segue que $V^2 = M^2c^2 = M^2kRT$, e

$$\frac{d(V^2)}{V^2} = \frac{dT}{T} + \frac{d(M^2)}{M^2} \tag{12.13a}$$

Da equação da continuidade, $d\rho/\rho = -dV/V$ e

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2}\frac{d(V^2)}{V^2}$$

Da equação de estado do gás ideal, $p = \rho RT$,

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

Combinando essas três equações, obtemos

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T} - \frac{1}{2}\frac{d(M^2)}{M^2} \tag{12.13b}$$

Substituindo as Eqs. 12.13 na Eq. 12.12, vem

$$\frac{1}{2}\frac{dT}{T} - \frac{1}{2}\frac{d(M^2)}{M^2} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx - \frac{kM^2}{2}\frac{dT}{T} - \frac{kM^2}{2}\frac{d(M^2)}{M^2}$$

Essa equação pode ser simplificada para

$$\left(\frac{1+kM^2}{2}\right)\frac{dT}{T} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx + \left(\frac{1-kM^2}{2}\right)\frac{d(M^2)}{M^2} \tag{12.14}$$

Tivemos êxito em reduzir consideravelmente o número de variáveis. Contudo, para relacionar M e x, devemos obter uma expressão para dT/T em termos de M. Tal expressão pode ser obtida mais prontamente da equação para a temperatura de estagnação

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \tag{11.17b}$$

Uma vez que a temperatura de estagnação é constante para escoamento de linha de Fanno,

$$T\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right) = \text{constante}$$

e

$$\frac{dT}{T} + \frac{M^2\frac{(k-1)}{2}}{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{d(M^2)}{M^2} = 0$$

Substituindo dT/T na Eq. 12.14, resulta

$$\frac{M^2\frac{(k-1)}{2}\left(\frac{1+kM^2}{2}\right)}{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{d(M^2)}{M^2} = \frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx - \left(\frac{1-kM^2}{2}\right)\frac{d(M^2)}{M^2}$$

Combinando termos, obtemos

$$\frac{(1-M^2)}{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{d(M^2)}{kM^4} = \frac{f}{D_h}dx \tag{12.15}$$

Obtivemos uma equação diferencial que relaciona variações de M com x. Devemos agora integrar essa equação a fim de determinar M em função de x.

A integração da Eq. 12.15 entre os estados ① e ② produziria uma função complicada tanto de M_1 quanto de M_2. A função teria que ser avaliada numericamente para cada nova combinação de M_1 e M_2 encontrada em um problema. Os cálculos podem ser simplificados consideravelmente usando-se as condições críticas (onde, por definição, $M = 1$). Todos os escoamentos de linha de Fanno tendem para $M = 1$ e, desse modo, a integração fica entre uma seção onde o número de Mach é M e a seção onde condições sônicas ocorrem (condições críticas). O número de Mach atingirá a unidade quando o comprimento máximo possível de duto for utilizado, como mostrado esquematicamente na Fig. 12.13.

A tarefa é realizar a integração

$$\int_M^1 \frac{(1 - M^2)}{kM^4\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)} d(M^2) = \int_0^{L_{\text{máx}}} \frac{f}{D_h} dx \quad (12.16)$$

O lado esquerdo pode ser integrado por partes. No lado direito, o fator de atrito, f, pode variar com x, pois o número de Reynolds variará ao longo do duto. Note, entretanto, que sendo ρV constante ao longo do duto (da continuidade), a variação no número de Reynolds é causada unicamente por variações na viscosidade do fluido.

Para um fator de atrito médio, $\bar{f}$, definido sobre o comprimento do duto por

$$\bar{f} = \frac{1}{L_{\text{máx}}} \int_0^{L_{\text{máx}}} f\, dx$$

a integração da Eq. 12.16 conduz a

$$\frac{1 - M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k} \ln\left[\frac{(k+1)M^2}{2\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}\right] = \frac{\bar{f}L_{\text{máx}}}{D_h} \quad (12.17)$$

A Eq. 12.17 dá o máximo $\bar{f}L/D_h$ correspondente a qualquer número de Mach inicial.

Como $\bar{f}L_{\text{máx}}/D_h$ é uma função de M, o comprimento do duto, L, necessário para que o número de Mach mude de M_1 para M_2 (como ilustrado na Fig. 12.13) pode ser obtido a partir de

$$\frac{\bar{f}L}{D_h} = \left(\frac{\bar{f}L_{\text{máx}}}{D_h}\right)_{M_1} - \left(\frac{\bar{f}L_{\text{máx}}}{D_h}\right)_{M_2}$$

As condições críticas são condições de referência apropriadas para se usar na tabulação das propriedades do fluido como uma função do número de Mach local. Assim, por exemplo, uma vez que T_0 é constante, podemos escrever

$$\frac{T}{T^*} = \frac{T/T_0}{T^*/T_0} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \bigg/ \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)} \quad (12.18a)$$

De modo análogo,

$$\frac{V}{V^*} = \frac{M\sqrt{kRT}}{\sqrt{kRT^*}} = M\sqrt{\frac{T}{T^*}} = \left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \quad (12.18b)$$

Da continuidade,

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2}M^2}{\left(\frac{k+1}{2}\right)M^2}\right]^{1/2} \quad (12.18c)$$

Da equação de estado do gás ideal,

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\rho}{\rho^*}\frac{T}{T^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \quad (12.18d)$$

A razão entre a pressão de estagnação local e a pressão de estagnação de referência é dada por

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{p_0}{p}\frac{p}{p^*}\frac{p^*}{p_0^*}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)} \frac{1}{M}\left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{k/(k-1)}}$$

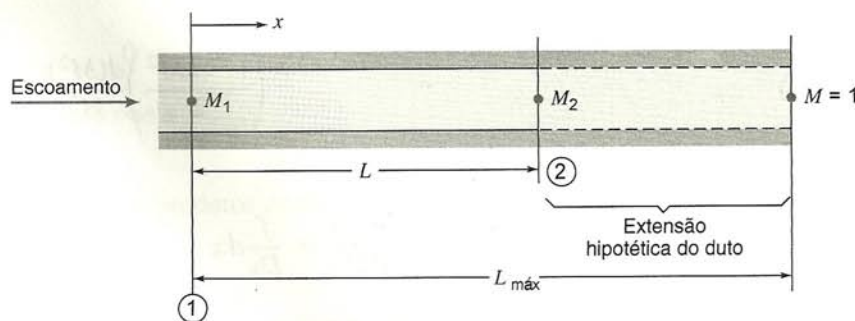



Fig. 12.13 Coordenadas e notação usadas na análise do escoamento de linha de Fanno.

ou

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{(k+1)/2(k-1)} \qquad (12.18e)$$

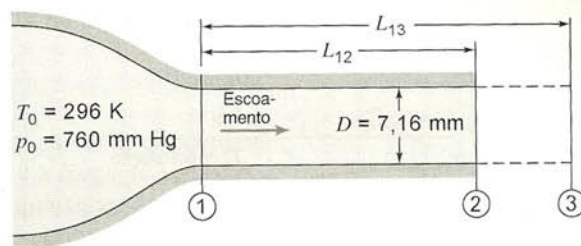
O Apêndice E.2 lista funções de escoamento de linha de Fanno para razões de propriedades p_0/p_0^*, T/T^*, p/p^*, V/V^*, e para $\bar{f}L_{máx}/D_h$ em termos de M para um gás ideal. Uns poucos valores representativos dessas razões de propriedades são listados para $k = 1,4$. Essas funções são plotadas contra o número de Mach para escoamento de linha de Fanno de um gás ideal com $k = 1,4$. O uso dessas funções pode reduzir de forma significativa o trabalho de cálculo.

O programa computacional *FM Software Supplement*, disponível no *web site* da John Wiley, contém um módulo que calcula razões de propriedades para escoamento de linha de Fanno. Tanto o número de Mach quanto uma razão de propriedade podem ser usados como entrada. O programa calcula as razões de propriedades restantes e apresenta a localização do ponto de estado sobre a linha de Fanno num diagrama esquemático *Ts*.

EXEMPLO 12.7 — Escoamento Adiabático com Atrito num Duto de Área Constante: Solução Usando as Funções de Escoamento de Linha de Fanno

Escoamento de ar é induzido, por meio de uma bomba de vácuo, num tubo liso com 7,16 mm de diâmetro interno, termicamente isolado. O ar é extraído de uma sala, onde $p_0 = 760$ mm Hg (abs.) e $T_0 = 23°C$, através de um bocal convergente de contornos suaves. Na seção ①, onde o bocal une-se ao tubo de área constante, a pressão estática é de −18,9 mm Hg (man.). Na seção ②, localizada a certa distância a jusante no tubo de seção transversal constante, a pressão estática é de −412 mm Hg (man.). As paredes do duto são lisas; admita que o fator de atrito médio, $\bar{f}$, é o valor na seção ①. Determine o comprimento de duto necessário para causar o bloqueio a partir da seção ①, o número de Mach na seção ② e o comprimento do duto, L_{12}, entre as seções ① e ②.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.7

DADOS: Escoamento de ar (com atrito) num duto de área constante, termicamente isolado.

Pressões manométricas: $p_1 = -18,9$ mm Hg e $p_2 = -412$ mm Hg. $M_3 = 1,0$

DETERMINAR: **(a)** L_{13}. **(b)** M_2. **(c)** L_{12}.

SOLUÇÃO:

O escoamento no tubo de área constante é adiabático e com atrito, um escoamento de linha de Fanno. Para determinar o fator de atrito, precisamos conhecer as condições do escoamento na seção ①. Se admitirmos que o escoamento no bocal é isoentrópico, as propriedades locais na saída do bocal podem ser calculadas usando-se as relações isoentrópicas. Deste modo,

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)^{k/(k-1)}$$

Resolvendo para M_1, obtemos

$$M_1 = \left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_{0_1}}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\right\}^{1/2} = \left\{\frac{2}{0,4}\left[\left(\frac{760}{760-18,9}\right)^{0,286} - 1\right]\right\}^{1/2} = 0,190$$

$$T_1 = \frac{T_{0_1}}{1 + \frac{k-1}{2}M_1^2} = \frac{296\text{ K}}{1 + 0,2(0,190)^2} = 294\text{ K}$$

$$V_1 = M_1 c_1 = M_1\sqrt{kRT_1} = 0,190\left[1,4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 294\text{ K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_1 = 65,3\text{ m/s}$$

Usando a massa específica do mercúrio à temperatura da sala (23°C),

$$p_1 = g\rho_{Hg}h_1 = gSG\rho_{H_2O}h_1$$

$$= 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \times 13{,}5 \times 1000\,\frac{kg}{m^3} \times (760 - 18{,}9)10^{-3}\,m \times \frac{N \cdot s^2}{kg \cdot m}$$

$$p_1 = 98{,}1 \text{ kPa (abs)}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 9{,}81 \times 10^4\,\frac{N}{m^2} \times \frac{kg \cdot K}{287\,N \cdot m} \times \frac{1}{294\,K} = 1{,}16\text{ kg/m}^3$$

Para $T = 294$ K (21°C), $\mu = 1{,}82 \times 10^{-5}$ kg/(m·s) da Tabela A.10, Apêndice A. Logo,

$$Re_1 = \frac{\rho_1 V_1 D_1}{\mu_1} = 1{,}16\,\frac{kg}{m^3} \times 65{,}3\,\frac{m}{s} \times 0{,}00716\,m \times \frac{m \cdot s}{1{,}82 \times 10^{-5}\,kg} = 2{,}98 \times 10^4$$

Da Fig. 8.13, para tubo liso, $f = 0{,}0235$.

Do Apêndice E.2 para $M_1 = 0{,}190$, $p/p^* = 5{,}745$ (Eq. 12.18d) e $\bar{f}L_{máx}/D_h = 16{,}38$ (Eq. 12.17). Assim, admitindo $\bar{f} = f_1$,

$$L_{13} = (L_{máx})_1 = \left(\frac{\bar{f}L_{máx}}{D_h}\right)_1 \frac{D_h}{f_1} = 16{,}38 \times \frac{0{,}00716\,m}{0{,}0235} = 4{,}99\,m$$

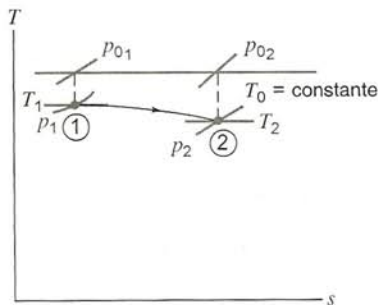
L_{13}

Uma vez que p^* é constante para escoamento de linha de Fanno, as condições na seção ② podem ser determinadas a partir da razão de pressões $(p/p^*)_2$. Dessa forma,

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_2 = \frac{p_2}{p^*} = \frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p^*} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{p}{p^*}\right)_1 = \left(\frac{760 - 412}{760 - 18{,}9}\right)5{,}745 = 2{,}698$$

Do gráfico do Apêndice E.2 para $(p/p^*)_2 = 2{,}698$, podemos determinar um valor aproximado para M_2. Uma iteração subseqüente da Eq. 12.18d dá $M_2 = 0{,}400$.

M_2

O diagrama Ts para esse escoamento é

Para $M_2 = 0{,}400$, $\bar{f}L_{máx}/D_h = 2{,}309$ (Eq. 12.17, Apêndice E.2). Logo,

$$L_{23} = (L_{máx})_2 = \left(\frac{\bar{f}L_{máx}}{D_h}\right)_2 \frac{D_h}{f_1} = 2{,}309 \times \frac{0{,}00716\,m}{0{,}0235} = 0{,}704\,m$$

Finalmente,

$$L_{12} = L_{13} - L_{23} = (4{,}99 - 0{,}704)\,m = 4{,}29\,m$$

L_{12}

Esse é o mesmo sistema físico analisado no Problema-Exemplo 12.7. O emprego das funções da linha de Fanno simplifica o cálculo e torna possível determinar o comprimento do duto.

*12.4.4 Escoamento Isotérmico

O escoamento de gases através de dutos longos de área constante, como em tubulações de gás natural, é essencialmente isotérmico. Os números de Mach, nesses casos, são em geral baixos, mas podem ocorrer significativas variações de pressão, como um resultado dos efeitos do atrito sobre longos trechos de duto. Por conseguinte, tais escoamentos não podem ser tratados como incompressíveis. A consideração de escoamento isotérmico é muito mais apropriada.

A análise de escoamento isotérmico é similar à de escoamento adiabático, com uma alteração importante. Para escoamento adiabático, a troca de calor, $\delta Q/dm$, é zero; para escoamento iso-

* Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

térmico, a temperatura é constante e então, $dT = 0$. Para escoamento isotérmico, a primeira lei da termodinâmica, para o volume de controle finito da Fig. 12.9, é escrita como

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{\delta Q}{dm} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \qquad (12.19a)$$

ou

$$q = \frac{\delta Q}{dm} = h_{0_2} - h_{0_1} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \qquad (12.19b)$$

As equações da continuidade e da quantidade de movimento são dadas pelas Eqs. 12.7a e 12.7b, respectivamente,

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \equiv G = \frac{\dot{m}}{A} \qquad (12.7a)$$

$$R_x + p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \qquad (12.7b)$$

Para um gás ideal,

$$p = \rho R T \qquad (12.7e)$$

As Eqs. 12.7a, 12.7b, 12.7e e 12.19a são equações governantes para o escoamento unidimensional, isotérmico, em regime permanente, de um gás ideal num duto de área constante. Se todas as condições no estado ① forem conhecidas, teremos cinco incógnitas nessas quatro equações. Deste modo, haverá um número infinito de possíveis estados ②. O lugar geométrico desses possíveis estados a jusante é uma linha horizontal que passa pelo estado ① no diagrama Ts. Para o escoamento isotérmico, a variação de entropia pode ser calculada a partir da Eq. 12.7d como,

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_2}{p_1} \qquad (12.20)$$

Como num escoamento de linha de Fanno, a variável primária independente no escoamento isotérmico é a força de atrito, R_x. O conhecimento da força de atrito entre quaisquer duas seções num escoamento isotérmico nos permitiria prever as condições a jusante, quando as condições a montante fossem conhecidas. As propriedades a jusante podem ser prontamente determinadas se o número de Mach, a jusante, for conhecido. Para escoamento isotérmico, c = constante, logo $V_2/V_1 = M_2/M_1$ e, da Eq. 12.7a, temos

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2} \qquad (12.21)$$

Combinando a equação de estado do gás ideal com a Eq. 12.21, obtemos

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \qquad (12.22)$$

A razão entre temperaturas de estagnação é dada por

$$\frac{T_{0_2}}{T_{0_1}} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \qquad (12.23)$$

Para determinar a variação no número de Mach ao longo do comprimento do duto, é necessário considerar a equação da quantidade de movimento na forma diferencial para o escoamento com atrito. A análise que leva à Eq. 12.14 é válida para escoamento isotérmico. Sendo T = constante, para escoamento isotérmico, segue, da Eq. 12.14 com $dT = 0$, que

$$\frac{f}{D_h} \frac{kM^2}{2} dx = \left(\frac{1 - kM^2}{2} \right) \frac{d(M^2)}{M^2} \qquad (12.24)$$

e

$$\frac{f}{D_h} dx = \frac{(1 - kM^2) d(M^2)}{kM^4} \qquad (12.25)$$

A Eq. 12.25 mostra que o número de Mach limite, para o qual o comprimento máximo $L_{máx}$ é atingido, é $M = 1/\sqrt{k}$. Como T é constante, então o fator de atrito, $f = f(Re)$, também é constante. A integração da Eq. 12.25 entre os limites de $M = M$ para $x = 0$, e $M = 1/\sqrt{k}$ para $x = L_{máx}$, onde $L_{máx}$ é a distância além da qual o escoamento isotérmico não pode prosseguir, dá

$$\frac{f L_{máx}}{D_h} = \frac{1 - kM^2}{kM^2} + \ln kM^2 \qquad (12.26)$$

O comprimento de duto, L, requerido para que o número de Mach do escoamento mude de M_1 para M_2, pode ser obtido de

$$f \frac{L}{D_h} = f \frac{L_{máx_1} - L_{máx_2}}{D_h} = \frac{1 - kM_1^2}{kM_1^2} - \frac{1 - kM_2^2}{kM_2^2} + \ln \frac{M_1^2}{M_2^2} \qquad (12.27)$$

A distribuição de troca de calor ao longo do duto, necessária para manter o escoamento isotérmico, pode ser determinada a partir da forma diferencial da Eq. 12.19b, como

$$dq = dh_0 = c_p dT_0 = c_p d \left[T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]$$

ou, como T = constante,

$$dq = c_p T \left(\frac{k-1}{2} \right) dM^2 = \frac{c_p T_0 (k-1)}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} dM^2$$

Substituindo o valor de dM^2 da Eq. 12.25, vem

$$dq = \frac{c_p T_0 (k-1) k M^4}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) (1 - kM^2)} \frac{f}{D_h} dx \qquad (12.28)$$

Da Eq. 12.28, notamos que $M \to 1/\sqrt{k}$, portanto $dq/dx \to \infty$. Dessa forma, uma taxa de troca de calor infinita é requerida para manter o escoamento isotérmico à medida que o número de Mach aproxima-se do valor limite. Por conseguinte, concluímos que a aceleração isotérmica do escoamento, num duto de área constante, só é fisicamente possível para escoamentos a baixo número de Mach.

12.5 ESCOAMENTO SEM ATRITO EM DUTO DE SEÇÃO CONSTANTE, COM TROCA DE CALOR

Para explorar os efeitos da troca de calor num escoamento compressível, aplicamos as equações básicas ao escoamento unidimensional, permanente, sem atrito, de um gás ideal com calores específicos constantes, através do volume de controle finito mostrado na Fig. 12.14.

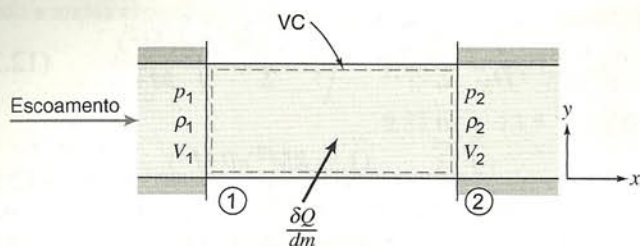



Fig. 12.14 Volume de controle usado para a análise integral de escoamento sem atrito, com troca de calor.

12.5.1 Equações Básicas

a. Equação da Continuidade

A aplicação da formulação da conservação de massa para um volume de controle (Eq. 4.13) ao volume de controle da Fig. 12.14 com as considerações de (1) escoamento permanente, (2) escoamento uniforme em cada seção, leva a

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \equiv G = \frac{\dot{m}}{A} \qquad (12.29a)$$

b. Equação da Quantidade de Movimento

Equação básica:

$$F_{S_x} + \overset{=0(3)}{F_{B_x}} = \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Consideração: (3) $F_{B_x} = 0$

Uma vez que não há atrito entre as paredes do duto e o escoamento, e $A_2 = A_1 = A$,

$$p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Esta equação pode ser escrita como

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \qquad (12.29b)$$

ou

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$$

c. Primeira Lei da Termodinâmica

Equação básica:

$$\dot{Q} - \overset{=0(4)}{\dot{W}_s} - \overset{=0(5)}{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}} - \overset{=0(5)}{\dot{W}_{\text{outros}}} = \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{VC} e\rho \, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.57)$$

Considerações: (4) $\dot{W}_s = 0$

(5) $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = \dot{W}_{\text{outros}} = 0$

(6) Os efeitos da gravidade são desprezíveis

Com essas restrições,

$$\dot{Q} = \left(u_1 + \frac{V_1^2}{2} + p_1 v_1\right)\{-|\rho_1 V_1 A|\} + \left(u_2 + \frac{V_2^2}{2} + p_2 v_2\right)\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

ou

$$\dot{Q} = \dot{m}\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} - h_1 - \frac{V_1^2}{2}\right)$$

Mas

$$\frac{\delta Q}{dm} = \frac{1}{\dot{m}}\dot{Q}$$

logo

$$\frac{\delta Q}{dm} + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \qquad (12.29c)$$

ou

$$\frac{\delta Q}{dm} = h_{0_2} - h_{0_1}$$

Vemos que a troca de calor faz variar a entalpia de estagnação e, conseqüentemente, a temperatura de estagnação.

d. A Segunda Lei da Termodinâmica

Equação básica:

$$\int_{SC} \frac{1}{T}\frac{\dot{Q}}{A} dA \leq \overset{=0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{VC} s\rho \, d\forall + \int_{SC} s\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.59)$$

ou

$$\int_{SC} \frac{1}{T}\frac{\dot{Q}}{A} dA \leq \dot{m}(s_2 - s_1)$$

Dado que o escoamento é sem atrito, a igualdade da Eq. 4.59 prevaleceria se o processo de troca de calor fosse considerado como reversível. Entretanto, mesmo assumindo o processo como reversível, a integral no lado esquerdo da equação não pode ser avaliada. Em conseqüência, a forma para volume de controle da segunda lei não nos permite calcular a variação real de entropia entre dois pontos quaisquer no escoamento. A taxa de troca de calor, $\dot{Q}$, pode ser positiva (adição de calor ao escoamento) ou negativa (rejeição de calor pelo escoamento). Por conseguinte, a variação de entropia num escoamento sem atrito, com troca de calor, pode ser tanto positiva quanto negativa.

Para calcularmos a variação de entropia, recorremos às equações $T\,ds$. Para calores específicos constantes, a equação $T\,ds$ pode ser integrada para dar

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \qquad (12.29d)$$

e. Equações de Estado

Para um gás ideal, a equação de estado é

$$p = \rho R T \qquad (12.29e)$$

As Eqs. 12.29a a 12.29e são as equações governantes para o escoamento unidimensional, permanente, sem atrito, de um gás ideal num duto de área constante, com troca de calor. Se todas as propriedades no estado ① forem conhecidas, então teremos sete incógnitas (ρ_2, V_2, p_2, h_2, s_2, T_2 e $\delta Q/dm$) nessas cinco equações. Contudo, dispomos da conhecida relação entre h e T para um gás ideal, $dh = c_p dT$. Para um gás ideal com calores específicos constantes,

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p(T_2 - T_1) \qquad (12.29f)$$

Temos, deste modo, a situação de seis equações e sete incógnitas.

12.5.2 A Linha de Rayleigh

Com seis equações e sete incógnitas, nós reconhecemos que, para condições a montante dadas, um número infinito de estados a jusante é possível. Para determinar o lugar geométrico de todos os possíveis estados a jusante, vamos deixar T_2 variar e calcular as propriedades correspondentes.

Os resultados desses cálculos são mostrados qualitativamente no plano Ts na Fig. 12.15. O lugar geométrico de todos os estados possíveis a jusante é chamado *linha de Rayleigh*. Os cálculos mostram algumas características interessantes do escoamento de linha de Rayleigh. No ponto de temperatura máxima (ponto a da Fig. 12.15), o número de Mach para um gás ideal é $1/\sqrt{k}$. No ponto de entropia máxima (ponto b da Fig. 12.15), $M = 1$. No ramo superior da curva, o número de Mach é sempre menor que a unidade e ele aumenta monotonicamente à medida que movemos para a direita ao longo da curva. Em cada ponto na porção inferior da curva, o número de Mach é maior que a unidade, e ele decresce monotonicamente à medida que movemos para a direita ao longo da curva. A despeito do número de Mach inicial, com adição de calor, o estado do escoamento prossegue para a direita e, com rejeição de calor, o estado do escoamento prossegue para a esquerda ao longo da linha de Rayleigh.

Para qualquer estado inicial num escoamento de linha de Rayleigh, qualquer ponto sobre a linha de Rayleigh representa um estado a jusante matematicamente possível. Na verdade, o lugar geométrico de todos os estados possíveis a jusante foi determinado variando T_2 e calculando as propriedades correspondentes. Embora a linha de Rayleigh represente todos os estados a jusante matematicamente possíveis, serão eles fisicamente alcançáveis? Refletindo por um momento, concluímos que são. Uma vez que estamos considerando um escoamento com troca de calor, a segunda lei não impõe qualquer restrição quanto ao sinal da variação de entropia.

Fig. 12.15 Diagrama Ts esquemático para escoamento sem atrito num duto de área constante, com troca de calor (escoamento de linha de Rayleigh).

Os efeitos da troca de calor num escoamento compressível, permanente, sem atrito, de um gás ideal, podem ser determinados a partir das equações básicas, Eqs. 12.29a a 12.29f, e da linha de Rayleigh resultante, Fig. 12.15. Esses efeitos estão resumidos na Tabela 12.2; a base de cada tendência indicada é discutida nos próximos parágrafos.

O sentido da variação de entropia é sempre indicado pela troca de calor; a entropia aumenta com o aquecimento e diminui com o resfriamento. Similarmente, a primeira lei, Eq. 12.29c, mostra que o aquecimento aumenta a entalpia de estagnação e o resfriamento a diminui; como $\Delta h_0 = c_p \Delta T_0$, o efeito sobre a temperatura de estagnação é o mesmo.

O efeito do aquecimento e do resfriamento sobre a temperatura pode ser deduzido a partir da forma da linha de Rayleigh na Fig. 12.15. Vemos que, para $M < 1/\sqrt{k}$ (para o ar, $1/\sqrt{k} \approx 0{,}85$), ou para $M > 1$, o aquecimento causa um aumento de T e, nas mesmas regiões, o resfriamento causa uma diminuição de T. Entretanto, verificamos também o resultado inesperado que, para $1/\sqrt{k} < M < 1$, a *adição de calor* causa um *decréscimo* na temperatura da corrente e a *rejeição de calor* causa um *aumento* na temperatura da corrente!

Para escoamento subsônico, o número de Mach aumenta monotonicamente com o aquecimento, até que $M = 1$ seja atingido. Para condições de entrada dadas, todos os estados possíveis a jusante situam-se numa só linha de Rayleigh. Por conseguinte, o ponto $M = 1$ determina a máxima adição de calor possível sem bloqueio. Se o escoamento for inicialmente supersônico, o aquecimento reduzirá o número de Mach. Novamente, a máxima adição de calor possível, sem bloqueio, é aquela que reduz o número de Mach para $M = 1{,}0$.

O efeito da troca de calor sobre a pressão estática é obtido a partir das formas da linha de Rayleigh e das linhas de pressão constante no plano Ts (veja a Fig. 12.16). Para $M < 1$, a pressão cai com o aquecimento e, para $M > 1$, a pressão aumenta, conforme mostrado pelas formas das linhas de pressão constante. Uma vez que a variação de pressão tenha sido determinada, o efeito sobre a velocidade pode ser determinado a partir da equação da quantidade de movimento,

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \qquad (12.29b)$$

ou

$$p + \left(\frac{\dot{m}}{A}\right) V = \text{constante}$$

Assim, uma vez que $\dot{m}/A$ = constante, as tendências de p e de V devem ser opostas. Da equação da continuidade, a tendência de ρ é oposta à de V.

A pressão de estagnação isoentrópica local sempre diminui com o aquecimento. Isto é ilustrado esquematicamente na Fig. 12.16. Uma redução na pressão de estagnação tem implicações práticas óbvias para processos de aquecimento, tais como câmaras de combustão. A adição de uma mesma quantidade de energia por unidade de massa (mesma variação de T_0) causa uma variação maior em p_0 para escoamento supersônico; visto que o aquecimento ocorre a uma temperatura mais baixa no escoamento supersônico, o aumento de entropia é maior.

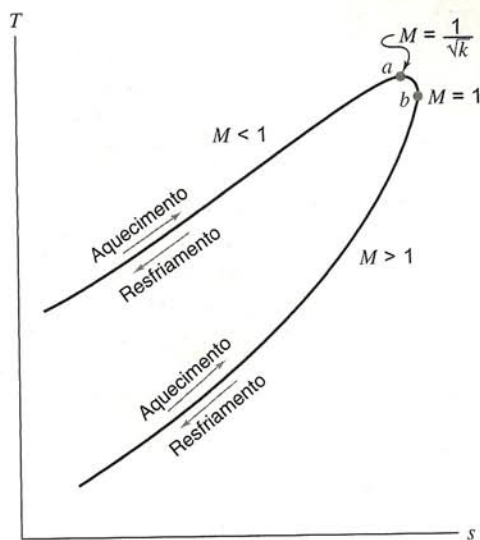



Tabela 12.2 Resumo dos Efeitos da Troca de Calor sobre as Propriedades dos Fluidos

	Aquecimento		Resfriamento		
Propriedade	$M < 1$	$M > 1$	$M < 1$	$M > 1$	**Obtido de:**
Entropia, s	Aumenta	Aumenta	Diminui	Diminui	Equação $T\,ds$
Temperatura de estagnação, T_0	Aumenta	Aumenta	Diminui	Diminui	Primeira lei, e $\Delta h_0 = c_p \Delta T_0$
Temperatura, T	$\left(M < \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ Aumenta $\left(\frac{1}{\sqrt{k}} < M < 1\right)$ Diminui	Aumenta	$\left(M < \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ Diminui $\left(\frac{1}{\sqrt{k}} < M < 1\right)$ Aumenta	Diminui	Forma da linha de Rayleigh
Número de Mach, M	Aumenta	Diminui	Diminui	Aumenta	Tendência sobre a linha de Rayleigh
Pressão, p	Diminui	Aumenta	Aumenta	Diminui	Tendência sobre a linha de Rayleigh
Velocidade, V	Aumenta	Diminui	Diminui	Aumenta	Equação da quantidade de movimento e efeito sobre p
Massa específica, ρ	Diminui	Aumenta	Aumenta	Diminui	Equação da continuidade e efeito sobre V
Pressão de estagnação, p_0	Diminui	Diminui	Aumenta	Aumenta	Fig. 12.16

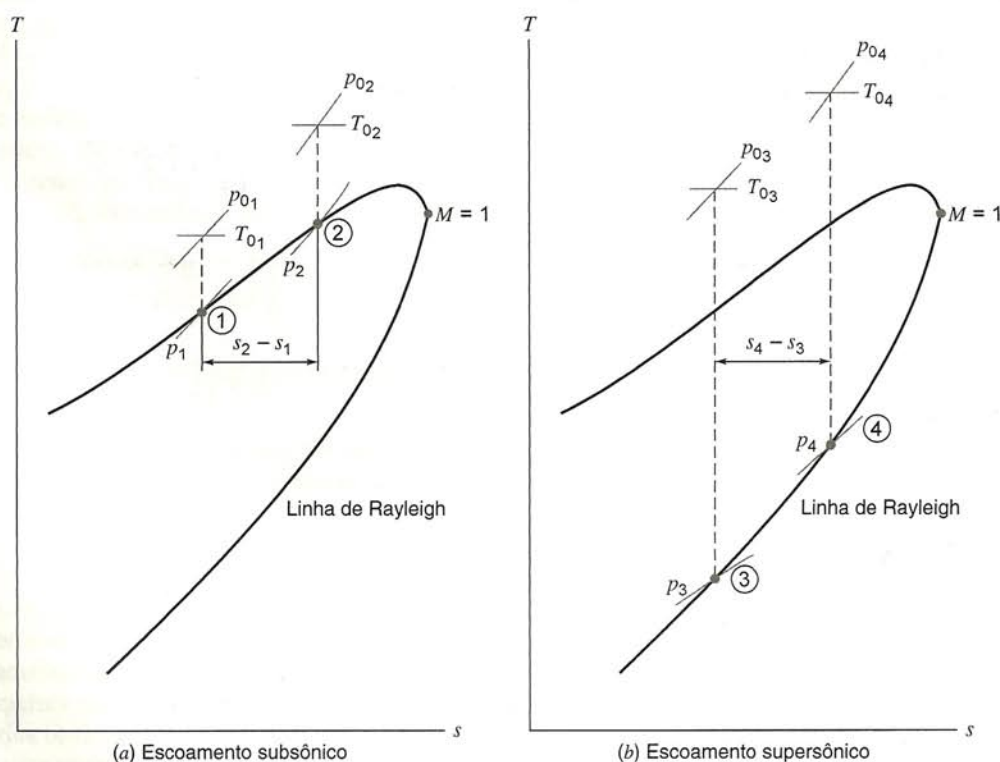



Fig. 12.16 Redução na pressão de estagnação em decorrência da adição de calor para dois casos de escoamento.

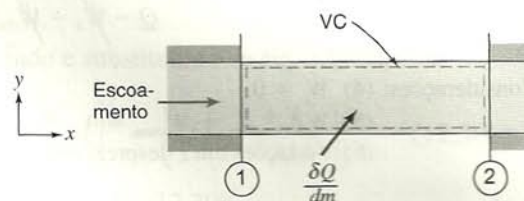
EXEMPLO 12.8 — Escoamento sem Atrito num Duto de Área Constante com Adição de Calor

Ar escoa com atrito desprezível através de um duto de área $A = 0{,}25$ pé². Na seção ①, as propriedades do escoamento são $T_1 = 600°\text{R}$, $p_1 = 20$ psia e $V_1 = 360$ pés/s. Na seção ②, $p_2 = 10$ psia. O escoamento é aquecido entre as seções ① e ②. Determine as propriedades na seção ②, a energia adicionada e a variação de entropia. Finalmente, plote o processo num diagrama Ts.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.8

DADOS: Escoamento sem atrito de ar, no duto mostrado:

$T_1 = 600°\text{R}$
$p_1 = 20$ psia $\quad p_2 = 10$ psia
$V_1 = 360$ pés/s $\quad A_1 = A_2 = A = 0{,}25$ pé²

DETERMINAR: (a) Propriedades na seção ②.
(b) $\delta Q/dm$.
(c) $s_2 - s_1$.
(d) Diagrama Ts.

SOLUÇÃO:

Aplique a componente x da equação da quantidade de movimento, usando as coordenadas e o volume de controle mostrados.

Equação básica:

$$F_{S_x} + \cancelto{=0(1)}{F_{B_x}} = \cancelto{=0(2)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} V_x \rho \, d\forall} + \int_{\text{SC}} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Considerações: (1) $F_{B_x} = 0$
(2) Escoamento permanente
(3) Escoamento uniforme em cada seção

Então

$$p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\} = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

ou

$$p_1 - p_2 = \frac{\dot{m}}{A}(V_2 - V_1) = \rho_1 V_1 (V_2 - V_1)$$

Resolvendo para V_2, vem

$$V_2 = \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 V_1} + V_1$$

Para um gás ideal,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{20}{} \frac{\text{lbf}}{\text{pol.}^2} \times \frac{144}{} \frac{\text{pol.}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{lbm} \cdot °\text{R}}{53{,}3 \text{ pé} \cdot \text{lbf}} \times \frac{1}{600°\text{R}} = 0{,}0901 \text{ lbm/pé}^3$$

$$V_2 = (20 - 10) \frac{\text{lbf}}{\text{pol.}^2} \times 144 \frac{\text{pol.}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{0{,}0901 \text{ lbm}} \times \frac{\text{s}}{360 \text{ pé}} \times 32{,}2 \frac{\text{lbm}}{\text{slug}} \times \frac{\text{slug} \cdot \text{pé}}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2} + 360 \frac{\text{pé}}{\text{s}}$$

$$V_2 = 1790 \text{ pé/s} \qquad V_2$$

Da continuidade, $G = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, logo

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} = 0{,}0901 \frac{\text{lbm}}{\text{pé}^3} \left(\frac{360}{1790}\right) = 0{,}0181 \text{ lbm/pé}^3 \qquad \rho_2$$

Resolvendo para T_2, obtemos

$$T_2 = \frac{p_2}{\rho_2 R} = 10 \frac{\text{lbf}}{\text{pol.}^2} \times 144 \frac{\text{pol.}^2}{\text{pé}^2} \times \frac{\text{pé}^3}{0{,}0181 \text{ lbm}} \times \frac{\text{lbm} \cdot °\text{R}}{53{,}3 \text{ pé} \cdot \text{lbf}} = 1490°\text{R} \qquad T_2$$

A temperatura de estagnação isoentrópica local é dada por

$$T_{0_2} = T_2\left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right)$$

$$c_2 = \sqrt{kRT_2} = 1890 \text{ pé/s}; \qquad M_2 = \frac{V_2}{c_2} = \frac{1790}{1890} = 0{,}947$$

$$T_{0_2} = 1490°\text{R}[1 + 0{,}2(0{,}947)^2] = 1760°\text{R} \qquad T_{0_2}$$

e

$$p_{0_2} = p_2\left(\frac{T_{0_2}}{T_2}\right)^{k/(k-1)} = 10\,\text{psia}\left(\frac{1760}{1490}\right)^{3,5} = 17{,}9\,\text{psia} \qquad p_{0_2}$$

A adição de calor é determinada a partir da equação da energia.

Equação básica:

$$\dot{Q} - \underbrace{\dot{W}_s}_{=0(4)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}}_{=0(5)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{outros}}}_{=0(5)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall}_{=0(2)} + \int_{\text{SC}} (e + pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.57)$$

Considerações: (4) $\dot{W}_s = 0$
(5) $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = \dot{W}_{\text{outros}} = 0$
(6) Variações em z desprezíveis

Então

$$\dot{Q} = \left(u_1 + p_1v_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)\{-|\rho_1V_1A|\} + \left(u_2 + p_2v_2 + \frac{V_2^2}{2}\right)\{|\rho_2V_2A|\}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} - h_1 - \frac{V_1^2}{2}\right) = \dot{m}(h_{0_2} - h_{0_1}) = \dot{m}c_p(T_{0_2} - T_{0_1})$$

e

$$\frac{\delta Q}{dm} = \frac{1}{\dot{m}}\dot{Q} = c_p(T_{0_2} - T_{0_1})$$

$$T_{0_1} = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = 1200\,\text{pé/s}; \qquad M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{360}{1200} = 0{,}3$$

$$T_{0_1} = 600°\text{R}[1 + 0{,}2(0{,}3)^2] = 611°\text{R}$$

logo

$$\frac{\delta Q}{dm} = 0{,}240\,\frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot°\text{R}}(1760 - 611)°\text{R} = 276\,\text{Btu/lbm} \qquad \delta Q/dm$$

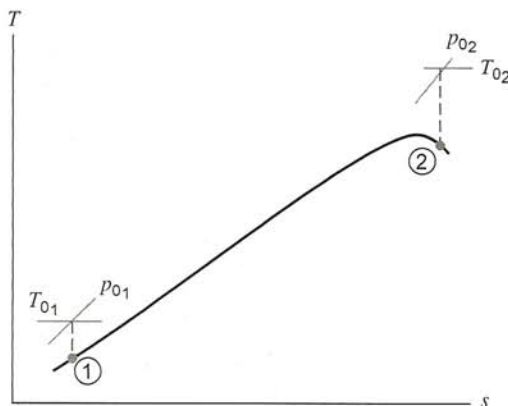
Usando a equação $T\,ds$, $T\,ds = dh - v\,dp$, obtemos, para um gás ideal com calores específicos constantes,

$$s_2 - s_1 = c_p\ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} = c_p\ln\frac{T_2}{T_1} - (c_p - c_v)\ln\frac{p_2}{p_1}$$

Então

$$s_2 - s_1 = 0{,}240\,\frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot°\text{R}} \times \ln\left(\frac{1490}{600}\right) - (0{,}240 - 0{,}171)\,\frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot°\text{R}} \times \ln\left(\frac{10}{20}\right)$$

$$s_2 - s_1 = 0{,}266\,\text{Btu/(lbm}\cdot°\text{R)} \qquad s_2 - s_1$$

O processo segue uma linha de Rayleigh:

Para completar nossa análise, examinemos a variação de p_0 comparando p_{0_2} com p_{0_1}.

$$p_{0_1} = p_1\left(\frac{T_{0_1}}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = 20{,}0 \text{ psia}\left(\frac{611}{600}\right)^{3{,}5} = 21{,}3 \text{ psia}$$

p_{0_1}

Comparando, vemos que p_{0_2} é menor que p_{0_1}.

Em geral, a pressão de estagnação é diminuída pelo aquecimento e aumentada pelo resfriamento no escoamento da linha de Rayleigh.

*12.5.3 Funções de Escoamento de Linha de Rayleigh para Escoamento Unidimensional de um Gás Ideal

Na Seção 12.5.1, escrevemos as equações básicas para escoamento de linha de Rayleigh entre dois estados arbitrários ① e ②. Para facilitar a resolução de problemas, é conveniente deduzir funções de escoamento para razões de propriedades em termos do número de Mach local, assim como fizemos para o escoamento de linha de Fanno. O estado de referência é novamente tomado como a condição crítica em que $M = 1$; propriedades na condição crítica são denotadas por (*).

Propriedades adimensionais (tais como p/p^* e T/T^*) podem ser obtidas escrevendo-se as equações básicas entre um ponto no escoamento no qual as propriedades são M, T, p etc., e o estado crítico ($M = 1$, com propriedades denotadas como T^*, p^* etc.).

A razão entre pressões, p/p^*, pode ser obtida da equação de quantidade de movimento

$$pA - p^*A = \dot{m}V^* - \dot{m}V \qquad (12.29b)$$

ou

$$p + \rho V^2 = p^* + \rho^* V^{*^2}$$

Substituindo $\rho = p/RT$, e colocando em evidência as pressões, obtemos

$$p\left[1 + \frac{V^2}{RT}\right] = p^*\left[1 + \frac{V^{*^2}}{RT^*}\right]$$

Notando que $V^2/RT = k(V^2/kRT) = kM^2$, encontramos

$$p[1 + kM^2] = p^*[1 + k]$$

e finalmente,

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + k}{1 + kM^2} \qquad (12.30a)$$

Da equação de estado do gás ideal,

$$\frac{T}{T^*} = \frac{p}{p^*}\frac{\rho^*}{\rho}$$

Da equação da continuidade,

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*} = M\frac{c}{c^*} = M\sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

Então, substituindo ρ^*/ρ, obtemos

$$\frac{T}{T^*} = \frac{p}{p^*}M\sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

Elevando ao quadrado e substituindo da Eq. 12.30a, vem

$$\frac{T}{T^*} = \left[\frac{p}{p^*}M\right]^2 = \left[M\left(\frac{1 + k}{1 + kM^2}\right)\right]^2 \qquad (12.30b)$$

Da continuidade, usando a Eq. 12.30b,

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*} = \frac{M^2(1 + k)}{1 + kM^2} \qquad (12.30c)$$

A temperatura de estagnação adimensional, T_0/T_0^*, pode ser determinada de

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{T_0}{T}\frac{T}{T^*}\frac{T^*}{T_0^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)\left[M\left(\frac{1 + k}{1 + kM^2}\right)\right]^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\right)} \qquad (12.30d)$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(k + 1)M^2\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{(1 + kM^2)^2}$$

Analogamente,

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{p_0}{p}\frac{p}{p^*}\frac{p^*}{p_0^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)}\left(\frac{1 + k}{1 + kM^2}\right)\frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{k/(k-1)}} \qquad (12.30e)$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1 + k}{1 + kM^2}\left[\left(\frac{2}{k + 1}\right)\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{k/(k-1)}$$

O Apêndice E.3 lista funções de escoamento para razões de propriedades T_0/T_0^*, p_0/p_0^*, T/T^*, p/p^* e V/V^* em termos de M para escoamento de linha de Rayleigh de um gás ideal. Uns poucos valores representativos dessas razões de propriedades são listados para $k = 1{,}4$. Essas funções são plotadas contra o número de Mach para escoamento de linha de Rayleigh de um gás ideal com $k = 1{,}4$. O uso dessas funções pode reduzir de forma significativa o trabalho de cálculo.

O programa computacional *FM Software Supplement*, disponível no *web site* da John Wiley, contém um módulo que calcula razões de propriedades para escoamento de linha de Rayleigh. Tanto o número de Mach quanto uma razão de propriedade podem ser usados como entrada. O programa calcula as razões de propriedades restantes e apresenta a localização do ponto de estado sobre a linha de Rayleigh num diagrama esquemático *Ts*.

* Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

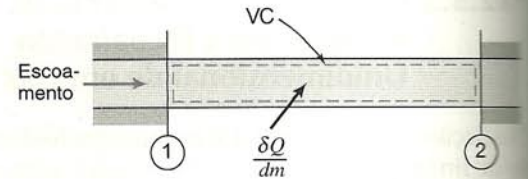
EXEMPLO 12.9 — Escoamento sem Atrito num Duto de Área Constante com Adição de Calor: Solução Usando Funções de Escoamento de Linha de Rayleigh

Ar escoa com atrito desprezível num duto de área constante. Na seção ①, as propriedades são $T_1 = 60°\text{C}$, $p_1 = 135$ kPa (abs.) e $V_1 = 732$ m/s. Calor é adicionado entre as seções ① e ②, onde $M = 1{,}2$. Determine as propriedades na seção ②, a troca de calor por unidade de massa e a variação de entropia, e esboce o processo num diagrama Ts.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.9

DADOS: Escoamento sem atrito de ar, conforme mostrado:

$T_1 = 333$ K $M_2 = 1{,}2$
$p_1 = 135$ kPa (abs.)
$V_1 = 732$ m/s

DETERMINAR: (a) Propriedades na seção ②.
(b) $\delta Q/dm$.
(c) $s_2 - s_1$.
(d) Diagrama Ts.

SOLUÇÃO:
Para obter as razões entre propriedades, precisamos de ambos os números de Mach.

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \left[1{,}4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 333\,\text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 366\ \text{m/s}$$

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = 732\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{366\,\text{m}} = 2{,}00$$

Das funções de escoamento de linha de Rayleigh do Apêndice E.3, encontramos o seguinte:

M	T_0/T_0^*	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*
2,00	0,7934	1,503	0,5289	0,3636	1,455
1,20	0,9787	1,019	0,9119	0,7958	1,146

Usando esses dados e reconhecendo que as propriedades críticas são constantes, obtemos

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0{,}9119}{0{,}5289} = 1{,}72; \qquad T_2 = 1{,}72T_1 = (1{,}72)333\ \text{K} = 573\ \text{K}$$ ← T_2

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = \frac{0{,}7958}{0{,}3636} = 2{,}19; \qquad p_2 = 2{,}19p_1 = (2{,}19)135\ \text{kPa}$$

$$p_2 = 296\ \text{kPa (abs)}$$ ← p_2

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = \frac{1{,}146}{1{,}455} = 0{,}788; \qquad V_2 = 0{,}788V_1 = (0{,}788)732\text{m/s}$$

$$V_2 = 577\ \text{m/s}$$ ← V_2

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 2{,}96 \times 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\,\text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{573\,\text{K}} = 1{,}80\ \text{kg/m}^3$$ ← ρ_2

A adição de calor pode ser determinada a partir da equação da energia, que reduz-se a (veja o Problema-Exemplo 12.8)

$$\frac{\delta Q}{dm} = h_{0_2} - h_{0_1} = c_p(T_{0_2} - T_{0_1})$$

Das funções de escoamento isoentrópico (Eq. 11.17b do Apêndice E.1) para $M = 2{,}0$,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_1}{T_{0_1}} = 0{,}5556; \qquad T_{0_1} = \frac{T_1}{0{,}5556} = \frac{333\ \text{K}}{0{,}5556} = 599\ \text{K}$$

e para $M = 1{,}2$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_2}{T_{0_2}} = 0{,}7764; \qquad T_{0_2} = \frac{T_2}{0{,}7764} = \frac{573\ \text{K}}{0{,}7764} = 738\ \text{K}$$ ← T_{0_2}

Substituindo, dá

$$\frac{\delta Q}{dm} = c_p(T_{0_2} - T_{0_1}) = 1{,}00\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times (738 - 599)\ \text{K} = 139\ \text{kJ/kg} \qquad \delta Q/dm$$

A variação de entropia pode ser determinada a partir da equação $T\,ds$, $T\,ds = dh - v\,dp$. Para um gás ideal com calores específicos constantes,

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$= 1{,}00\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times \ln\left(\frac{573}{333}\right) - 287\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times \ln\left(\frac{2{,}96\times10^5}{1{,}35\times10^5}\right) \times \frac{\text{kJ}}{1000\ \text{N}\cdot\text{m}}$$

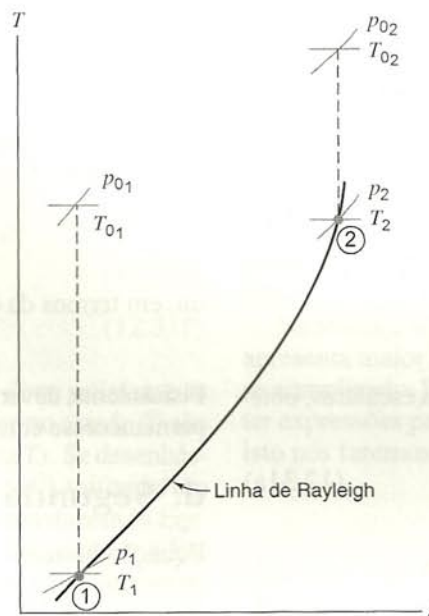
$$s_2 - s_1 = 0{,}317\ \text{kJ/(kg}\cdot\text{K)} \qquad s_2 - s_1$$

Finalmente, verifique o efeito sobre p_0. Da função de escoamento isentrópico (Eq. 11.17a do Apêndice E.1) para $M = 2{,}0$,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p_1}{p_{0_1}} = 0{,}1278; \quad p_{0_1} = \frac{p_1}{0{,}1278} = \frac{135\ \text{kPa}}{0{,}1278} = 1{,}06\ \text{MPa (abs)}$$

e para $M = 1{,}2$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p_2}{p_{0_2}} = 0{,}4124; \quad p_{0_2} = \frac{p_2}{0{,}4124} = \frac{296\ \text{kPa}}{0{,}4124} = 718\ \text{kPa (abs)} \qquad p_{0_2}$$

Assim, $p_{0_2} < p_{0_1}$, conforme esperado para um processo de aquecimento.
O processo segue o ramo supersônico de uma linha de Rayleigh:

12.6 CHOQUES NORMAIS

Nós mencionamos anteriormente os choques normais, na seção sobre escoamento em bocais. Na prática, essas descontinuidades irreversíveis podem ocorrer em qualquer campo de escoamento supersônico, seja no escoamento interno, seja no externo.[2] O conhecimento das variações de propriedades através dos choques e do comportamento dos choques é importante para a compreensão do projeto de difusores supersônicos, por exemplo, as tomadas de ar de aviões de alto desempenho e túneis de vento supersônicos. Com isto em mente, o propósito desta seção é analisar o processo de choque normal.

Antes de aplicarmos as equações básicas aos choques normais, é importante formar um quadro físico claro do choque, em si mesmo. Embora seja fisicamente impossível ter descontinuidades nas propriedades dos fluidos, o choque normal é aproximadamente descontínuo. A espessura de um choque é cerca de 0,2 μm (10^{-5} pol.), ou, grosseiramente, quatro vezes o caminho livre médio das moléculas gasosas [2]. Grandes variações na pressão, temperatura e em outras propriedades ocorrem através dessa pequena distância. As desacelerações locais do fluido atingem dezenas de milhões de gs! Essas considerações justificam tratar os choques normais como uma descontinuidade súbita; estamos interessados nas mudanças que ocorrem através do choque e não em detalhes da sua estrutura.

[2] O filme da NCFMF *Channel Flow of a Compressible Fluid* mostra vários exemplos de formação de choques em um escoamento interno.

12.6.1 Equações Básicas

Para começar nossa análise, apliquemos as equações básicas ao fino volume de controle mostrado na Fig. 12.17, onde, para generalizar, ilustramos um choque ocorrendo numa passagem de contorno arbitrário.

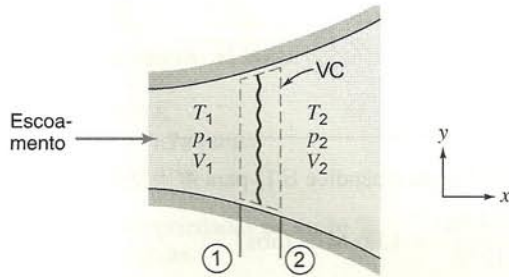



Fig. 12.17 Volume de controle usado na análise de choque normal.

a. Equação da Continuidade

Equação básica:

$$0 = \overset{=0(1)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

Considerações: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento uniforme em cada seção
(3) $A_1 = A_2 = A$, porque o choque é extraordinariamente delgado

Logo

$$0 = \{-|\rho_1 V_1 A|\} + \{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Escrevendo o resultado em termos de grandezas escalares, obtemos

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \frac{\dot{m}}{A} \qquad (12.31a)$$

b. Equação da Quantidade de Movimento

Equação básica:

$$F_{S_x} + \overset{=0(5)}{\cancel{F_{B_x}}} = \overset{=0(1)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}}\int_{VC} V_x \rho\, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Considerações: (4) Atrito desprezível nas paredes do duto porque o choque é extremamente delgado
(5) $F_{B_x} = 0$

Nessas condições,

$$F_{S_x} = p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Usando grandezas escalares e abandonando os sinais de valor absoluto, obtemos

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 \qquad (12.31b)$$

ou

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$$

c. Primeira Lei da Termodinâmica

Equação básica:

$$\overset{=0(6)}{\cancel{\dot{Q}}} - \overset{=0(7)}{\cancel{\dot{W}_s}} - \overset{=0(8)}{\cancel{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}}} - \overset{=0(8)}{\cancel{\dot{W}_{\text{outros}}}} = \overset{=0(1)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}}\int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.57)$$

Considerações: (6) $\dot{Q} = 0$ (escoamento adiabático)
(7) $\dot{W}_s = 0$
(8) $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = \dot{W}_{\text{outros}} = 0$
(9) Os efeitos da gravidade são desprezíveis

Então

$$0 = \left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)\{-|\rho_1 V_1 A|\} + \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2}\right)\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Entretanto, da continuidade, os termos de vazão em massa entre chaves são iguais. Também podemos substituir $h = u + pv$ para obter

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \qquad (12.31c)$$

ou, em termos da entalpia de estagnação,

$$h_{0_1} = h_{0_2}$$

Fisicamente, deveríamos esperar que a energia total do escoamento permanecesse constante, visto que não há adição de energia.

d. Segunda Lei da Termodinâmica

Equação básica:

$$\int_{SC} \frac{1}{T}\overset{=0(6)}{\cancel{\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right)}} dA \le \overset{=0(1)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}}\int_{VC} s\rho\, d\forall + \int_{SC} s\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.59)$$

Então

$$0 \le s_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + s_2\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

O escoamento através do choque normal é irreversível por causa das variações quase descontínuas de propriedades através dele. Conseqüentemente, a desigualdade na equação anterior prevalece. A forma da segunda lei para volume de controle nos diz então que $s_2 > s_1$.

Esse fato é de pouco auxílio no cálculo da variação real de entropia através do choque. Para calcular a variação de entropia, recorremos às equações $T\,ds$. Para calores específicos constantes, a equação $T\,ds$ pode ser integrada para dar

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \qquad (12.31d)$$

e. Equação de Estado

Para um gás ideal, a equação de estado é

$$p = \rho RT \qquad (12.31e)$$

As Eqs. 12.31a a 12.31e são as equações governantes para o escoamento de um gás ideal através de um choque normal. Se todas as propriedades no estado ① (imediatamente a montante do choque) forem conhecidas, teremos então seis incógnitas ($T_2, p_2, \rho_2, V_2, h_2, s_2$) nessas cinco equações. No entanto, dispomos da conhecida relação entre h e T para um gás ideal, $dh = c_p dT$. Para um gás ideal com calores específicos constantes,

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p(T_2 - T_1) \qquad (12.31f)$$

Temos, deste modo, a situação de seis equações e seis incógnitas.

Então, se todas as condições no estado ① (imediatamente a montante do choque) forem conhecidas, existe um único estado ② para um dado estado ①.

Podemos obter um quadro físico do escoamento através do choque normal, usando algumas das noções desenvolvidas na análise de escoamentos de linha de Fanno e de linha de Rayleigh. Por conveniência, vamos, primeiramente, reescrever as equações governantes para o choque normal:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \frac{\dot{m}}{A} \qquad (12.31a)$$

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \qquad (12.31b)$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \qquad (12.31c)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \qquad (12.31d)$$

$$p = \rho RT \qquad (12.31e)$$

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) \qquad (12.31f)$$

O escoamento através de um choque normal deve satisfazer as Eqs. 12.31a a 12.31f. Como todas as condições no estado ① são conhecidas, podemos localizá-lo num diagrama Ts. Se desenhássemos uma linha de Fanno passando pelo estado ①, teríamos um lugar geométrico de estados matemáticos que satisfazem às Eqs. 12.31a e 12.31c a 12.31f. (A linha de Fanno não satisfaz à Eq. 12.31b.) Desenhando uma curva de linha de Rayleigh através do estado ② obtemos um lugar geométrico de estados matemáticos que satisfazem às Eqs. 12.31a, 12.31b e 12.31d a 12.31f. (A linha de Rayleigh não satisfaz à Eq. 12.31c.) Essas curvas são mostradas na Fig. 12.18.

O choque normal deve satisfazer a todas as seis equações, de 12.31a a 12.31f. Conseqüentemente, para um dado estado ①, o estado final (estado ②) do choque normal deve situar-se em ambas as linhas, de Fanno e de Rayleigh, que passam pelo estado ①. Por conseguinte, a interseção das duas linhas no estado ②, representa as condições a jusante do choque, correspondentes às condições a montante no estado ①. Na Fig. 12.18, o escoamento através do choque foi indicado como ocorrendo do estado ① para o estado ②. Esse é o único sentido possível para o processo de choque, conforme ditado pela segunda lei ($s_2 > s_1$).

Da Fig. 12.18, notamos também que o escoamento através de um choque normal envolve uma mudança de velocidades supersônicas para subsônicas. Os choques normais só podem ocorrer em escoamentos que são inicialmente supersônicos.

Fig. 12.18 Interseção da linha de Fanno com a linha de Rayleigh como uma solução das equações do choque normal.

Como um auxílio para resumir os efeitos de um choque normal sobre as propriedades do escoamento, um esquema do processo de choque normal é ilustrado no plano Ts da Fig. 12.19. Essa figura, juntamente com as equações básicas governantes, é a base para a Tabela 12.3. Você deve acompanhar a lógica indicada no quadro.

É de interesse notar o paralelo entre os choques normais (Tabela 12.3) e o escoamento supersônico com atrito (Tabela 12.1). Ambos representam processos irreversíveis em escoamento supersônico, e todas as propriedades variam nos mesmos sentidos.

Na teoria, a solução das seis equações com seis incógnitas não apresenta maior dificuldade, mas na prática o algebrismo torna-se complicado. Faz sentido reformular as equações a fim de obter expressões para as razões de propriedades através do choque; isto nós faremos na próxima seção.

Fig. 12.19 Esquema do processo de choque normal no plano Ts.

Tabela 12.3 Resumo de Variações de Propriedades através de um Choque Normal

Propriedade	Efeito	Obtido de:
Temperatura de estagnação, T_0	Constante	Equação de energia
Entropia, s	Aumenta	Segunda lei
Pressão de estagnação, p_0	Diminui	Diagrama Ts
Temperatura, T	Aumenta	Diagrama Ts
Velocidade, V	Diminui	Equação da energia e efeito sobre T
Massa específica, ρ	Aumenta	Equação da continuidade e efeito sobre V
Pressão, p	Aumenta	Equação da quantidade de movimento e efeito sobre V
Número de Mach, M	Diminui	$M = V/c$ e efeitos sobre V e T

12.6.2 Funções de Escoamento de Choque Normal para Escoamento Unidimensional de um Gás Ideal

As equações básicas para um escoamento através de um choque normal indicam que, para condições dadas a montante do choque, há um único estado a jusante. Então, é possível desenvolver expressões para razões entre propriedades através do choque normal em termos de M_1 a montante do choque; esses resultados podem ser apresentados como funções de M_1.

Para obter os resultados, prosseguimos em três etapas. Primeiro, obtemos as razões de propriedades (p. ex., T_2/T_1 e p_2/p_1) em termos de M_1 e M_2. Em seguida, desenvolvemos uma relação entre M_1 e M_2. Finalmente, usamos essa relação para obter expressões para as razões de propriedades em termos do número de Mach a montante, M_1.

A razão de temperaturas pode ser expressa como

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_{0_2}}\frac{T_{0_2}}{T_{0_1}}\frac{T_{0_1}}{T_1}$$

Dado que a temperatura de estagnação é constante através do choque, temos

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2} \tag{12.32a}$$

Uma razão de velocidades pode ser obtida usando-se

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2 c_2}{M_1 c_1} = \frac{M_2}{M_1}\frac{\sqrt{kRT_2}}{\sqrt{kRT_1}} = \frac{M_2}{M_1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

ou

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1}\left[\frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2}\right]^{1/2} \tag{12.32b}$$

Uma razão de massas específicas pode ser obtida da equação da continuidade

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \tag{12.31a}$$

Substituindo da Eq. 12.32b, vem

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2}\left[\frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{1/2} \tag{12.32c}$$

Finalmente, podemos obter uma razão de pressões a partir da equação de quantidade de movimento

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 \tag{12.31b}$$

ou

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$$

Substituindo $\rho = p/RT$, e colocando as pressões em evidência, vem

$$p_1\left[1 + \frac{V_1^2}{RT_1}\right] = p_2\left[1 + \frac{V_2^2}{RT_2}\right]$$

Como

$$\frac{V^2}{RT} = k\frac{V^2}{kRT} = kM^2$$

segue-se que

$$p_1[1 + kM_1^2] = p_2[1 + kM_2^2]$$

Finalmente,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \tag{12.32d}$$

Para resolver para M_2 em termos de M_1, devemos obter uma outra expressão para uma das razões de propriedades dadas pelas Eqs. 12.32a a 12.32d.

Da equação de estado do gás ideal, a razão de temperaturas pode ser escrita

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2/\rho_2 R}{p_1/\rho_1 R} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Substituindo das Eqs. 12.32c e 12.32d, resulta

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}\right]\frac{M_2}{M_1}\left[\frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2}\right]^{1/2} \tag{12.33}$$

As Eqs. 12.32a e 12.33 são duas equações para T_2/T_1. Podemos combiná-las e resolver para M_2 em termos de M_1. Combinando e cancelando, dá

$$\left[\frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2}\right]^{1/2} = \frac{M_2}{M_1}\left[\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}\right]$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$\frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2} = \frac{M_2^2}{M_1^2}\left[\frac{1 + 2kM_1^2 + k^2M_1^4}{1 + 2kM_2^2 + k^2M_2^4}\right]$$

que pode ser resolvida explicitamente para M_2^2. Duas soluções são obtidas:

$$M_2^2 = M_1^2 \tag{12.34a}$$

e

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1}M_1^2 - 1} \tag{12.34b}$$

Obviamente, a primeira dessas soluções é trivial. A segunda expressa a dependência singular de M_2 em relação a M_1.

Agora, tendo uma relação entre M_2 e M_1, podemos resolver para as razões de propriedades através de um choque. Conhecendo M_1, pode-se obter M_2 da Eq. 12.34b; em seguida, as razões de propriedades podem ser determinadas das Eqs. 12.32a a 12.32d.

Uma vez que a temperatura de estagnação permanece constante, a razão de temperaturas através do choque é a unidade. A razão de pressões de estagnação é avaliada como

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{p_{0_2}}{p_2}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p_{0_1}} = \frac{p_2}{p_1}\left[\frac{1+\dfrac{k-1}{2}M_2^2}{1+\dfrac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{k/(k-1)} \tag{12.35}$$

Combinando as Eqs. 12.32d e 12.34b, obtemos (após considerável algebrismo)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2} = \frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \tag{12.36}$$

Usando as Eqs. 12.34b e 12.36, verificamos que a Eq. 12.35 torna-se

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{\left[\dfrac{\dfrac{k+1}{2}M_1^2}{1+\dfrac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{k/(k-1)}}{\left[\dfrac{2k}{k+1}M_1^2 - \dfrac{k-1}{k+1}\right]^{1/(k-1)}} \tag{12.37}$$

O Apêndice E.4 lista funções de escoamento para M_2 e para as razões de propriedades p_{0_2}/p_{0_1}, T_2/T_1, p_2/p_1, e V_2/V_1 em termos de M_1 para escoamento de um gás ideal através de um choque normal. Uns poucos valores representativos dessas razões de propriedades são listados para $k = 1{,}4$. Essas funções são plotadas contra o número de Mach para escoamento de choque normal de um gás ideal com $k = 1{,}4$. O uso dessas funções pode reduzir de forma significativa o trabalho de cálculo.

O programa computacional *FM Software Supplement*, disponível no *web site* da John Wiley, contém um módulo que calcula razões de propriedades para escoamento através de um choque normal. Tanto o número de Mach a montante quanto uma razão de propriedade através do choque podem ser usados como entrada. O programa calcula o número de Mach a jusante e as razões de propriedades restantes. Ele apresenta os pontos de estado a montante e a jusante sobre as interseções das linhas de Fanno e de Rayleigh num diagrama esquemático *Ts*.

Um problema envolvendo um choque normal é ilustrado no Problema-Exemplo 12.10.

EXEMPLO 12.10 — Choque Normal num Duto

Um choque normal ocorre num duto. O fluido é o ar, que pode ser considerado um gás ideal. As propriedades a montante do choque são $T_1 = 5°\text{C}$, $p_1 = 65{,}0$ kPa (abs.) e $V_1 = 668$ m/s. Determine as propriedades a jusante e $s_2 - s_1$. Esquematize o processo num diagrama *Ts*.

PROBLEMA-EXEMPLO 12.10

DADOS: Choque normal num duto, conforme mostrado:

$T_1 = 5°\text{C}$
$p_1 = 65{,}0$ kPa (abs.)
$V_1 = 668$ m/s

DETERMINAR: (a) Propriedades na seção ②.
(b) $s_2 - s_1$.
(c) Diagrama *Ts*.

SOLUÇÃO:

Primeiramente, calcule as propriedades na seção ①. Para um gás ideal,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 6{,}5 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{278\ \text{K}} = 0{,}815\ \text{kg/m}^3$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \left[1{,}4 \times 287\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 278\ \text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 334\ \text{m/s}$$

Então

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{668}{334} = 2{,}00, \text{ e}$$

$$T_{0_1} = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right) = 278 \text{ K}\left[1 + 0{,}2(2{,}0)^2\right] = 500 \text{ K}$$

$$p_{0_1} = p_1\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)^{k/(k-1)} = 65{,}0 \text{ kPa}[1 + 0{,}2(2{,}0)^2]^{3{,}5} = 509 \text{ kPa (abs)}$$

A partir das funções de escoamento de choque normal do Apêndice E.3 para $M_1 = 2{,}0$,

M_1	M_2	p_{0_2}/p_{0_1}	T_2/T_1	p_2/p_1	V_2/V_1
2,00	0,5774	0,7209	1,687	4,500	0,3750

Desses dados,

$$T_2 = 1{,}687T_1 = (1{,}687)278 \text{ K} = 469 \text{ K} \qquad \longleftarrow T_2$$

$$p_2 = 4{,}500p_1 = (4{,}500)65{,}0 \text{ kPa} = 293 \text{ kPa (abs)} \qquad \longleftarrow p_2$$

$$V_2 = 0{,}3750V_1 = (0{,}3750)668 \text{ m/s} = 251 \text{ m/s} \qquad \longleftarrow V_2$$

Para um gás ideal,

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 2{,}93 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287 \text{ N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{469 \text{ K}} = 2{,}18 \text{ kg/m}^3 \qquad \longleftarrow \rho_2$$

A temperatura de estagnação é constante no escoamento adiabático. Portanto

$$T_{0_2} = T_{0_1} = 500 \text{ K} \qquad \longleftarrow T_{0_2}$$

Usando as razões de propriedades para um choque normal, obtemos

$$p_{0_2} = p_{0_1}\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = 509 \text{ kPa}\,(0{,}7209) = 367 \text{ kPa (abs)} \qquad \longleftarrow p_{0_2}$$

A variação de entropia através do choque pode ser determinada da equação $T\,ds$, a qual para calores específicos constantes é

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}$$

Mas $s_{0_2} - s_{0_1} = s_2 - s_1$, logo

$$s_{0_2} - s_{0_1} = s_2 - s_1 = c_p \ln\overbrace{\frac{T_{0_2}}{T_{0_1}}}^{=0} - R\ln\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = -0{,}287\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times \ln(0{,}7209)$$

$$s_2 - s_1 = 0{,}0939 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)} \qquad \longleftarrow s_2 - s_1$$

O diagrama *Ts* é

Quando utilizar funções de escoamento de choque normal, seja cuidadoso na verificação do desenvolvimento do seu trabalho. Examine cada resultado calculado a fim de certificar-se de que tanto a tendência quanto a ordem de grandeza são razoáveis. Esse processo de verificação é simplificado quando você desenha um diagrama *Ts* para cada problema.

12.7 ESCOAMENTO SUPERSÔNICO EM DUTOS, COM CHOQUE

O escoamento supersônico é uma condição necessária para que o choque normal ocorra. A possibilidade de um choque normal deve ser considerada em qualquer escoamento supersônico. Algumas vezes, um choque *deve* acontecer para ajustar uma condição de pressão a jusante; convém determinar se um choque ocorrerá e a sua localização, quando ele ocorrer.

Na Seção 12.6.1, mostramos que a pressão de estagnação diminui notavelmente através de um choque: quanto mais intenso for o choque, maior será o decréscimo na pressão de estagnação. É necessário controlar a posição do choque para obter desempenho aceitável de um difusor supersônico ou de um túnel de vento supersônico.

O propósito desta seção é considerar escoamentos supersônicos em dutos, com choques. Escoamentos com variação de área, atrito e adição de calor são considerados. Operações de difusores supersônicos e de túneis de vento supersônicos são descritas.

12.7.1 Escoamento num Bocal Convergente-Divergente

Visto que os choques normais já foram considerados, podemos agora completar nossa discussão de escoamento num bocal convergente-divergente operando sob contrapressões variáveis, iniciada na Seção 12.3.5. A distribuição de pressão através do bocal, para diferentes contrapressões, é mostrada na Fig. 12.20.

Quatro regimes de escoamento são possíveis. No Regime I, o escoamento é totalmente subsônico. A vazão em massa aumenta com o decréscimo da contrapressão. Na condição (*iii*), que forma a linha divisória entre os Regimes I e II, o escoamento na garganta é sônico, $M_t = 1$.

À medida que a contrapressão é reduzida abaixo da condição (*iii*), um choque normal aparece a jusante da garganta. Há um aumento de pressão através do choque. Como o escoamento é subsônico ($M < 1$) a jusante do choque, ocorre uma desaceleração, acompanhada de um aumento de pressão, através do duto divergente. Quando a contrapressão é reduzida mais ainda, o choque move-se a jusante até aparecer no plano de saída (condição *vii*). No Regime II, assim como no Regime I, o escoamento de saída é subsônico e, conseqüentemente, $p_e = p_b$. Como as propriedades do escoamento na garganta são constantes para todas as condições no Regime II, a vazão em massa no Regime II não varia com a contrapressão.

No Regime III, conforme exemplificado pela condição (*viii*), a contrapressão é mais alta do que a pressão de saída, mas não o suficiente para manter um choque normal no plano de saída. O escoamento ajusta-se para a contrapressão através de uma série de choques de compressão oblíquos fora do bocal; esses choques oblíquos não podem ser tratados pela teoria unidimensional.

Conforme previamente assinalado na Seção 12.3.5, a condição (*iv*) representa a condição de projeto. No Regime IV, o escoamento ajusta-se para a contrapressão mais baixa através de uma série de ondas de expansão oblíquas fora do bocal; essas ondas não podem ser tratadas pela teoria unidimensional.

O diagrama *Ts* para escoamento em bocal convergente-divergente com um choque normal é mostrado na Fig. 12.21; o estado ① está localizado imediatamente a montante do choque e o estado ② imediatamente a jusante. O aumento de entropia através do choque move o escoamento subsônico a jusante para uma nova linha isoentrópica. A temperatura crítica é constante, de modo que p_2^* é menor que p_1^*. Como $\rho^* = p^*/RT^*$, a massa específica crítica a jusante também é reduzida. Para transportar a mesma vazão em massa, o escoamento a jusante deve ter uma área crítica maior. Da continuidade (e da equação de estado), a razão de área crítica é o inverso da razão de pressão crítica, i.e., através de um choque, $p^*A^* =$ constante.

Se o número de Mach (ou posição) do choque normal no bocal for conhecido, a pressão no plano de saída pode ser calculada diretamente. Na situação mais realista, a pressão no plano de saída é especificada e a posição e intensidade do choque são desconhecidas. Este problema pode ser resolvido por iteração [2]. O escoamento subsônico a jusante deve deixar o bocal na pressão da região de descarga, de modo que $p_b = p_e$. Logo

$$\frac{p_b}{p_{0_1}} = \frac{p_e}{p_{0_1}} = \frac{p_e}{p_{0_2}}\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{p_e}{p_{0_2}}\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{p_e}{p_{0_2}}\frac{A_t}{A_e}\frac{A_e}{A_2^*} \quad (12.38)$$

O lado esquerdo da Eq. 12.38 é dado. O lado direito é uma função do número de Mach de saída, apenas: p_e/p_{0_2} é obtida da relação de estagnação isoentrópica local, Eq. 11.17a, A_t/A_e é conhecida da geometria do bocal, e A_e/A_2^* é obtida da Eq. 12.6.

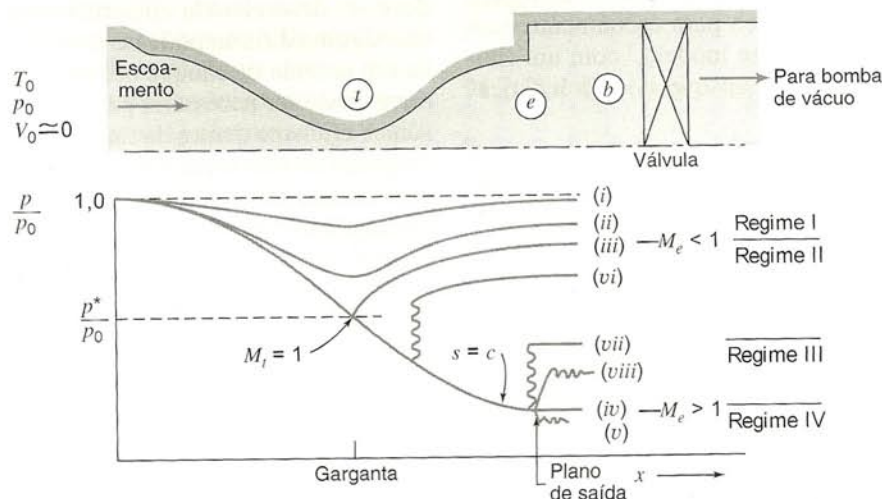



Fig. 12.20 Distribuições de pressão para escoamento num bocal convergente-divergente para diferentes contrapressões.

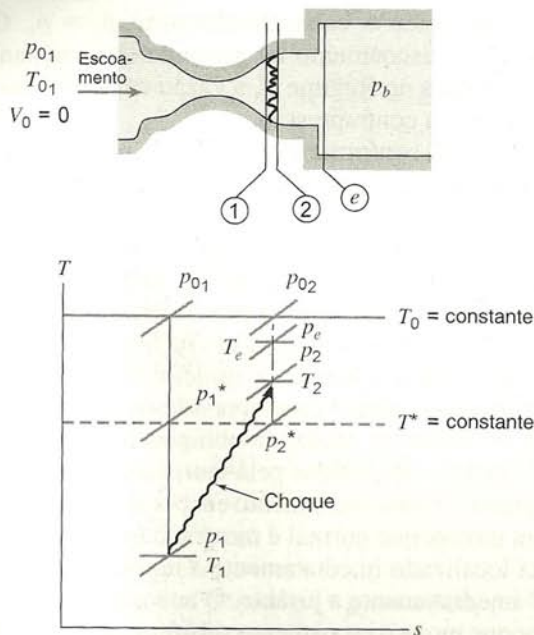



Fig. 12.21 Diagrama *Ts* esquemático para escoamento em um bocal convergente-divergente com um choque normal.

Fig. 12.22 Diagrama *Ts* esquemático para escoamento num difusor supersônico com um choque normal.

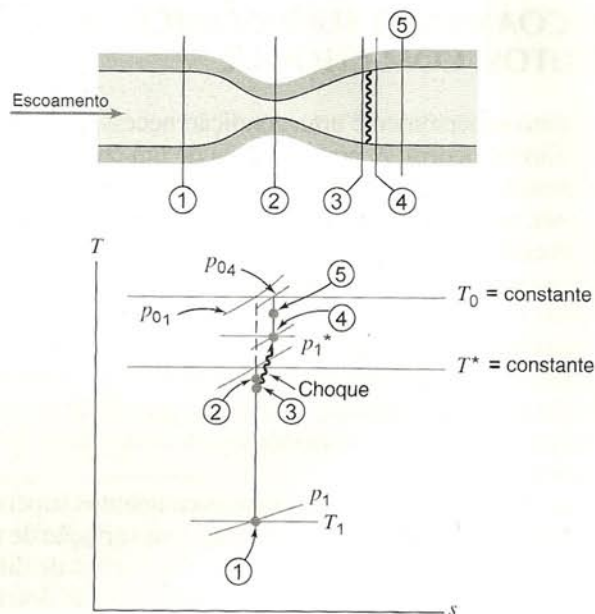
Iterações podem ser necessárias para resolver para M_e. O programa computacional *FM Software Supplement*, disponível no *web site* da John Wiley, contém um módulo que calcula o escoamento em um bocal convergente-divergente com choque normal. O programa calcula o local do choque normal e ilustra a posição do choque em um diagrama esquemático do bocal. A contrapressão pode ser variada para mudar a localização do choque. Um programa para microcomputador para calcular e plotar distribuições de pressão e número de Mach em um bocal C-D é dado em [1].

*12.7.2 Difusor Supersônico

A análise dos efeitos de variação da área no escoamento isoentrópico (Seção 12.2) mostrou que um canal convergente reduz a velocidade de uma corrente supersônica; um canal convergente é um *difusor supersônico*. Como resultado da diminuição de velocidade, a pressão aumenta no sentido do escoamento, criando um gradiente de pressão adverso. O escoamento isoentrópico não é um modelo inteiramente preciso para escoamento com gradiente de pressão adverso, mas esse modelo,[3] com um choque normal, pode ser usado para demonstrar as características básicas da difusão supersônica.

Para escoamento isoentrópico, um choque não pode permanecer numa posição estável numa passagem convergente; um choque pode permanecer estável somente numa passagem divergente. O escoamento real próximo de $M = 1$ é instável, de modo que não é possível reduzir um escoamento supersônico exatamente à velocidade sônica. O número de Mach mínimo que pode ser atingido numa garganta é 1,2 a 1,3.

* Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

[3] Camadas limites desenvolvem-se rapidamente com gradiente de pressão adverso, portanto, efeitos viscosos podem ser importantes ou mesmo dominantes. Na presença de camadas limites grossas, escoamentos supersônicos em difusores podem formar sistemas complicados de choques oblíquos e normais.

Portanto, em difusores supersônicos reais, o escoamento é desacelerado para $M \approx 1{,}3$ numa passagem convergente. A jusante da seção de área mínima da garganta, é permitido ao escoamento acelerar-se para $M \approx 1{,}4$, onde um choque normal ocorre. Para esse número de Mach, a perda em pressão de estagnação é de cerca de 4% apenas (funções de escoamento de choques normais, Apêndice E.4). Essa pequena perda é um compromisso aceitável em troca da estabilidade do escoamento.

A Fig. 12.22 mostra o processo idealizado da difusão supersônica, na qual o escoamento é isoentrópico exceto através de um choque normal. A ligeira redução na pressão de estagnação ocorre, totalmente, através do choque.

No escoamento real, perdas adicionais na pressão de estagnação ocorrem durante os processos de difusão subsônica e supersônica, antes e depois do choque. Dados experimentais devem ser utilizados para prever perdas reais nos difusores supersônicos e subsônicos [3, 4].

A difusão supersônica também é importante para aviões de alta velocidade, onde uma corrente livre externa, supersônica, deve ser desacelerada eficientemente para velocidade subsônica. Alguma difusão pode ocorrer fora da tomada de ar por meio de um sistema de choque oblíquo fraco [5]. Uma geometria variável pode ser necessária para se conseguir uma difusão supersônica eficiente dentro da tomada de ar, à medida que o número de Mach do vôo varia. Os escoamentos compressíveis multidimensionais, embora fora do escopo deste livro, são abordados em detalhes em outras fontes bibliográficas [6, 7].

*12.7.3 Operação de Túnel de Vento Supersônico

Para construir um túnel de vento supersônico eficiente é necessário entender o comportamento do choque e controlar a sua lo-

* Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

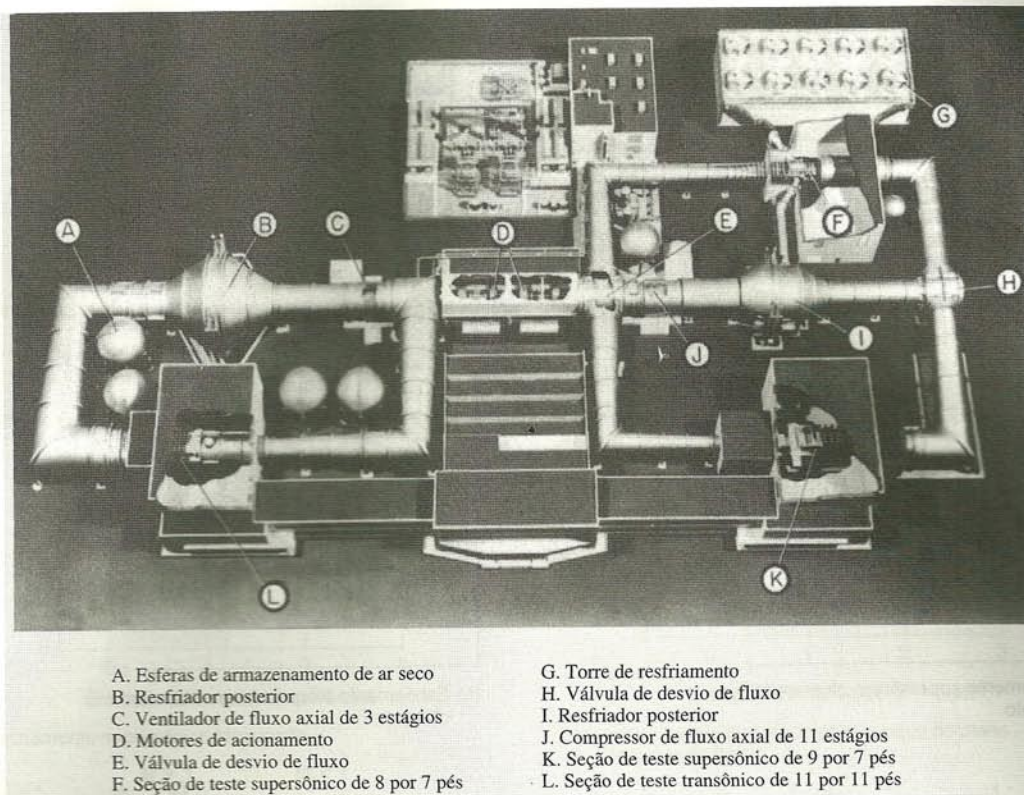



Fig. 12.23 Vista esquemática do túnel de vento de alta velocidade da NASA-Ames, de circuito fechado, com instalações de apoio [9]. (A fotografia é cortesia da NASA.)

calização. Os fenômenos físicos básicos são descritos por Coles no filme da NCFMF *Channel Flow of a Compressible Fluid* [8]. Além do *bloqueio* — escoamento sônico numa garganta, com condições de montante independentes das condições de jusante —, Coles discute condições de partida e de obstrução dos túneis de vento supersônicos.

Um túnel de vento supersônico de circuito fechado deve ter um bocal convergente-divergente para acelerar o escoamento à velocidade supersônica, seguido de uma seção de teste de área aproximadamente constante que, por sua vez, é seguida de um difusor supersônico com uma segunda garganta. O circuito deve ser completado pela maquinaria de compressão, resfriadores e dispositivos de controle do escoamento, conforme mostrado na Fig. 12.23 [9].

Considere o processo de acelerar o escoamento, do repouso à velocidade supersônica, na seção de teste. Logo depois que o escoamento na garganta do bocal torna-se sônico, uma onda de choque forma-se na porção divergente. O choque atinge a sua máxima intensidade quando alcança o plano de saída do bocal. Conseqüentemente, para *dar partida* no túnel e obter escoamento supersônico permanente na seção de teste, o choque deve mover-se através da segunda garganta e para dentro do difusor subsônico. Quando isto ocorre, dizemos que o choque foi *engolido* pela segunda garganta. Assim, para dar partida no túnel, a garganta do difusor subsônico deve ser maior do que a do bocal. A segunda garganta deve ser grande o suficiente para exceder a área crítica para escoamento a jusante a partir do choque mais intenso possível.

A *obstrução* ocorre quando a segunda garganta não é grande o suficiente para engolir o choque. Quando o canal é obstruído, o escoamento é sônico em ambas as gargantas e subsônico na seção de teste; o escoamento na seção de teste não pode ser controlado pela variação das condições a jusante do difusor.

Quando o túnel está *funcionando*, não há choque no bocal ou na seção de teste, de modo que a dissipação de energia é muito reduzida. A área da segunda garganta pode ser reduzida ligeiramente durante o funcionamento a fim de melhorar a eficiência do difusor. A razão de compressão do compressor pode ser ajustada para deslocar o choque no difusor supersônico para um número de Mach mais baixo. Uma combinação de segunda garganta ajustável e controle de razão de compressão pode ser usada para alcançar condições ótimas de funcionamento do túnel. Pequenas diferenças na eficiência são importantes quando o sistema de acionamento do túnel pode consumir mais de meio milhão de quilowatts [10]!

*12.7.4 Duto de Seção Constante com Atrito

O escoamento num duto de área constante, com atrito, é dominado pelos efeitos viscosos. Mesmo quando o escoamento principal é supersônico, a condição de não deslizamento na parede do canal garante escoamento subsônico perto dela. Conseqüentemente, o escoamento supersônico em dutos de área constante pode formar sistemas complicados de choques normais e oblíquos. Contudo, o comportamento básico do escoamento supersônico adiabático num duto de área constante, com atrito, é revelado considerando-se o caso mais simples de formação de choque normal no escoamento de linha de Fanno.

---

* Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

(*a*) Escoamento supersônico bloqueado em duto.

(*b*) Escoamento bloqueado em duto com choque.

(*c*) Escoamento bloqueado com choque no plano de saída do bocal.

(*d*) Escoamento bloqueado com choque no bocal; escoamento subsônico no duto.

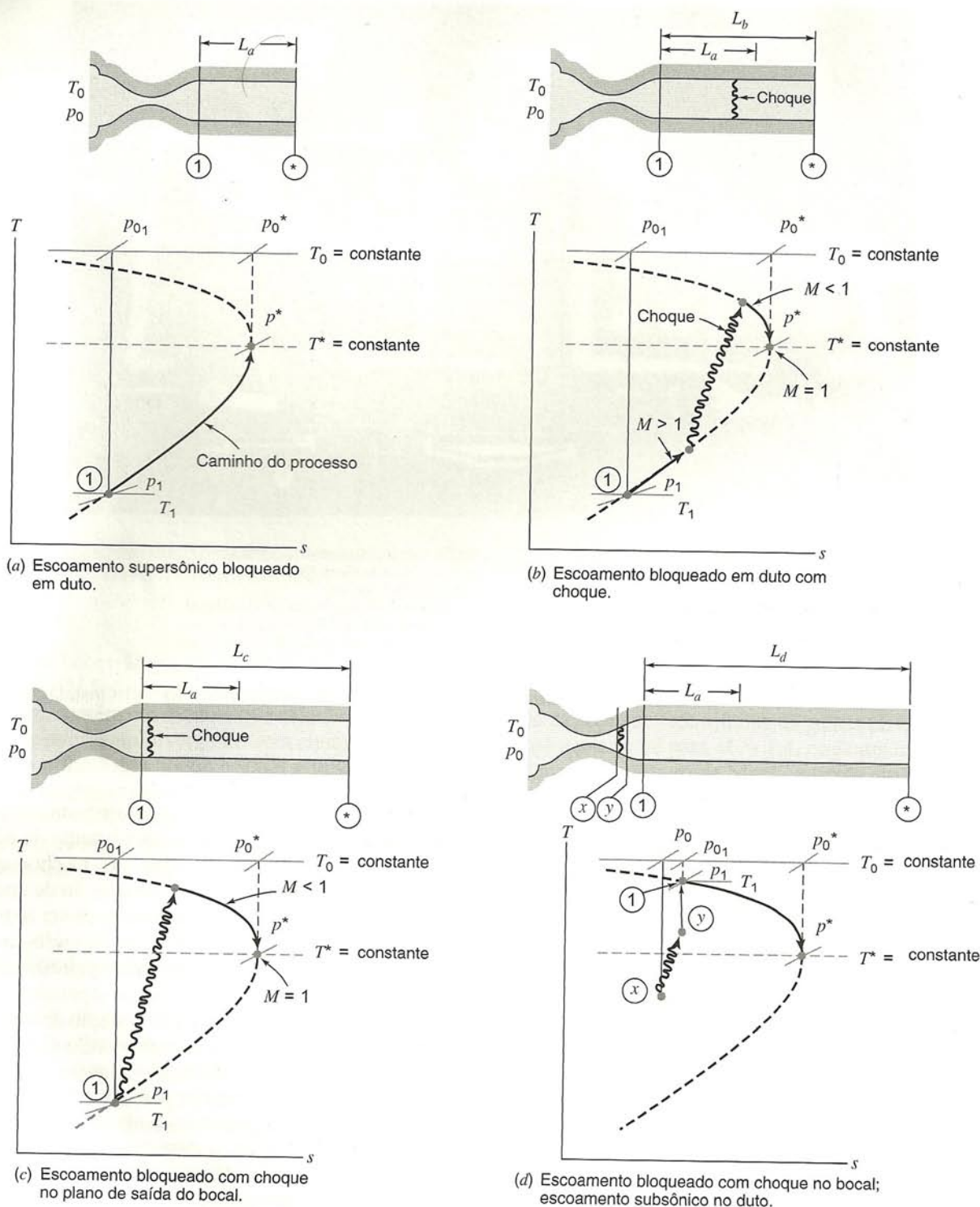



Fig. 12.24 Diagramas *Ts* esquemáticos para escoamentos supersônicos de linha de Fanno com choques normais.

O escoamento supersônico segundo a linha de Fanno torna-se bloqueado após um pequeno trecho de duto apenas, porque os efeitos do atrito são pronunciados a altas velocidades. A Fig. E.2 (Apêndice E) mostra que o valor limite de $\bar{f}L_{\text{máx}}/D_h$ é menor que um; os escoamentos subsônicos podem ter percursos muito mais longos. Assim, quando o bloqueio resulta do atrito e o comprimento do duto é aumentado mais ainda, o escoamento supersônico torna-se subsônico pelo choque para ajustar-se às condições de jusante.

Os diagramas *Ts* nas Figs. 12.24*a* a 12.24*d* ilustram o que acontece quando é aumentado o comprimento de um duto de área constante, alimentado por um bocal convergente-divergente que é suprido por um reservatório com condições de estagnação constantes. O escoamento supersônico sobre a linha de Fanno da Fig. 12.24*a* é bloqueado por atrito quando o comprimento do duto é L_a. Quando mais duto é adicionado para produzir $L_b > L_a$, Fig. 12.24*b*, um choque normal aparece. O escoamento a montante do choque não muda porque é supersônico (nenhuma mudança nas condições a jusante pode afetar o escoamento supersônico antes do choque).

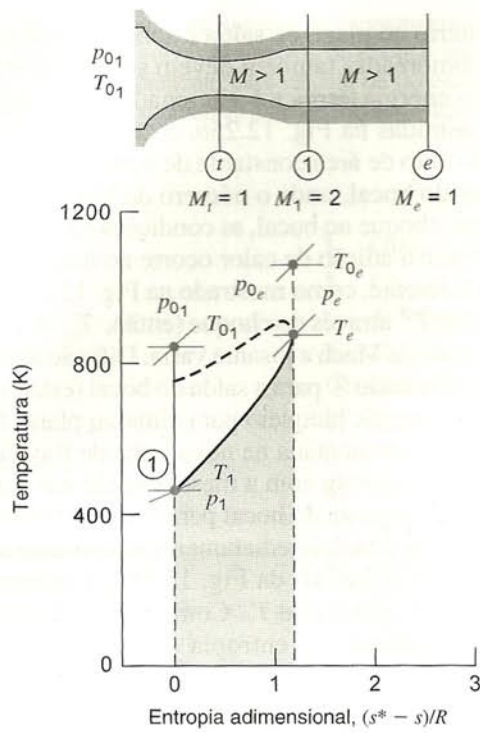
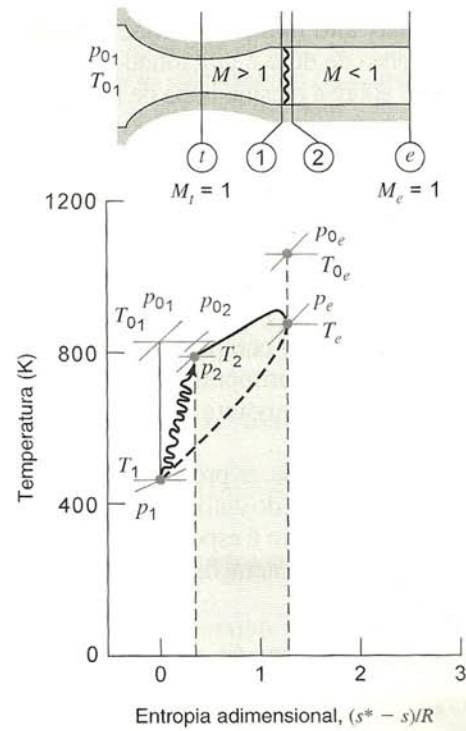
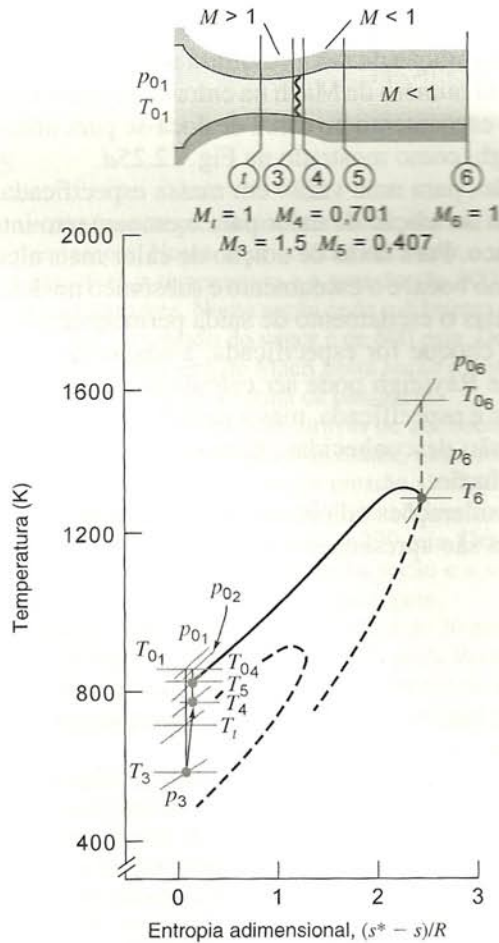
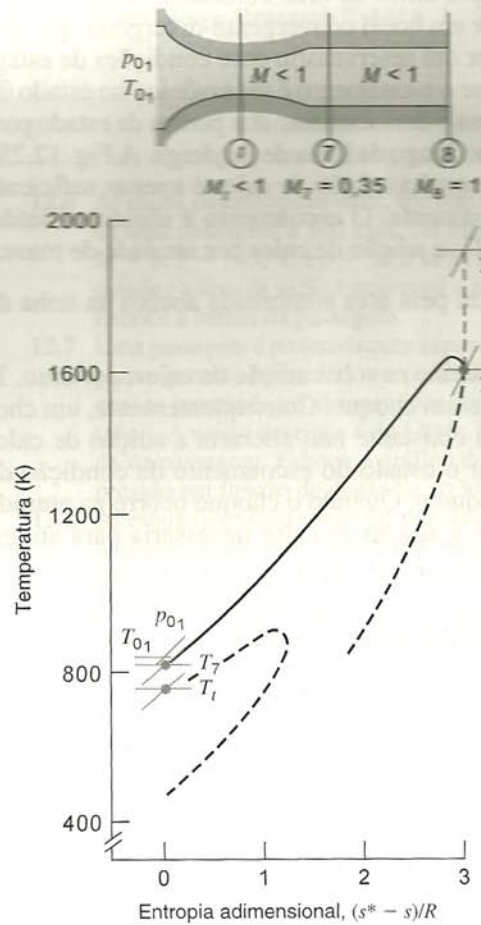
Na Fig. 12.24*b*, o choque é mostrado em uma posição arbitrária. O choque move-se em direção à entrada do duto de área

(*a*) Escoamento supersônico bloqueado.

(*b*) Escoamento bloqueado com choque no plano de saída do bocal.

(*c*) Escoamento bloqueado com choque no bocal; mesma vazão em massa, mas o escoamento desloca-se para uma nova linha de Rayleigh.

(*d*) Escoamento inteiramente subsônico; vazão em massa diminuída e escoamento deslocado para uma outra nova linha de Rayleigh.

Fig. 12.25 Diagramas *Ts* esquemáticos para escoamentos supersônicos de linha de Rayleigh com choques normais.

constante (no sentido do mais alto número de Mach inicial), à medida que mais comprimento de duto é adicionado.

O escoamento permanece sobre a mesma linha de Fanno à medida que o choque é dirigido para montante, para o estado ①, pela adição de comprimento ao duto; dessa forma, a vazão em massa permanece sem variação. O comprimento de duto, L_c, que move o choque para dentro do plano de entrada do duto, Fig. 12.24*c*, pode ser calculado diretamente usando-se os métodos da Seção 12.4.3.

Quando o comprimento do duto excede L_c, o choque é guiado de volta para dentro do bocal C-D, Fig. 12.24*d*. A vazão em massa permanece constante até que o choque atinja a garganta do bocal. Somente quando mais comprimento de duto é adicionado, depois que o choque atinge a garganta, é que a vazão em massa diminui.

Se a posição do choque for conhecida, as propriedades do escoamento em cada seção e o comprimento do duto podem ser calculados diretamente. Quando o comprimento é especificado e a localização do choque deve ser determinada, iterações são necessárias.

*12.7.5 Duto de Seção Constante com Adição de Calor

A Fig. 12.25*a* mostra um escoamento supersônico com adição de calor num duto sem atrito de área constante. Admita que o duto é alimentado por um bocal convergente-divergente que, por sua vez, é suprido por um reservatório com condições de estagnação constantes e que o escoamento é supersônico no estado ①. A adição de calor causa o deslocamento dos pontos de estado para cima e para a direita ao longo da linha de Rayleigh. A Fig. 12.25*a* ilustra a condição na qual a adição de calor é apenas suficiente para bloquear o escoamento. O escoamento é sônico na saída, logo $p_e = p^*$ e $T_e = T^*$; a adição de calor por unidade de massa, $\int_{s1}^{se} T\,ds$, é representada pela área sombreada abaixo da linha de Rayleigh.

Um choque normal não envolve adição de calor; portanto, T_0 é constante através de um choque. Conseqüentemente, um choque no canal de área constante não alteraria a adição de calor requerida para mudar o estado do escoamento da condição de entrada para a de bloqueio. Quando o choque ocorre na entrada do duto, Fig. 12.25*b*, a adição de calor necessária para atingir Mach unitário no plano de saída é a mesma que na Fig. 12.25*a*; as áreas sombreadas também devem ser idênticas.

Se mais energia térmica é adicionada ao escoamento nas condições mostradas na Fig. 12.25*b*, o choque será empurrado da entrada do duto de área constante de volta para dentro da porção divergente do bocal, onde o número de Mach é menor.

Com um choque no bocal, as condições na entrada do duto são modificadas e a adição de calor ocorre ao longo de uma linha de Rayleigh diferente, como mostrado na Fig. 12.25*c*. Não há variação em T_0 ou T^* através do choque (então, $T_{0_3} = T_{0_4}$ e $T_3^* = T_4^*$), mas o número de Mach a jusante varia. Difusão subsônica adicional ocorre do estado ④ para a saída do bocal (estado ⑤), movendo então a condição de bloqueio para cima no plano *Ts*, permitindo adição de calor aumentada na nova linha de Rayleigh. Todas essas mudanças ocorrem com a mesma vazão em massa porque as condições na garganta do bocal permanecem invariáveis.

O número de Mach imediatamente a montante do choque (estado ③) é menor que M_1 da Fig. 12.25*b*; a temperatura correspondente, T_3, é maior que T_1. Como a intensidade do choque é reduzida, o aumento de entropia através do choque é menor, $(s_4 - s_3) < (s_2 - s_1)$. A difusão subsônica que se segue ao choque acarreta um número de Mach inferior e uma temperatura superior na entrada do duto. Por conseguinte, $M_5 < M_2$ e $T_5 > T_2$.

Quando a taxa de adição de calor é aumentada o suficiente para dirigir o choque para a garganta do bocal, um posterior aumento de adição de calor resultará num decréscimo na vazão em massa. O número de Mach na entrada do canal é reduzido, $M_7 < M_5$, e o escoamento no canal desloca-se para uma outra linha de Rayleigh, como mostrado na Fig. 12.25*d*.

Então, para uma vazão em massa especificada, há uma taxa máxima de adição de calor para o escoamento inteiramente supersônico. Para taxas de adição de calor mais altas, um choque ocorre no bocal e o escoamento é subsônico no duto de área constante, mas o escoamento de saída permanece sônico. Se a posição do choque for especificada, a adição de calor ao longo da linha de Rayleigh pode ser calculada diretamente. Se a adição de calor é especificada, mas a posição do choque ou a vazão em massa são desconhecidas, iterações são necessárias para obter uma solução.

Considerações adicionais sobre escoamentos com ondas de choques são apresentadas em [11].

12.8 RESUMO DOS OBJETIVOS

Ao completar o estudo do Cap. 12, você deverá ser capaz de:

1. Escrever as equações básicas para escoamento unidimensional isoentrópico, em regime permanente, de (a) qualquer fluido compressível e (b) um gás ideal, através de um canal de seção transversal arbitrária. Usar essas equações, juntamente com o gráfico *Ts* apropriado, para resolver problemas de escoamento isoentrópico.
2. Determinar o efeito da variação de área nas propriedades do fluido em escoamento isoentrópico. Esboçar formas de passagem de escoamento para bocal subsônico, difusor subsônico, bocal supersônico e difusor supersônico.
3. Para escoamento em (a) um bocal convergente e (b) um bocal convergente-divergente, plotar a distribuição de pressão através do bocal para diferentes contrapressões. Enunciar as condições sob as quais o bocal é bloqueado.
4. Escrever as equações básicas para escoamento unidimensional adiabático, em regime permanente, de um gás ideal. Usar essas equações, juntamente com as funções de escoamento e o gráfico *Ts* apropriados, para resolver problemas de escoamento isoentrópico.
5. Escrever as equações básicas para escoamento unidimensional sem atrito, em regime permanente, de um gás ideal com calores específicos constantes através de um duto de área constante. Usar essas equações, juntamente com o gráfico *Ts* apropriado, para resolver problemas de escoamento de linha de Fanno.
6. Escrever as equações básicas para escoamento unidimensional sem atrito, em regime permanente, de um gás ideal com troca de calor através de um duto de área constante. Usar essas equações, juntamente com o gráfico *Ts* apropriado, para resolver problemas de escoamento de Rayleigh.
7. Escrever as equações básicas para o escoamento unidimensional permanente de um gás ideal através de um choque normal. Usar essas

---

* Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

equações, juntamente com as funções de escoamento e o gráfico *Ts* apropriados, para resolver problemas de choque normal.

* **8.** Usar as funções de escoamento para cálculo de (a) escoamento de linha de Fanno e (b) escoamento de linha de Rayleigh de um gás ideal.

***9.** Descrever as principais características de escoamentos supersônicos em dutos com choques normais.

10. Resolver os problemas no final do capítulo que se relacionam com o material que você estudou.

REFERÊNCIAS

1. Olfe, D. B., *Fluid Mechanics Programs for the IBM PC*. New York: McGraw-Hill, 1987.
2. Chapman, A. J., and W. F. Walker, *Introductory Gas Dynamics*. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1971.
3. Hermann, R., *Supersonic Inlet Diffusers*. Minneapolis, MN: Minneapolis-Honeywell Regulator Co., Aeronautical Division, 1956.
4. Runstadler, P.W., Jr., "Diffuser Data Book," Creare, Inc., Hanover, NH, Technical Note 186, 1975.
5. Seddon, J., and E. L. Goldsmith, *Intake Aerodynamics*. New York: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1985.
6. Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Vol. 1. New York: Ronald Press, 1953.
7. Zucrow, M. J., and J. D. Hoffman, *Compressible Flow*, Vol. 1. New York: Wiley, 1976.
8. Coles, D., *Channel Flow of a Compressible Fluid*, NCFMF video.
9. Baals, D. W., and W. R. Corliss, *Wind Tunnels of NASA*. Washington, D. C.: National Aeronautics and Space Administration, SP-440, 1981.
10. Pope, A., and K. L. Goin, *High-Speed Wind Tunnel Testing*. New York: Krieger, 1978.
11. Glass, I.I., "Some Aspects of Shock-Wave Research," *AIAA J., 25*, 2, February 1987, pp. 214–229.

PROBLEMAS

12.1 Vapor escoa isoentropicamente através de um bocal, em regime permanente. Numa seção a montante, onde a velocidade é desprezível, a temperatura e a pressão são 900°F e 900 psia, respectivamente. Numa seção onde o diâmetro do bocal é de 0,188 pol., a pressão do vapor é de 600 psia. Determine a velocidade e o número de Mach nesta seção e a vazão em massa de vapor. Esboce a forma da passagem.

12.2 Vapor escoa isoentropicamente através de um bocal, em regime permanente. Numa seção a montante, onde a velocidade é desprezível, a temperatura e a pressão são 880°F e 875 psia, respectivamente. Numa seção onde o diâmetro do bocal é de 0,50 pol., a pressão do vapor é de 290 psia. Determine a velocidade e o número de Mach nesta seção e a vazão em massa de vapor. Esboce a forma da passagem.

12.3 Em uma seção numa passagem, a pressão é de 30 psia, a temperatura é de 90°F e a velocidade é de 575 pés/s. Para o escoamento isoentrópico de ar, determine o número de Mach no ponto onde a pressão é de 12 psia. Esboce a forma da passagem.

12.4 Ar escoa isoentropicamente através de uma passagem, em regime permanente. Na seção ①, onde a área transversal é de 0,02 m², o ar está a 40,0 kPa (abs.), 60°C e $M = 2{,}0$. Na seção ②, a jusante, a velocidade é de 519 m/s. Calcule o número de Mach na seção ②. Esboce a forma da passagem entre as seções ① e ②.

12.5 Ar, a uma pressão absoluta de 60,0 kPa e 27°C, entra numa passagem a 486 m/s, onde $A = 0{,}02$ m². Na seção ②, a jusante, $p = 78{,}8$ kPa (abs.). Admitindo escoamento isoentrópico, calcule o número de Mach na seção ②. Esboce a forma da passagem.

12.6 Ar escoa isoentropicamente, em regime permanente, através de uma passagem a 100 kg/s. Na seção onde $A = 0{,}464$ m², $M = 3$, $T = -60$°C e $p = 15{,}0$ kPa (abs.). Determine a velocidade e a área da seção transversal a jusante, onde $T = 138$°C. Esboce a forma da passagem.

12.7 Uma passagem é projetada para expandir ar isoentropicamente para a pressão atmosférica a partir de um grande tanque no qual as propriedades são mantidas constantes a 5°C e 304 kPa (abs.). A vazão desejada é de 1 kg/s. Determine a área de saída da passagem. Esboce o gráfico do número de Mach e da pressão em função da distância ao longo da passagem.

12.8 Ar escoa isoentropicamente, através de um bocal convergente, para o interior de um recipiente onde a pressão é de 240 kPa. O ar entra no bocal com velocidade desprezível a uma pressão de 406 kPa (abs.) e uma temperatura de 95°C. Determine a vazão através do bocal para uma área de garganta de 0,01 m².

12.9 Ar escoa isoentropicamente, através de um bocal convergente, para o interior de um recipiente onde a pressão é de 33 psia. Se a pressão for de 50 psia e a velocidade de 500 pés/s no ponto do bocal em que o número de Mach é 0,4, determine a pressão, a velocidade e o número de Mach na garganta do bocal.

12.10 Ar escoando isoentropicamente através de um bocal convergente descarrega para a atmosfera. Na seção onde a pressão absoluta é de 179 kPa, a temperatura é de 39°C e a velocidade do ar é de 177 m/s. Determine a pressão na garganta do bocal.

12.11 Ar escoa de um grande tanque ($p = 650$ kPa (abs.), $T = 550$°C) através de um bocal convergente com uma área de garganta de 600 mm² e descarrega para a atmosfera. Determine a vazão em massa do escoamento isoentrópico através do bocal.

12.12 Ar, com $p_0 = 650$ kPa (abs.) e $T_0 = 350$ K, escoa isoentropicamente através de um bocal convergente. Na seção em que a área do bocal é de $2{,}6 \times 10^{-3}$ m², o número de Mach é 0,5.

* Estes objetivos aplicam-se às seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

O bocal descarrega para uma região com pressão de 270 kPa (abs.). Determine a área de saída do bocal.

12.13 Um pequeno motor a ignição por centelha é testado em condição atmosférica padrão. Em marcha lenta, o consumo de ar é 0,35 kg/min; a pressão no coletor de admissão é de 635 mm Hg (vácuo). Determine a área de escoamento do carburador.

12.14 Um bocal convergente é conectado a um grande tanque que contém ar comprimido a 75°F. A área de saída do bocal é de 1,5 pol². A descarga se dá para a atmosfera. Para obter uma fotografia *shadow* satisfatória da configuração do escoamento deixando o bocal, é necessário que a pressão no plano de saída seja superior a 45 psig. Que pressão é requerida no tanque? Que vazão mássica de ar deve ser suprida para o sistema funcionar continuamente? Mostre os pontos de estado estático e de estagnação num diagrama *Ts*.

12.15 Um grande tanque supre ar para um bocal convergente que descarrega para a pressão atmosférica. Admita que o escoamento é reversível e adiabático. Para qual faixa de pressões no tanque o escoamento na saída do bocal será sônico? Se a pressão no tanque for de 600 kPa (abs.) e a temperatura de 600 K, determine a vazão em massa através do bocal, se a área de saída for de $1,29 \times 10^{-3}$ m².

12.16 Um grande tanque é inicialmente evacuado a 27 pol. de Hg (vácuo). (As condições ambientes são 29,4 pol. e 70°F.) Em $t = 0$, um orifício de 0,25 pol. de diâmetro é aberto na parede do tanque; a área da veia contraída é 65% da área geométrica. Calcule a vazão em massa na qual o ar entra inicialmente no tanque. Mostre o processo num diagrama *Ts*. Faça um gráfico esquemático da vazão em massa como função do tempo. Explique por que a relação é não linear.

12.17 Ar escoa com vazão de 0,5 lbm/s em um duto de área $A = 1,0$ pol.² As propriedades em um ponto no escoamento são $M_1 = 0,6$ e $p_1 = 30$ psia. Se a área da seção transversal fosse reduzida continuamente a jusante, como a vazão mássica através da passagem variaria com a área a jusante, para escoamento isoentrópico? Faça um desenho esquemático. Determine a menor área permitida a jusante para a qual a vazão mássica através do duto não decresce. Qual é a pressão no local dessa área a jusante?

12.18 Uma cavidade esférica com 18 pol. de diâmetro é inicialmente evacuada. A cavidade deve ser preenchida com ar para uma experiência de combustão. A pressão deve ser de 5 psia, medida após a temperatura atingir T_{atm}. Admita que a válvula na cavidade é um bocal convergente com diâmetro da garganta de 0,05 pol. e que o ar ambiente está na condição padrão. Por quanto tempo a válvula deve permanecer aberta para que se obtenha a pressão final desejada na cavidade? Calcule a variação de entropia para o ar na cavidade.

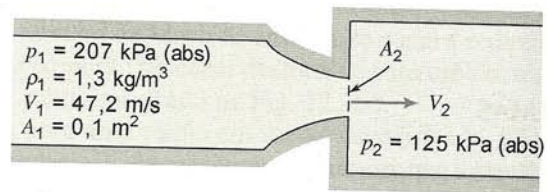
12.19 Ar escoa isoentropicamente através de um bocal conectado a um grande tanque onde a pressão absoluta é de 171 kPa e a temperatura é de 27°C. Na seção de entrada o número de Mach é 0,2. O bocal descarrega para a atmosfera; a área de descarga é de 0,015 m². Determine a magnitude e o sentido da força que deve ser aplicada para manter o bocal no lugar.

12.20 Uma corrente de ar escoando num duto (área = 1 pol.²) está a $p = 20$ psia, tem $M = 0,6$ e escoa a $\dot{m} = 0,5$ lbm/s. Determine a temperatura de estagnação isoentrópica local. Se a área transversal da passagem fosse reduzida a jusante, determine a redução percentual máxima de área permissível, sem redução da vazão em massa (admita escoamento isoentrópico). Determine a velocidade e pressão no local de área mínima.

12.21 Considere um "carrinho foguete" propelido por um jato que é suprido por um tanque de ar comprimido sobre o carrinho. Inicialmente, o ar no tanque está a 1,52 MPa (abs.) e 27°C, e a massa do carrinho e tanque é $M_0 = 23,2$ kg. O ar descarrega através de um bocal convergente com área de saída $A_e = 31,7$ mm². A resistência de rolamento do carrinho é $F_R = 5,2$ N; a resistência aerodinâmica é desprezível. No instante seguinte ao início do fluxo de ar através do bocal: (a) calcule a pressão no plano de saída do bocal, (b) avalie a vazão em massa de ar através do bocal e (c) calcule a aceleração do conjunto carrinho e tanque.

12.22 Um cilindro de gás usado em soldagem contém hélio a 3000 psig e temperatura ambiente. O cilindro é derrubado, a válvula é quebrada e o hélio escapa através de uma passagem convergente. A área mínima de escoamento é de 0,10 pol² na seção de saída onde o fluxo de gás é uniforme. Determine (a) a vazão em massa na qual o gás sai do cilindro e (b) a aceleração instantânea do cilindro (admita que o eixo do cilindro é horizontal e a sua massa é de 125 lb). Mostre os estados estático e de estagnação e o caminho do processo num diagrama *Ts*.

12.23 Um bocal convergente é parafusado na lateral de um grande tanque. O ar dentro do tanque é mantido à pressão e temperatura constantes de 50 psia e 100°F. A área de entrada do bocal é de 10 pol.² e a área de saída é de 1 pol.² O bocal descarrega para a atmosfera. Para escoamento isoentrópico no bocal, determine a força total nos parafusos e indique se eles estão sob tração ou compressão.

12.24 Um gás ideal, com $k = 1,4$, escoa isoentropicamente através do bocal convergente mostrado e descarrega para o interior de um grande duto onde a pressão é $p_2 = 125$ kPa (abs.). O gás *não* é o ar e a sua constante, R, é desconhecida. O escoamento é permanente e uniforme em todas as seções. Determine a área de saída do bocal, A_2, e a velocidade de saída do jato, V_2.

P12.24

12.25 Um tanque de ar termicamente isolado com $\forall = 107$ pés³ é usado numa instalação de purga. Inicialmente, o tanque é pressurizado até 400 psia, a 800°R. A vazão mássica de ar saindo do tanque é uma função do tempo; durante os primeiros 30 segundos de purga, 64,5 lbm de ar deixam o tanque. Determine a temperatura do ar no tanque após 30 s de purga. Estime a área da garganta do bocal.

12.26 Um grande tanque termicamente isolado, pressurizado a 620 kPa (manométrica), fornece ar para um bocal convergente que descarrega para a atmosfera. A temperatura inicial no tanque é de 127°C. Quando o escoamento através do bocal é iniciado, qual é o número de Mach no plano de saída do bocal? Qual é a pressão no plano de saída quando o escoamento é iniciado? Em que condição o número de Mach no plano de saída será modificado? Como será a variação da pressão no plano de saída com o tempo? Qual a sua estimativa para a temperatura do ar no tanque quando a vazão do escoamento através do bocal aproxima-se de zero?

12.27 Um avião de transporte a jato, com cabine pressurizada, viaja a 11 km de altitude. A temperatura e a pressão na cabine são inicialmente 25°C e o equivalente a 2,5 km de altitude. O volume interior da cabine é de 25 m³. Ar escapa através de um pequeno orifício com área efetiva de escoamento de 0,002 m². Calcule o tempo requerido para que a pressão na cabine decresça de 40%.

12.28 Ar escapa de um pneu de bicicleta de alta pressão através de um furo com diâmetro $d = 0,254$ mm. A pressão inicial no pneu é $p_1 = 620$ kPa (man.). (Admita que a temperatura permanece constante a 27°C.) O volume interno do pneu é de aproximadamente $4,26 \times 10^{-4}$ m³, e é constante. Estime o tempo necessário para a pressão no pneu cair para 310 kPa

(man.). Calcule a variação de entropia específica do ar no pneu durante esse processo.

12.29 Um bocal convergente-divergente está ligado a um tanque de ar muito grande no qual a pressão é de 20 psia e a temperatura é de 40°F. O bocal descarrega para a atmosfera onde a pressão é de 14,7 psia. A área de saída do bocal é de 2 pol.² Qual é a vazão através do bocal? Admita que o escoamento é isoentrópico.

12.30 Um bocal convergente-divergente, projetado para expandir o ar para $M = 3{,}0$, tem área de saída de 250 mm². O bocal é parafusado na lateral de um grande tanque e descarrega para a atmosfera padrão. O ar no tanque está pressurizado a 4,5 MPa (man.), a 750 K. Admita que o escoamento é isoentrópico no bocal. Avalie a pressão no plano de saída do bocal. Calcule a vazão mássica de ar através do bocal.

12.31 Ar, a uma pressão de estagnação de 7,20 MPa (abs.) e uma temperatura de estagnação de 1100 K, escoa isoentropicamente através de um bocal convergente-divergente que tem uma área de garganta de 0,01 m². Determine a velocidade e a vazão mássica na seção a jusante onde o número de Mach é 4,0.

12.32 Um bocal convergente-divergente, com área de garganta de 2 pol.², está conectado a um grande tanque no qual o ar é mantido a uma pressão de 80 psia e a uma temperatura de 60°F. Se o bocal deve operar nas condições de projeto (o escoamento é isoentrópico) e a pressão ambiente fora do bocal for 12,9 psia, calcule a área de saída do bocal e a vazão em massa.

12.33 Ar deve ser expandido através de um bocal convergente-divergente em um processo adiabático sem atrito, de uma pressão de 1,10 MPa (abs.) e uma temperatura de 115°C, para uma pressão de 141 kPa (abs.). Determine as áreas da garganta e de saída para um bocal bem projetado livre de choque, se a vazão mássica for de 2 kg/s.

12.34 Ar escoa isoentropicamente através de um bocal convergente-divergente conectado a um grande tanque no qual a pressão é de 100 psia e a temperatura é de 500°R. O bocal está operando nas condições de projeto para as quais a pressão na saída do bocal, p_e, é igual à pressão atmosférica ambiente, p_a. A área de saída do bocal é $A_e = 4{,}0$ pol.² Calcule a vazão através do bocal. Se a temperatura do ar no tanque for aumentada para 2000°R (todas as pressões permanecendo as mesmas), como a vazão será afetada?

12.35 Nitrogênio, à pressão e temperatura de 371 kPa (abs.) e 400 K, entra num bocal com velocidade desprezível. O jato de descarga é dirigido contra uma grande placa plana que é perpendicular ao eixo do jato. O escoamento deixa o bocal à pressão atmosférica. A área de saída é de 0,003 m². Determine a força requerida para manter a placa no lugar.

12.36 Um pequeno motor de foguete a combustível sólido é testado numa bancada de empuxo. A pressão e temperatura na câmara são 600 psia e 6000°R. O bocal de propulsão é projetado para expandir os gases de descarga, isoentropicamente, para uma pressão de 10,0 psia. A área de saída do bocal é de 0,60 pé². Trate o gás como ideal com $k = 1{,}2$ e $R = 60{,}0$ pés·lbf/(lbm·°R). Determine a vazão em massa do gás propelente e a força de empuxo exercida contra a bancada.

12.37 Um motor de foguete é alimentado com hidrogênio e oxigênio. A temperatura e pressão na câmara são 3300 K e 6,90 MPa. O bocal é projetado para expandir os gases de descarga, isoentropicamente, até uma pressão correspondente a uma altitude de 10 km num dia padrão. O empuxo produzido pelo motor deve ser de 100 kN nas condições de projeto. Trate os gases de descarga como vapor d'água e admita comportamento de gás ideal. Determine a vazão em massa do propelente necessária para produzir o empuxo desejado, a área de saída do bocal e a razão de áreas, A_e/A_t.

12.38 O motor de um pequeno foguete, alimentado com hidrogênio e oxigênio, é testado numa bancada de empuxo a uma altitude simulada de 10 km. O motor é operado nas condições de estagnação da câmara de 1500 K e 8,0 MPa (man.). O produto da combustão é vapor d'água, que pode ser tratado como um gás ideal. A expansão ocorre através de um bocal convergente-divergente com número de Mach de projeto de 3,5 e área de saída de 700 mm². Avalie a pressão no plano de saída do bocal. Calcule a vazão em massa de gás de descarga. Determine a força exercida pelo motor do foguete sobre a bancada.

12.39 Um cartucho de CO_2 é usado para propelir um pequeno "carrinho foguete". Gás comprimido, armazenado a 6000 psia e 70°F, é expandido através de um bocal convergente de contornos suaves cuja garganta tem 0,020 pol. de diâmetro. A contrapressão é atmosférica. Calcule a pressão na garganta do bocal. Avalie a vazão em massa de dióxido de carbono através do bocal. Determine o empuxo disponível para impulsionar o carrinho. De quanto aumentaria o empuxo, se uma seção divergente fosse acrescentada ao bocal para expandir o gás até a pressão atmosférica? Mostre os estados de estagnação e estáticos e os processos num diagrama *Ts*.

12.40 Ar ambiente é conduzido para dentro de um duto de área constante, termicamente isolado, através de um bocal convergente de contornos suaves. As condições ambientes são $T = 27$°C e $p = 101$ kPa (abs.). O diâmetro do duto é $D = 25$ mm. A pressão na entrada do duto (saída do bocal) é $p_1 = 90{,}5$ kPa. Determine (a) a vazão mássica do escoamento no duto e (b) a faixa de pressões de saída para as quais o escoamento na saída do duto está bloqueado.

12.41 Um dispositivo de escoamento de linha de Fanno, num laboratório de graduação de mecânica dos fluidos, consiste em um tubo de latão liso com 7,16 mm de diâmetro interno, alimentado por um bocal divergente. A temperatura no laboratório e a pressão barométrica não corrigida são, respectivamente, 23,5°C e 755,1 mm Hg. A pressão na saída do bocal convergente (entrada no duto de área constante) é −20,8 mm Hg (man.). Calcule o número de Mach na entrada do tubo de área constante. Calcule a vazão em massa no tubo. Avalie a pressão num local no tubo onde o número de Mach é 0,4.

12.42 Ar escoa de um grande tanque através de um bocal convergente conectado a um duto de área constante, termicamente isolado. O escoamento é adiabático em regime permanente. O bocal pode ser considerado sem atrito. O ar no tanque está a $p = 1{,}00$ MPa (abs.) e $T = 125$°C. A pressão absoluta na saída do bocal (entrada do duto) é de 784 kPa. Determine a pressão na extremidade do duto se a temperatura ali for de 65°C. Determine o aumento de entropia.

12.43 Ar escoa através de um tubo liso de 4 pol. de diâmetro, bem isolado termicamente, a 600 lbm/min. Numa seção, o ar está a 100 psia e 80°F. Determine a pressão mínima e a velocidade máxima que podem ocorrer no tubo.

12.44 Medições de escoamento compressível são feitas num tubo longo, liso, com diâmetro interno de 7,16 mm. O ar é extraído do ambiente (20°C e 101 kPa) por uma bomba de vácuo a jusante. As leituras de pressões ao longo do tubo tornam-se constantes quando a pressão a jusante é reduzida para 626 mm Hg (vácuo) ou abaixo. Para essas condições, determine (a) a máxima vazão em massa possível através do tubo, (b) a pressão de estagnação do ar saindo do tubo e (c) a variação de entropia do ar no tubo. Mostre os pontos de estado de estagnação e estático e o processo num diagrama *Ts*.

12.45 Ar é extraído da atmosfera (20°C e 101 kPa) através de um bocal convergente para o interior de um tubo longo, termicamente isolado, de área constante e diâmetro de 20 mm. O escoamento no bocal é isoentrópico. A pressão na entrada do tubo de seção constante é $p_1 = 99{,}4$ kPa. Avalie a vazão mássica através do tubo. Calcule T^* e p^* para o escoamento através do tubo. Mostre os correspondentes pontos de estado de estagnação e estático num diagrama *Ts*.

12.46 Considere o escoamento adiabático de ar num tubo de área constante com atrito. Numa seção do tubo, $p_0 = 100$ psia, $T_0 = 500$°R e M = 0,70. Se a área da seção transversal for de

1 pé^2 e o número de Mach na saída for $M_2 = 1$, determine a força de atrito exercida sobre o fluido pelo tubo.

12.47 Um bocal convergente-divergente descarrega ar para dentro de um tubo com área $A = 650$ mm^2. Na entrada do tubo, $p =$ 128 kPa (abs.), $T = 39$°C e $M = 2{,}0$. Para escoamento sem choque até um número de Mach unitário na saída do tubo, calcule a temperatura de saída, a força líquida do fluido sobre o tubo e a variação de entropia.

12.48 Ar escoa através de um bocal convergente e em seguida por um trecho de tubo isolado termicamente. O ar é suprido por um tanque no qual a temperatura é constante a 15°C e a pressão é variável. A extremidade de saída do duto descarrega para a atmosfera. No momento em que o escoamento de saída torna-se bloqueado, medições de pressão mostram que a pressão de entrada do duto e o número de Mach são 53,2 psia e 0,30. Determine a pressão no tanque e a temperatura, pressão de estagnação e vazão mássica do escoamento de saída se o diâmetro do tubo for de 0,249 pol. Mostre, num diagrama *Ts*, o efeito de elevar a pressão no tanque para 100 psia. Esboce a distribuição de pressão *versus* distância ao longo do canal para essa nova condição de escoamento.

12.49 Desejamos construir um túnel de vento supersônico usando o conjunto de um bocal termicamente isolado e um duto de área constante. Deseja-se uma operação livre de choque, com $M_1 = 2{,}1$ na entrada da seção de teste e $M_2 = 1{,}1$ na saída da seção de teste. As condições de estagnação são $T_0 = 295$ K e $p_0 = 101$ kPa (abs.). Calcule a pressão e a temperatura de saída e a variação de entropia através da seção de teste.

***12.50** Considere o canal de laboratório para escoamento de linha de Fanno do Problema 12.41. Admita que as condições no laboratório são 22,5°C e 760 mm Hg (não corrigido). A leitura do manômetro numa tomada de pressão na extremidade do bocal convergente é de −11,8 mm Hg (man.). Calcule o número de Mach nesse local. Determine o comprimento de duto requerido para causar o bloqueio do escoamento. Calcule a temperatura e a pressão de estagnação no estado bloqueado no duto de área constante.

***12.51** Para as condições do Problema 12.42, determine o comprimento, *L*, de tubo de aço comercial de 50 mm de diâmetro, entre as seções ① e ②.

***12.52** Ar escoa num duto termicamente isolado. Numa seção, a temperatura, a pressão absoluta e a velocidade são, respectivamente, 200°C, 2,00 MPa e 140 m/s. Determine a temperatura neste duto onde a pressão caiu para 1,26 MPa (abs.) como resultado do atrito. Se o duto ($e/D = 0{,}0003$) tem 150 mm de diâmetro, determine a distância entre as duas seções.

***12.53** Para as condições do Problema 12.46, determine o comprimento do duto. Admita que o duto é circular e feito de aço comercial. Plote as variações de pressão e do número de Mach *versus* a distância ao longo do duto.

***12.54** Considere o escoamento descrito no Problema-Exemplo 12.7. Usando as funções para escoamento de linha de Fanno de um gás ideal, plote a pressão estática, a temperatura e o número de Mach *versus* *L/D* medido a partir da entrada do tubo; prossiga até que o estado de bloqueio seja alcançado.

***12.55** Usando as coordenadas T/T_0 e $(s - s^*)/c_p$, onde s^* é a entropia para $M = 1$, plote a linha de Fanno começando com as condições de entrada especificadas no Problema-Exemplo 12.7. Use as funções para escoamento de linha de Fanno e prossiga até $M = 1$.

***12.56** Usando as coordenadas T/T^* e $(s - s^*)/c_p$, onde s^* é a entropia para $M = 1$, plote a linha de Fanno para escoamento de ar ($k = 1{,}4$) para $0{,}1 < M < 3{,}0$.

***12.57** Ar escoa através de um trecho de 40 pés de duto, termicamente isolado, e de área constante com $D = 2{,}12$ pés. A rugosidade relativa é $e/D = 0{,}002$. Na entrada do duto, $T_1 = 100$°F e $p_1 = 17{,}0$ psia. Num local a jusante, $p_2 = 14{,}7$ psia e o escoamento é subsônico. Há informação suficiente para resolver para M_1 e M_2? Prove a sua resposta graficamente. Determine a vazão em massa no duto e T_2.

***12.58** Ar trazido para dentro de um tubo através de um bocal convergente-divergente tem, inicialmente, temperatura e pressão de estagnação de 1000°F e 200 psia, respectivamente. O escoamento no bocal é isoentrópico; o escoamento no tubo é adiabático. Na junção entre o bocal e o tubo a pressão é de 2,62 psia. O tubo tem 4 pés de comprimento e 1 pol. de diâmetro. Se o número de Mach da saída for a unidade, determine o fator de atrito médio para todo o comprimento do duto. Calcule a variação de pressão entre a entrada do tubo e a descarga.

***12.59** Para as condições do Problema 12.47, determine o comprimento do duto. Admita que o duto é circular e feito de aço comercial. Plote as variações de pressão e do número de Mach *versus* a distância ao longo do duto.

***12.60** Começando com as condições de entrada do Problema 12.47 e usando as coordenadas T/T_0 e $(s - s^*)/c_p$, plote os ramos supersônico e subsônico da linha de Fanno.

***12.61** Um conjunto de duto de área constante ($D = 150$ mm) deve ser alimentado por um bocal convergente-divergente a partir de um tanque contendo ar a 295 K e 1,0 MPa (abs.). Uma operação livre de choque é desejada. O número de Mach na entrada do duto deve ser 2,1 e o número de Mach na saída deve ser 1,4. Todo o conjunto será isolado termicamente. Determine (a) a pressão requerida na saída do duto, (b) o comprimento requerido do duto e (c) a variação de entropia específica ao longo do duto. Mostre os pontos de estado de estagnação e estático e a linha do processo num diagrama *Ts*.

***12.62** Em gasodutos longos de área constante, como os usados para gás natural, a temperatura pode ser considerada constante. Admita que o gás deixa uma estação de bombeamento a 50 psia e 70°F, a *M* 0,10. Na seção ao longo do tubo onde a pressão caiu para 20 psia, calcule o número de Mach do escoamento. Calor é adicionado ou removido do gás no trecho entre as tomadas de pressão? Justifique a sua resposta. Esboce o processo num diagrama *Ts*. Indique (qualitativamente) T_{01}, T_{02} e p_{02}.

***12.63** Ar entra num canal horizontal de área constante a 200°F, 600 psia e 350 pés/s. Determine a pressão limite para escoamento isotérmico. Compare com a pressão limite para escoamento adiabático com atrito.

***12.64** Ar entra num tubo de 6 pol. de diâmetro a 60°F, 200 psia e 190 pés/s. O fator de atrito médio é de 0,016. O escoamento é isotérmico. Calcule o número de Mach local e a distância, a partir da entrada do canal, do ponto onde a pressão atinge 75 psia.

***12.65** Um tubo de aço limpo tem 950 pés de comprimento e 5,25 pol. de diâmetro interno. Ar a 80°F, 120 psia e 80 pés/s entra no tubo. Calcule e compare as quedas de pressão através do

* Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

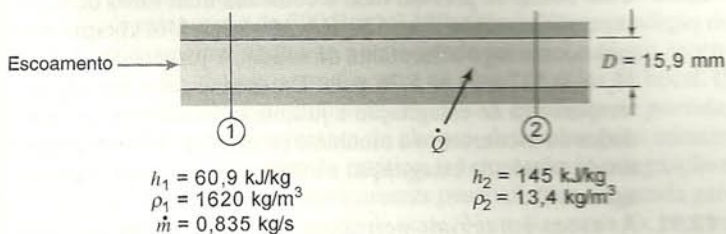
tubo para escoamento (a) incompressível, (b) isotérmico e (c) adiabático.

***12.66** Gás natural (massa molecular $M_m = 18$ e $k = 1,3$) deve ser bombeado através de um tubo com diâmetro interno de 36 pol. que liga duas estações de compressores separadas por uma distância de 40 milhas. Na estação de montante a pressão não deve exceder 90 psig, e na estação de jusante deve ser de pelo menos 10 psig. Calcule a máxima vazão em volume permitida (pé³/dia a 70°F e 1 atm), admitindo suficiente troca de valor através do tubo para manter o gás a 70°F.

12.67 Considere o escoamento sem atrito de ar em um duto de área constante. Na seção ①, $M_1 = 0,50$, $p_1 = 1,10$ MPa (abs.) e $T_{0_1} = 333$ K. Pelo efeito de troca de calor, o número de Mach na seção ② é $M_2 = 0,90$ e a temperatura de estagnação é $T_{0_2} = 478$ K. Determine o calor transferido por unidade de massa para o fluido ou do fluido entre as seções ① e ②, e a diferença de pressão, $p_1 - p_2$.

12.68 Ar escoa através de um tubo com diâmetro interno de 2 pol. com atrito desprezível. As condições de entrada são $T_1 = 60°$F, $p_1 = 150$ psia e $M_1 = 0,30$. Determine a troca de calor por libra de ar necessária para produzir $M_2 = 1,0$ na saída do tubo onde $p_2 = 72,0$ psia.

12.69 Ar escoa sem atrito através de um duto curto de área constante. Na entrada do duto, $M_1 = 0,30$, $T_1 = 50°$C e $\rho_1 = 2,16$ kg/m³. Como resultado do aquecimento, o número de Mach e a massa específica na saída do tubo são $M_2 = 0,60$ e $\rho_2 = 0,721$ kg/m³. Determine a adição de calor por unidade de massa e a variação de entropia para o processo.

12.70 Freon líquido, usado para resfriar componentes elétricos, escoa em regime permanente num tubo horizontal de diâmetro constante, $D = 15,9$ mm. Calor é transferido para o escoamento e o líquido ferve, deixando o tubo com vapor. Os efeitos do atrito são desprezíveis comparados com os da adição de calor. As condições do escoamento são mostradas. Determine (a) a taxa de transferência de calor e (b) a diferença de pressão, $p_1 - p_2$.

P12.70

12.71 Ar escoa a 1,42 kg/s através de um duto de 100 mm de diâmetro. Na seção de entrada, a temperatura e a pressão absoluta são 52°C e 60,0 kPa. Na seção a jusante onde o escoamento é bloqueado, $T_2 = 45°$C. Determine a adição de calor por unidade de massa, a variação de entropia e a variação na pressão de estagnação para o processo, admitindo escoamento sem atrito.

12.72 Gasolina é adicionada à corrente de ar no carburador de um motor a ignição por centelha, formando uma mistura aproximadamente estequiométrica (1 lbm de gasolina para 16 lbm de ar). O combustível evapora-se num trecho curto de um duto de área constante onde o atrito pode ser desprezado. (O calor latente de vaporização da gasolina é de 140 Btu/lbm.) Como uma primeira aproximação, despreze as variações na composição química e na massa da corrente de ar, a qual deixa a seção de evaporação a 9,6°F. Determine a temperatura e a pressão de estagnação do escoamento saindo do duto, se a temperatura na entrada do duto é 43,6°F (admita condição atmosférica padrão e escoamento isoentrópico da atmosfera para a entrada do duto). Calcule a variação na pressão de estagnação causada pelo processo de evaporação.

12.73 Considere o escoamento sem atrito de ar num duto de área constante, $A = 0,087$ pé². Numa seção, as propriedades estáticas são 500°R e 15,0 psia e o número de Mach é 0,2. Numa seção a jusante, a pressão estática é de 10,0 psia. Desenhe um diagrama *Ts* mostrando os estados de estagnação e estático. Calcule a velocidade do escoamento e a temperatura no local a jusante. Avalie a taxa de troca de calor para o processo.

12.74 Um combustor de um motor a jato JT8D (como o usado no avião Douglas DC-9) tem uma vazão em massa de ar de 15 lbm/s. A área é constante e os efeitos de atrito são desprezíveis. As propriedades na entrada da câmara de combustão são 1260°R, 235 psia e 609 pés/s. Na saída do combustor, $T = 1840°$R e $M = 0,476$. O poder calorífico do combustível é 18.000 Btu/lbm; a razão ar/combustível é grande o suficiente para que as propriedades sejam aquelas do ar. Calcule a pressão na saída do combustor. Determine a taxa de adição de energia à corrente de ar. Determine a vazão em massa de combustível requerida; compare-a com a vazão de ar. Mostre o processo num diagrama *Ts*, indicando os estados de estagnação e estático e o sentido do processo.

12.75 Considere o escoamento sem atrito de ar num duto com $D = 4$ pol. Na seção ①, a temperatura e a pressão são 30°F e 10 psia; a vazão em massa é de 1,2 lbm/s. Qual a quantidade de calor que pode ser adicionada sem bloquear o escoamento? Avalie a variação resultante na pressão de estagnação.

12.76 Um duto de área constante é alimentado com ar proveniente de um bocal convergente-divergente. Na entrada do duto, as seguintes propriedades são conhecidas: $p_{0_1} = 800$ kPa (abs.), $T_{0_1} = 700$ K e $M_1 = 3,0$. Numa curta distância a jusante no duto (na seção ②), $p_2 = 46,4$ kPa. Admitindo escoamento sem atrito, determine a velocidade, pressão e número de Mach na seção ②, e a troca de calor entre a entrada e a seção ②.

***12.77** Ar escoa sem atrito, em regime permanente, a 1,83 kg/s através de um duto com área de seção reta de 0,02 m². Na entrada do duto, a temperatura e a pressão absoluta são 260°C e 126 kPa. O escoamento de saída descarrega subsonicamente à pressão atmosférica. Determine o número de Mach, temperatura e temperatura de estagnação na saída do duto e a taxa de troca de calor.

***12.78** Ar escoa sem atrito num trecho curto de um duto de seção constante. Na entrada do duto, $M_1 = 0,30$, $T_1 = 50°$C e $\rho_1 = 2,16$ kg/m³. Na saída do duto, $M_2 = 0,60$. Determine a adição de calor por unidade de massa, a variação de entropia e a variação na pressão de estagnação para o processo.

***12.79** No escoamento sem atrito de ar, através de um duto de 100 mm de diâmetro, 1,42 kg/s entram a 52°C e 60,0 kPa (abs.). Determine a quantidade de calor que deve ser adicionada para bloquear o escoamento e as propriedades do fluido no estado de bloqueio.

***12.80** Ar, proveniente do sistema de admissão de um avião, entra na câmara de combustão do motor, onde calor é adicionado durante um processo sem atrito, num tubo de área constante igual a 0,01 m². A temperatura de estagnação isoentrópica local e o número de Mach na entrada do combustor são 427 K e 0,3. A vazão em massa é de 0,5 kg/s. Quando a taxa de adição de calor é ajustada em 404 kW, o escoamento sai da câmara de combustão a 1026 K e 22,9 kPa (abs.). Determine para esse processo: (a) o número de Mach na saída do combustor, (b) a pressão estática na entrada do combustor e (c) a variação na pressão de estagnação isoentrópica local durante o processo de adição de calor. Mostre os pontos de estado de

---

* Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

estagnação e estático e indique o sentido do processo num diagrama *Ts*.

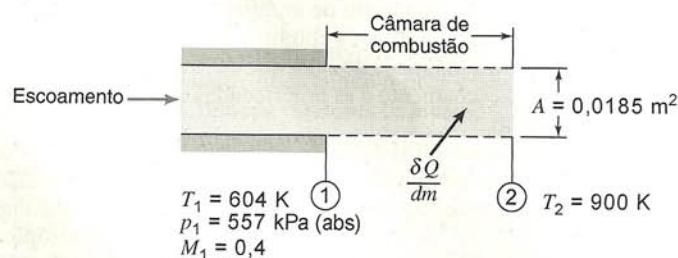
***12.81** Considere o escoamento permanente, unidimensional, de ar, numa câmara de combustão com área constante de 0,5 pé², onde combustível de hidrocarboneto, adicionado a corrente de ar, é queimado. O processo é equivalente ao aquecimento simples porque a quantidade de combustível é pequena em comparação com a de ar; o aquecimento ocorre numa curta distância, de forma que o atrito é desprezível. As propriedades na entrada da câmara são 818°R, 200 psia e $M = 0{,}3$. A velocidade na saída da câmara não deve exceder 2000 pés/s. Determine as propriedades na saída da câmara e a taxa de adição de calor. Mostre o processo num diagrama *Ts*, indicando os pontos de estado estáticos e de estagnação antes e após a adição de calor.

***12.82** O escoamento na câmara de combustão de uma turbina a gás é modelado como o aquecimento de ar unidimensional, sem atrito, em regime permanente, num duto de área constante. Para um certo processo, as condições de entrada são 960°F, 225 psia e $M = 0{,}4$. Calcule a máxima adição de calor possível. Determine todas as propriedades do fluido na seção de saída e a redução na pressão de estagnação. Mostre o processo num diagrama *Ts*, indicando todos os pontos de estado estáticos e de estagnação.

***12.83** Um túnel de vento supersônico é suprido com ar a 25°C a partir de um tanque de alta pressão. A temperatura na seção de teste deve ser mantida acima de 0°C para impedir a formação de partículas de gelo. Para se conseguir isto, o ar proveniente do tanque é aquecido antes de escoar para o interior de um bocal convergente-divergente que alimenta a seção de teste. O aquecimento é feito num trecho curto com área constante. A potência do aquecedor é $\dot{Q} = 10$ kW. O número de Mach de projeto, na seção de teste do túnel, deve ser 3,0. Avalie a temperatura de estagnação requerida na saída do aquecedor. Calcule a máxima vazão mássica na qual o ar pode ser fornecido para a seção de teste do túnel de vento. Determine a razão de áreas, A_e/A_t.

***12.84** Considere o escoamento permanente num combustor onde energia térmica é adicionada pela queima de combustível. Despreze o atrito. Admita que as propriedades termodinâmicas são constantes e iguais àquelas do ar puro. Calcule a temperatura de estagnação e o número de Mach na saída do queimador. Avalie a adição de calor por unidade de massa e a taxa de troca de calor. Expresse a taxa de adição de calor como uma fração da taxa máxima de adição de calor possível com esse número de Mach de entrada.

P12.84

***12.85** Usando as coordenadas T/T^* e $(s - s^*)/c_p$, onde s^* é a entropia para $M = 1$, plote a linha de Rayleigh para escoamento de ar ($k = 1{,}4$), para $0{,}4 < M < 3{,}0$.

***12.86** Começando com as condições de entrada do Problema 12.47 e usando as coordenadas T/T_{0_1} e $(s - s^*)/c_p$, plote os ramos supersônico e subsônico da linha de Rayleigh para o escoamento.

***12.87** Escoamento de ar sem atrito em um tubo de área constante é descarregado à pressão atmosférica na seção ②. A montante na seção ①, $M_1 = 3{,}0$, $T_1 = 215$°R e $p_1 = 1{,}73$ psia. Entre as seções ① e ②, 48,5 Btu/lbm de ar é adicionado ao escoamento. Determine M_2 e p_2. Além do diagrama *Ts*, plote a distribuição de pressão em função da distância ao longo do canal, assinalando as seções ① e ②.

***12.88** Um avião de transporte a jato voa a $M = 0{,}85$ numa altitude de 40.000 pés. O ar para o sistema de pressurização da cabine é conduzido para bordo através de um duto de admissão e desacelerado isoentropicamente para 100 pés/s em relação à aeronave. Em seguida, ele entra num compressor onde sua pressão é elevada adiabaticamente a fim de prover uma pressão na cabine equivalente a uma altitude de 8000 pés. O aumento de temperatura do ar através do compressor é de 170°F. Finalmente, o ar é resfriado para 70°F (num trocador de calor com atrito desprezível) antes de ser lançado no interior da cabine. Trace um diagrama do sistema, assinalando todos os componentes e numerando apropriadamente as seções. Determine a temperatura e a pressão estática e de estagnação em cada seção. Trace em escala um diagrama *Ts*, mostrando os pontos de estado de estagnação e estático e indicando as trajetórias do processo. Avalie o trabalho adicionado ao compressor e a energia rejeitada no trocador de calor.

12.89 Um choque normal ocorre quando um tubo de pitot-estática é inserido em um túnel de vento supersônico. Pressões medidas pelo tubo são $p_{0_2} = 68{,}1$ kPa (abs.) e $p_2 = 54{,}8$ kPa (abs.). Antes do choque, $T_1 = 160$ K e $p_1 = 11{,}0$ kPa (abs.). Calcule a velocidade do ar no túnel de vento.

12.90 Uma sonda de pressão total é colocada num túnel de vento supersônico onde $T = 530$°R e $M = 2{,}0$. Um choque normal ocorre logo a montante da sonda. A jusante do choque, $M_2 = 0{,}577$ e $p_2 = 5{,}76$ psia. Determine (a) a pressão e a temperatura de estagnação a jusante e (b) todas as propriedades do escoamento a montante do choque. Mostre os pontos de estado de estagnação e estático e o processo num diagrama *Ts*.

12.91 Ar escoa em regime permanente através de um tubo longo, termicamente isolado e de área constante. Na seção ①, $M_1 = 2{,}0$, $T_1 = 140$°F e $p_1 = 35{,}9$ psia. Na seção ②, a jusante do choque normal, $V_2 = 1080$ pés/s. Determine a massa específica e o número de Mach na seção ②. Faça um diagrama qualitativo da distribuição de pressão ao longo do tubo.

12.92 Ar aproxima-se de um choque normal a $M_1 = 3{,}0$, com $T_{0_1} = 700$ K e $p_1 = 120$ kPa (abs.). Determine a velocidade e a temperatura do ar saindo do choque e a variação de entropia através do choque.

12.93 Um choque normal ocorre num duto de área constante. Ar aproxima-se do choque com $T_{0_1} = 1000$°R, $p_{0_1} = 100$ psia e $M_1 = 3{,}0$. Determine a pressão estática a jusante do choque. Compare a pressão a jusante com aquela obtida pela desaceleração isoentrópica para o mesmo número de Mach subsônico.

12.94 Ar passa por um choque normal. A jusante, $T_1 = 35$°C, $p_1 = 229$ kPa (abs.) e $V_1 = 704$ m/s. Determine a temperatura e a pressão de estagnação da corrente de ar deixando o choque.

12.95 Um choque normal ocorre no ar, numa seção onde o escoamento tem velocidade de 924 m/s, $T_1 = 10$°C e $p_1 = 35{,}0$ kPa (abs.). Determine a velocidade e o número de Mach a jusante

* Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

do choque e a variação na pressão de estagnação através do choque.

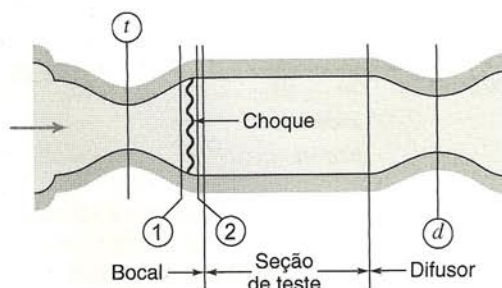
12.96 Ar aproxima-se de um choque normal a $T_1 = 18°C$, $p_1 = 101$ kPa (abs.) e $V_1 = 766$ m/s. Determine a velocidade imediatamente a jusante do choque e a mudança de pressão através do mesmo. Calcule a variação na pressão correspondente para uma desaceleração sem choque e sem atrito entre as mesmas velocidades.

12.97 Um avião supersônico voa a $M = 2{,}2$ a 12 km de altitude. Um tubo de Pitot é usado para medir a pressão requerida para o cálculo da velocidade do ar. Um choque normal ocorre a montante do tubo. Avalie as condições de estagnação isoentrópica local na frente do choque. Estime a pressão medida pelo tubo de Pitot. Mostre todos os pontos de estado de estagnação e estático e o caminho do processo num diagrama *Ts*.

12.98 Sondas de pressão e de temperatura de estagnação estão instaladas no nariz de um avião supersônico a 35.000 pés de altitude. Um choque normal ocorre a montante das sondas. A sonda de temperatura indica $T_0 = 420°F$ a jusante do choque. Calcule o número de Mach e a velocidade do ar relativa ao avião. Determine as pressões de estagnação e estática a jusante do choque. Mostre o processo e os pontos de estado de estagnação e estático num diagrama *Ts*.

12.99 O avião de transporte supersônico Concorde voa a $M = 2{,}2$ a 20 km de altitude. Ar é desacelerado isoentropicamente pelo sistema de admissão do motor para um número de Mach local de 1,3. O ar passa através de um choque normal e é desacelerado ainda mais para $M = 0{,}4$ na seção do compressor do motor. Admita, como uma primeira aproximação, que esse processo de difusão subsônica é isoentrópico e use dados da atmosfera padrão para as condições de corrente livre. Determine a temperatura, a pressão e a pressão de estagnação do ar entrando no compressor do motor.

12.100 Um túnel de vento supersônico deve ser operado a $M = 2{,}2$ na seção de teste. A montante da seção de teste, a área da garganta do bocal é de 0,07 m². Ar é suprido nas condições de estagnação de 500 K e 1,0 MPa (abs.). Numa condição de escoamento, enquanto a velocidade no túnel está em ascensão, um choque normal ocorre no plano de saída do bocal. O escoamento é permanente. Para essa condição de *partida*, imediatamente a jusante do choque, determine (a) o número de Mach, (b) a pressão estática, (c) a pressão de estagnação e (d) a área mínima, teoricamente possível, para a segunda garganta a jusante da seção de teste. Num diagrama *Ts*, mostre os pontos de estado de estagnação e estático, e o sentido do processo.

12.101 Considere a partida de um túnel de vento supersônico, como mostrado. A área da garganta do bocal é de 1,25 pé² e o número de Mach de projeto da seção de teste é 2,50. Na partida do túnel, um choque normal ocorre na porção divergente do bocal, onde a área é 3,05 pés². As condições de estagnação a montante são $T_0 = 1080°R$ e $p_0 = 115$ psia. Determine a área mínima possível da garganta do difusor nesse instante. Calcule o aumento de entropia através do choque.

P12.101

12.102 Um avião supersônico voa a $M = 2{,}7$ a 60.000 pés de altitude. Um choque normal ocorre a montante de um tubo de pitot sobre o avião; o tubo mede uma pressão de estagnação de 10,4 psia. Calcule a pressão estática e a temperatura a jusante do choque. Avalie a perda na pressão de estagnação através do choque. Determine a variação da entropia específica através do choque. Mostre os estados de estagnação e estático, e o caminho do processo em um diagrama *Ts*.

12.103 Um avião voa, em velocidade supersônica, a 10 km de altitude num dia padrão. A velocidade verdadeira do ar em relação ao avião é de 659 m/s. Calcule o número de Mach de vôo da aeronave. Um tubo de carga total conectado à aeronave é usado para medir a pressão de estagnação, que é convertida no número de Mach do vôo por um computador de bordo. Entretanto, o programador do computador ignorou o choque normal que ocorre em frente ao tubo de carga total e admitiu escoamento isoentrópico. Avalie a pressão medida pelo tubo de carga total. Determine a velocidade errônea do ar calculada pelo programa do computador.

12.104 Um avião voa a $M_1 = 2{,}7$ a 20 km de altitude em um dia padrão. Ar entra no sistema de admissão do motor onde é desacelerado isoentropicamente para $M_2 = 1{,}3$. Um choque normal ocorre nesse local. O escoamento subsônico resultante é desacelerado ainda mais para $M_4 = 0{,}40$. A difusão subsônica é adiabática, mas não isoentrópica; a pressão final é de 104 kPa (abs.). Avalie (a) a temperatura de estagnação para o escoamento, (b) a variação de pressão através do choque, (c) a variação de entropia, $s_4 - s_1$ e (d) a pressão final de estagnação. Mostre o processo num diagrama *Ts*, indicando todos os estados estáticos e de estagnação.

12.105 Uma onda de choque propaga-se para fora de uma explosão. Em raios grandes, a curvatura é pequena e a onda pode ser considerada como um choque normal de grande intensidade. (O aumento de pressão e temperatura associado com a onda diminui vagarosamente à medida que ela desloca-se para fora.) Num instante, uma frente de onda desloca-se a $M = 1{,}60$ com relação ao ar não perturbado na condição padrão. Determine (a) a velocidade do ar a jusante da onda de choque com relação a onda e (b) a velocidade do ar a jusante da onda de choque como vista por um observador sobre o solo. Desenhe um diagrama *Ts* para o processo como visto por um observador sobre a onda, indicando os pontos de estado estáticos e de estagnação e os valores das propriedades.

12.106 Ar escoa através de um bocal convergente-divergente com $A_e/A_t = 3{,}5$. As condições de estagnação a montante são atmosféricas; a contrapressão é mantida por uma bomba de vácuo. Determine a contrapressão requerida para provocar um choque normal no plano de saída do bocal e a velocidade do escoamento deixando o choque.

12.107 Um bocal convergente-divergente expande ar de 250°F e 50,5 psia até 14,7 psia. As áreas da garganta e do plano de saída são 0,801 e 0,917 pol.², respectivamente. Calcule o número de Mach de saída. Avalie a vazão em massa através do bocal.

12.108 Um bocal convergente-divergente é conectado a um grande tanque de ar, no qual $T_{0_1} = 300$ K e $p_{0_1} = 250$ kPa (abs.). Na garganta do bocal (seção de área mínima) a pressão é de 132 kPa (abs.). Na seção convergente, a pressão cai para 68,1 kPa antes de aumentar repentinamente através de um choque normal. Na saída do bocal a pressão é de 180 kPa. Determine o número de Mach imediatamente a jusante do choque. Calcule a variação de entropia através do choque. Esboce o diagrama *Ts*, indicando pontos de estado estático e de estagnação para condições na garganta do bocal, em ambos os lados do choque, e no plano de saída.

12.109 Um bocal convergente-divergente, com área de garganta $A_t = 1{,}0$ pol.², está ligado a um grande tanque no qual a pressão e a temperatura são mantidas a 100 psia e 600°R. A área de saída do bocal é de 1,58 pol.² Determine o número de Mach de saída nas condições de projeto. Referindo-se à Fig. 12.20,

determine as contrapressões correspondentes às fronteiras dos Regimes I, II, III e IV. Esboce o gráfico correspondente para este bocal.

12.110 Um bocal convergente-divergente, com $A_e/A_t = 4{,}0$, é projetado para expandir ar isoentropicamente até a pressão atmosférica. Determine o número de Mach de saída nas condições de projeto e a pressão de estagnação de entrada requerida. Referindo-se à Fig. 12.20, determine as contrapressões que correspondem às fronteiras dos Regimes I, II, III e IV. Esboce o gráfico da razão de pressão *versus* a distância axial para este bocal.

12.111 Ar escoa adiabaticamente de um reservatório, onde $T = 60°C$ e $p = 600$ kPa (abs.), através de um bocal convergente-divergente com $A_e/A_t = 4{,}0$. Um choque normal ocorre no local do bocal onde $M = 2{,}42$. Admitindo escoamento isoentrópico antes e depois do choque, determine a contrapressão a jusante do bocal. Esboce a distribuição de pressão.

12.112 Um choque normal ocorre na seção divergente de um bocal convergente-divergente onde $A = 4{,}0$ pol.^{2} e $M = 2{,}50$. A montante, $T_0 = 1000°R$ e $p_0 = 100$ psia. A área de saída do bocal é de 6,0 pol.^{2} Admita que o escoamento é isoentrópico, exceto através do choque. Determine a pressão de saída do bocal, área da garganta e vazão mássica.

12.113 Um bocal convergente-divergente é projetado para expandir o ar isoentropicamente para a pressão atmosférica a partir de um grande tanque onde $T_0 = 150°C$ e $p_0 = 790$ kPa (abs.). Um choque normal ocorre na seção divergente, num local onde $p = 160$ kPa (abs.) e $A = 600$ mm^2. Determine a contrapressão do bocal, a área de saída e a área da garganta.

12.114 Um bocal convergente-divergente, com razão de pressão de projeto $p_e/p_0 = 0{,}128$, é operado com uma contrapressão tal que $p_b/p_0 = 0{,}830$ causando um choque normal na seção divergente. Determine o número de Mach para o qual o choque ocorre.

12.115 Ar escoa através de um bocal convergente-divergente com $A_e/A_t = 3{,}5$. As condições de estagnação a montante são atmosféricas; a contrapressão é mantida por um sistema de vácuo. Determine a faixa de contrapressões para a qual ocorrerá um choque normal dentro do bocal e a correspondente vazão em massa, se $A_t = 500$ mm^2.

12.116 Ar escoa através de um bocal convergente-divergente com $A_e/A_t = 1{,}87$. A montante, $T_{0_1} = 240°F$ e $p_{0_1} = 100$ psia. A contrapressão é mantida a 40 psia. Determine o número de Mach e a velocidade do escoamento no plano de saída do bocal.

12.117 Um bocal convergente-divergente, com $A_e/A_t = 1{,}633$, é projetado para operar com pressão atmosférica no plano de saída. Determine a(s) faixa(s) de pressões de estagnação para a qual o bocal estará livre de choques normais.

12.118 Um choque normal ocorre na seção divergente de um bocal convergente-divergente onde $A = 4{,}0$ pol.^{2} e $M = 2{,}00$. A montante, $T_{0_1} = 1000°R$ e $p_{0_1} = 100$ psia. A área de saída do bocal é de 6,0 pol.^{2} Admita que o escoamento é isoentrópico, exceto através do choque. Determine a pressão de saída do bocal. Mostre o processo em um diagrama *Ts* e indique os pontos de estado estático e de estagnação.

12.119 Ar escoa adiabaticamente de um reservatório, onde $T_{0_1} = 60°C$ e $p_{0_1} = 600$ kPa (abs.), através de um bocal convergente-divergente. O número de Mach de projeto do bocal é 2,94. Um choque normal ocorre no local onde $M = 2{,}42$. Suponha que o escoamento é isoentrópico antes e após o choque, determine a contrapressão a jusante do bocal. Esboce a distribuição de pressão.

12.120 Considere o escoamento de ar através de um bocal convergente-divergente. Esboce o comportamento aproximado da vazão em massa *versus* razão de contrapressão, p_b/p_0. Esboce a variação de pressão com a distância ao longo do bocal e o diagrama *Ts* para o escoamento no bocal, quando a contrapressão é p^*.

12.121 Um choque normal estacionário ocorre na seção divergente de um bocal convergente-divergente. O número de Mach a montante do choque é 3,0. A área do bocal no local do choque é de 500 mm^2. O bocal é alimentado por um grande tanque onde a pressão é de 1000 kPa (man.) e a temperatura é de 400 K. Determine o número de Mach, pressão de estagnação e pressão estática após o choque. Calcule a área da garganta do bocal. Calcule a variação de entropia no local do choque. Finalmente, se a área de saída da bocal for de 600 mm^2, estime o número de Mach de saída. Seria o número de Mach real de saída maior, menor ou o mesmo que você estimou?

***12.122** Um túnel de vento supersônico deve ter duas gargantas, com a segunda garganta maior que a primeira. Explique por que deve ser assim.

***12.123** Um choque normal ocorre num trecho de um duto de área constante, termicamente isolado. O escoamento é com atrito. Na seção ①, a alguma distância a montante do choque, $T_1 = 470°R$. Na seção ④, a alguma distância a jusante do choque, $T_4 = 750°R$ e $M_4 = 1{,}0$. Denote as condições imediatamente a montante e a jusante do choque pelos índices ② e ③, respectivamente. Esboce a distribuição de pressão ao longo do duto, indicando claramente as localizações das seções ① a ④. Esboce um diagrama *Ts* para o escoamento. Determine o número de Mach na seção ①.

***12.124** Um choque normal ocorre numa seção de duto de área constante, termicamente isolado. O escoamento é com atrito. Na seção ①, a alguma distância a montante do choque, $T_1 = 668°R$, $p_{0_1} = 78{,}2$ psia e $M_1 = 2{,}05$. Na seção ④, a alguma distância a jusante do choque, $M_4 = 1{,}00$. Calcule a velocidade do ar, V_2, imediatamente a montante do choque, onde $T_2 = 388°F$. Avalie a variação de entropia, $s_4 - s_1$.

---

* Esses problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

Apêndice A

DADOS DE PROPRIEDADES DE FLUIDOS

A.1 DENSIDADE RELATIVA

Dados da densidade relativa para diversos líquidos e sólidos comuns estão apresentados nas Figs. A.1*a* e A.1*b*, e nas Tabelas A.1 e A.2. Para líquidos, a densidade relativa é uma função da temperatura. (Massas específicas da água e do ar são dados como funções da temperatura nas Tabelas A.7 a A.10.) Para a maior parte dos líquidos a densidade relativa decresce com o aumento da temperatura. A água tem um comportamento singular: ela apresenta uma densidade máxima de 1000 kg/m³ (1,94 slug/pé³) a 4°C (39°F). A densidade máxima da água é usada como valor de referência para calcular a densidade relativa. Portanto,

$$SG \equiv \frac{\rho}{\rho_{H_2O}\ (\text{a } 4°C)}$$

Conseqüentemente, a densidade relativa máxima da água é exatamente a unidade.

(*a*) Água

(*b*) Mercúrio

Fig. A.1 Densidade relativa da água e do mercúrio como funções da temperatura. (Dados de [1].)
(A densidade relativa do mercúrio varia linearmente com a temperatura. A variação é dada por SG = 13,60 − 0,00240*T*, quando *T* é dada em graus Celsius.)

Tabela A.1 Densidades Relativas de Materiais Selecionados de Engenharia

(a) Líquidos Comuns de Manômetro a 20°C (Dados de [1, 2, 3].)

Líquido	Densidade Relativa
Óleo azul E. V. Hill	0,797
Óleo vermelho Meriam	0,827
Benzeno	0,879
Dibutil ftalato	1,04
Monocloronaftaleno	1,20
Tetracloreto de carbono	1,595
Bromoetilbenzeno (Meriam azul)	1,75
Tetrabromoetano	2,95
Mercúrio	13,55

(b) Materiais Comuns (Dados de [4].)

Material	Densidade Relativa (—)
Aço	7,83
Alumínio	2,64
Carvalho	0,77
Cobre	8,91
Concreto (curado)	2,4*
Concreto (líquido)	2,5*
Chumbo	11,4
Ferro fundido	7,08
Gelo (0°C)	0,917
Isopor (1 pcf**)	0,0160
Isopor (3 pcf)	0,0481
Latão	8,55
Madeira balsa	0,14
Pinheiro branco	0,43
Urânio (exaurido)	18,7

*Dependendo do agregado
**Libra-massa por pé cúbico

Tabela A.2 Propriedades Físicas de Líquidos Comuns a 20°C (Dados de [1, 5, 6].)

Líquido	Módulo de Compressibilidade Isoentrópica[a] (GN/m^2)	Densidade Relativa (—)
Água	2,24	0,998
Água do mar[b]	2,42	1,025
Benzeno	1,48	0,879
Etanol	—	0,789
Gasolina	—	0,72
Glicerina	4,59	1,26
Heptano	0,886	0,684
Mercúrio	28,5	13,55
Metanol	—	0,796
Óleo Castor	2,11	0,969
Óleo cru	—	0,82-0,92
Octano	0,963	0,702
Óleo lubrificante	1,44	0,88
Óleo SAE 10W	—	0,92
Querosene	1,43	0,82
Tetracloreto de carbono	1,36	1,595

[a]Calculado a partir da velocidade do som; 1 $GN/m^2 = 10^9\ N/m^2$ ($1\ N/m^2 = 1{,}45 \times 10^{-4}$ lbf/pol.^{2}).
[b]A viscosidade dinâmica da água do mar a 20°C é $\mu = 1{,}08 \times 10^{-3}\ N \cdot s/m^2$. (Portanto, a viscosidade cinemática da água do mar é em torno de 5% maior que a viscosidade da água potável.)

As densidades relativas para sólidos são relativamente insensíveis à temperatura; os valores dados na Tabela A.1 foram medidos a 20°C.

A densidade relativa da água do mar depende tanto da temperatura quanto do grau de salinidade. Um valor representativo para a água do oceano é SG = 1,025, como dado na Tabela A.2.

A.2 TENSÃO SUPERFICIAL

Os valores de tensão superficial, σ, para a maioria dos compostos orgânicos, são notavelmente similares à temperatura ambiente; a faixa típica é de 25 a 40 mN/m. O da água é mais alto, cerca de 73 mN/m a 20°C. Os metais líquidos têm valores na faixa entre 300 e 600 mN/m; o mercúrio líquido tem um valor de cerca de 480 mN/m a 20°C. A tensão superficial diminui com a temperatura; o decréscimo é aproximadamente linear com a temperatura absoluta. A tensão superficial à temperatura crítica é zero.

Os valores de σ são usualmente apresentados para superfícies em contato com o vapor puro do líquido em estudo ou com o ar. A baixas pressões, os dois valores são aproximadamente iguais (ver Tabela A.4).

A.3 A NATUREZA FÍSICA DA VISCOSIDADE

A viscosidade é uma medida do atrito interno do fluido, ou seja, da resistência à deformação. O mecanismo da viscosidade gasosa é razoavelmente bem compreendido, mas a teoria para os líquidos não está bem desenvolvida. Podemos obter algumas informações sobre a natureza física do escoamento viscoso discutindo brevemente esses mecanismos. A viscosidade de um fluido newtoniano é fixada pelo estado do material. Assim, $\mu = \mu(T, p)$. A temperatura é a variável mais importante, por isso vamos considerá-la primeiro. Existem excelentes equações empíricas para a viscosidade como uma função da temperatura.

A.3.1 Efeito da Temperatura sobre a Viscosidade

a. Gases

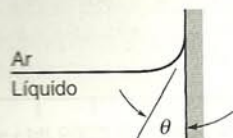
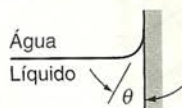
Todas as moléculas gasosas estão em contínuo movimento aleatório. Quando há um movimento da massa de gás em decorrên-

Tabela A.3 Propriedades da Atmosfera Padrão dos Estados Unidos (Dados de [7].)

Altitude Geométrica (m)	Temperatura (K)	p/p_{NM} (—)	ρ/ρ_{NM} (—)
−500	291,4	1,061	1,049
0	288,2	1,000[a]	1,000[b]
500	284,9	0,9421	0,9529
1.000	281,7	0,8870	0,9075
1.500	278,4	0,8345	0,8638
2.000	275,2	0,7846	0,8217
2.500	271,9	0,7372	0,7812
3.000	268,7	0,6920	0,7423
3.500	265,4	0,6492	0,7048
4.000	262,2	0,6085	0,6689
4.500	258,9	0,5700	0,6343
5.000	255,7	0,5334	0,6012
6.000	249,2	0,4660	0,5389
7.000	242,7	0,4057	0,4817
8.000	236,2	0,3519	0,4292
9.000	229,7	0,3040	0,3813
10.000	223,3	0,2615	0,3376
11.000	216,8	0,2240	0,2978
12.000	216,7	0,1915	0,2546
13.000	216,7	0,1636	0,2176
14.000	216,7	0,1399	0,1860
15.000	216,7	0,1195	0,1590
16.000	216,7	0,1022	0,1359
17.000	216,7	0,08734	0,1162
18.000	216,7	0,07466	0,09930
19.000	216,7	0,06383	0,08489
20.000	216,7	0,05457	0,07258
22.000	218,6	0,03995	0,05266
24.000	220,6	0,02933	0,03832
26.000	222,5	0,02160	0,02797
28.000	224,5	0,01595	0,02047
30.000	226,5	0,01181	0,01503
40.000	250,4	0,002834	0,003262
50.000	270,7	0,0007874	0,0008383
60.000	255,8	0,0002217	0,0002497
70.000	219,7	0,00005448	0,00007146
80.000	180,7	0,00001023	0,00001632
90.000	180,7	0,000001622	0,000002588

NM = Nível do mar.
[a]$p_{NM} = 1{,}01325 \times 10^5\ N/m^2$ (abs.) (= 14,696 psia).
[b]$\rho_{NM} = 1{,}2250\ kg/m^3$ (= 0,002377 slug/pé^3).

Tabela A.4 Tensão Superficial de Líquidos Comuns a 20°C (Dados de [1, 5, 8, 9].)

Líquido	Tensão Superficial, σ (mN/m)[a]	Ângulo de Contato, θ (graus)
(a) Em contato com o ar		
Água	72,8	~0
Benzeno	28,9	
Etanol	22,3	
Glicerina	63,0	
Hexano	18,4	
Mercúrio	484	140
Metanol	22,6	
Octano	21,8	
Óleo lubrificante	25-35	
Querosene	26,8	
Tetracloreto de carbono	27,0	
(b) Em contato com a água		
Benzeno	35,0	
Hexano	51,1	
Mercúrio	375	140
Metanol	22,7	
Octano	50,8	
Tetracloreto de carbono	45,0	

[a] 1 mN/m = 10^{-3} N/m.

cia do escoamento, o movimento de massa é sobreposto aos movimentos aleatórios. Ele é então distribuído por todo o fluido pelas colisões moleculares. Análises fundamentadas na teoria cinética predizem

$$\mu \propto \sqrt{T}$$

A previsão da teoria cinética concorda muito bem com as tendências experimentais, mas a constante de proporcionalidade e um ou mais fatores de correção devem ser determinados; isto limita a aplicação prática dessa equação simples.

Se dois ou mais pontos experimentais estão disponíveis, os dados poderão ser correlacionados pela equação empírica de Sutherland [7]

$$\mu = \frac{bT^{1/2}}{1 + S/T} \tag{A.1}$$

As constantes b e S podem ser determinadas com mais facilidade escrevendo-se

$$\mu = \frac{bT^{3/2}}{S + T}$$

ou

$$\frac{T^{3/2}}{\mu} = \left(\frac{1}{b}\right)T + \frac{S}{b}$$

(Compare isso com $y = mx + c$.) De um gráfico de $T^{3/2}/\mu$ *versus* T, pode-se obter a inclinação, $1/b$, e a ordenada para abscissa nula, S/b. Para o ar,

$$b = 1{,}458 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}^{1/2}}$$
$$S = 110{,}4 \text{ K}$$

Essas constantes foram usadas com a Eq. A.1 para calcular as viscosidades para a atmosfera padrão em [7], os valores da viscosidade do ar para várias temperaturas mostrados na Tabela A.10 e, usando fatores de conversão apropriados, os valores mostrados na Tabela A.9.

b. Líquidos

As viscosidades para líquidos não podem ser bem estimadas teoricamente. O fenômeno da transferência de quantidade de movimento por colisões moleculares é ofuscado nos líquidos pelos efeitos de campos de força interagindo entre grupos de moléculas líquidas muito próximas.

As viscosidades dos líquidos são fortemente afetadas pela temperatura. Esta dependência da temperatura absoluta é bem representada pela equação empírica

$$\mu = Ae^{B/(T-C)} \tag{A.2}$$

ou pela forma equivalente

$$\mu = A10^{B/(T-C)} \tag{A.3}$$

onde T é a temperatura absoluta.

A Eq. A.3 requer pelo menos três pontos para ajustar A, B e C. Em teoria, é possível determinar as constantes a partir de medidas da viscosidade em apenas três temperaturas. Uma prática melhor é usar mais dados e obter as constantes por meio de um ajuste estatístico dos dados ou regressão.

Após o desenvolvimento da regressão, adote sempre o procedimento de comparar a linha ou a curva resultante com os dados de medições. A melhor metodologia é fazer uma inspeção crítica de um gráfico da curva obtida comparada com os dados disponíveis. Em geral, os resultados da regressão serão satisfatórios somente quando a qualidade dos dados disponíveis e aqueles da correlação empírica forem sabidamente excelentes.

Dados para a viscosidade dinâmica da água são bem ajustados usando as constantes $A = 2{,}414 \times 10^{-5}$ N·s/m², $B = 247{,}8$ K e $C = 140$ K. A referência 10 estabelece que, usando essas constantes na Eq. A.3, pode-se predizer a viscosidade da água com um erro de ± 2,5 por cento numa faixa de temperaturas de 0 a 370°C. A Eq. A.3 foi usada para calcular os valores da viscosidade da água para várias temperaturas mostrados na Tabela A.8 e, usando fatores de conversão apropriados, os valores mostrados na Tabela A.7.

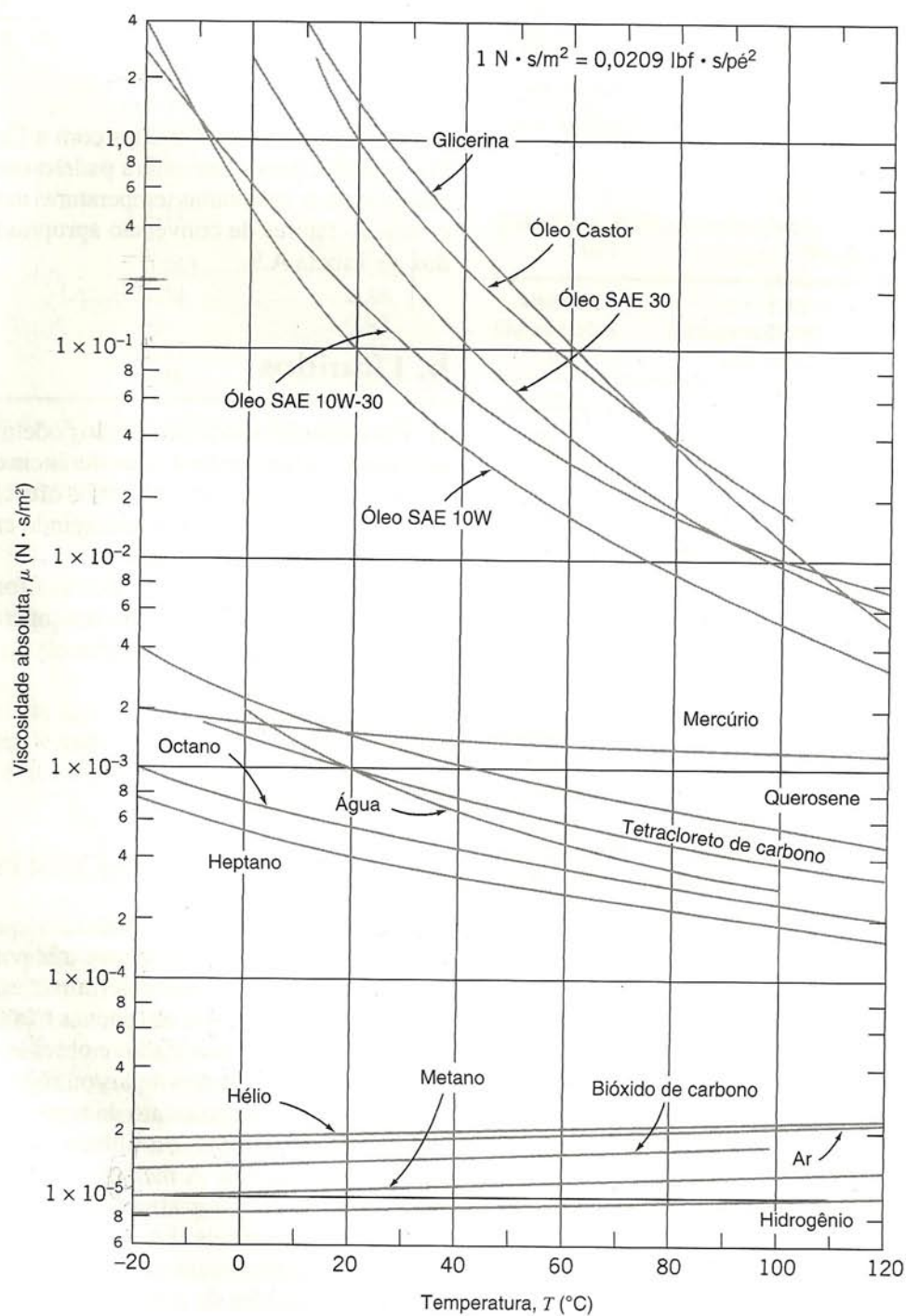



Fig. A.2 Viscosidade dinâmica (absoluta) de fluidos comuns como uma função da temperatura. (Dados de [1, 6 e 10].)

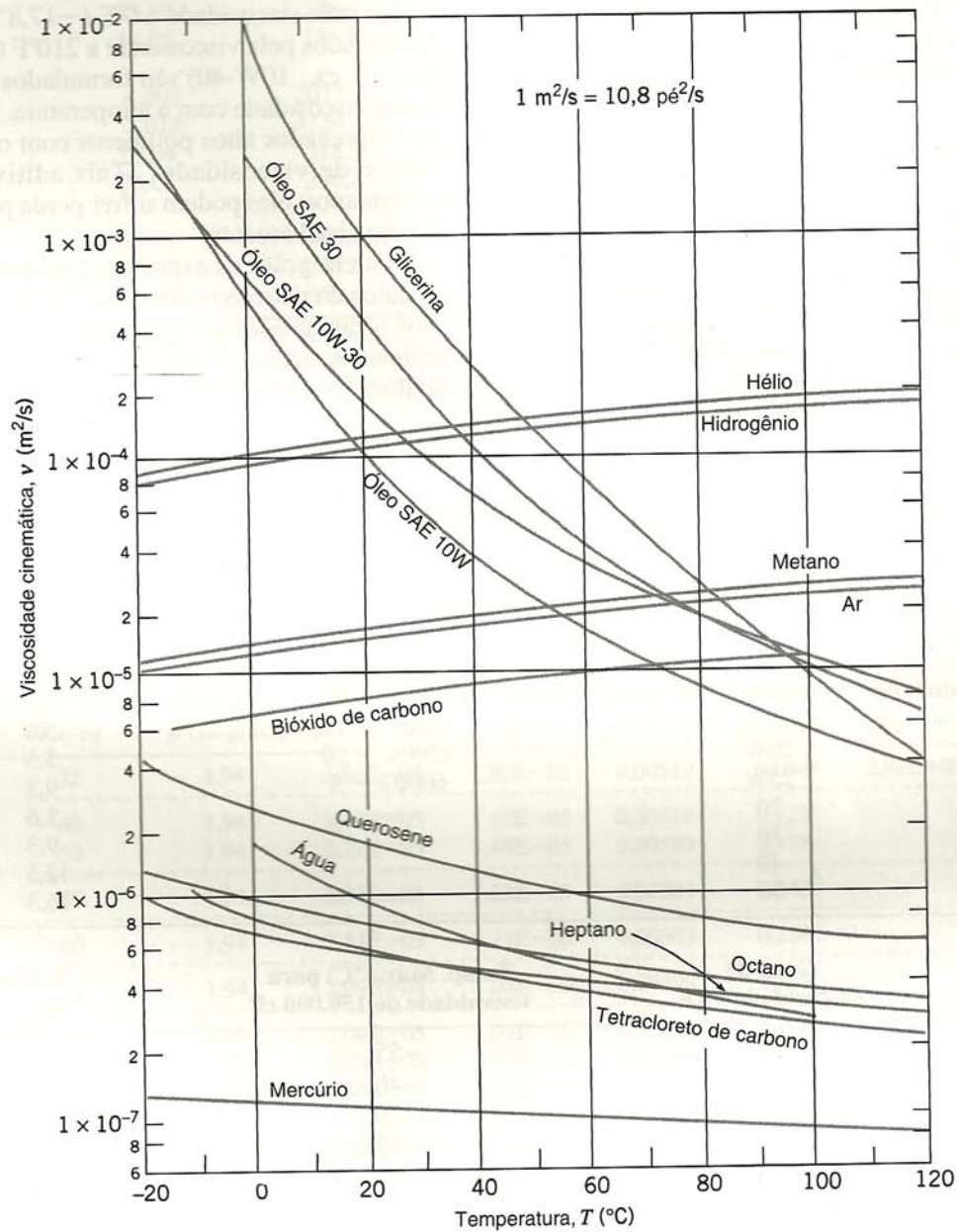



Fig. A.3 Viscosidade cinemática de fluidos comuns (à pressão atmosférica) como uma função da temperatura. (Dados de [1, 6 e 10].)

Note que a viscosidade de um líquido decresce com a temperatura, enquanto que a de um gás aumenta com a temperatura.

A.3.2 Efeito da Pressão sobre a Viscosidade

a. Gases

A viscosidade dos gases é essencialmente independente da pressão entre uns poucos centésimos de uma atmosfera e umas poucas atmosferas. Entretanto, a viscosidade a pressões elevadas aumenta com a pressão (ou com a massa específica).

b. Líquidos

As viscosidades da maioria dos líquidos não são afetadas por pressões moderadas, porém grandes aumentos foram verificados a pressões muito altas. Por exemplo, a viscosidade da água a 10.000 atm é o dobro daquela a 1 atm. Compostos mais complexos apresentam um aumento de viscosidade de diversas ordens de grandeza para a mesma faixa de pressão.

Mais informações podem ser encontradas em [11].

A.4 ÓLEOS LUBRIFICANTES

Os óleos lubrificantes de motores e de transmissões são classificados pela viscosidade de acordo com normas estabelecidas pela Society of Automotive Engineers [12]. As faixas de viscosidades permitidas para diversos graus são dadas na Tabela A.5.

Os números de viscosidade com W (p. ex., 20W) são classificados pela viscosidade a 0°F (−17,8°C). Aqueles sem W são classificados pela viscosidade a 210°F (100°C). Os óleos multigraus (p. ex., 10W-40) são formulados para minimizar a variação da viscosidade com a temperatura. Na mistura desses óleos são empregados altos polímeros com o objetivo de melhorar o "índice de viscosidade". Tais aditivos são altamente não newtonianos; eles podem sofrer perda permanente de viscosidade pelo cisalhamento.

Existem gráficos especiais para estimar a viscosidade dos produtos do petróleo como uma função da temperatura. Os gráficos foram usados para desenvolver os dados para os óleos lubrificantes típicos plotados nas Figs. A.2 e A.3. Para maiores detalhes, consulte [15].

Tabela A.5 Faixas de Viscosidades Permissíveis para Lubrificantes (Dados de [12-14].)

Óleo de Motor	Grau de Viscosidade SAE	Viscosidade Máx. (cP)[a] à Temp. (°C)	Viscosidade (cSt)[b] a 100°C Mín.	Máx.
	0W	3250 a − 30	3,8	—
	5W	3500 a − 25	3,8	—
	10W	3500 a − 20	4,1	—
	15W	3500 a − 15	5,6	—
	20W	4500 a − 10	5,6	—
	25W	6000 a − 5	9,3	—
	20	—	5,6	<9,3
	30	—	9,3	<12,5
	40	—	12,5	<16,3
	50	—	16,3	<21,9
Lubrificante de Transmissão de Eixo e Manual	**Grau de Viscosidade SAE**	**Temp. Máx. (°C) para viscosidade de 150.000 cP**	**Viscosidade (cSt) a 100°C Mín.**	**Máx.**
	70W	−55	4,1	—
	75W	−40	4,1	—
	80W	−26	7,0	—
	85W	−12	11,0	—
	90	—	13,5	<24,0
	140	—	24,0	<41,0
	250	—	41,0	—
Fluido de Transmissão Automática (Típico)	**Viscosidade Máxima (cP)**	**Temperatura (°C)**	**Viscosidade (cSt) a 100°C Mín.**	**Máx.**
	50 000	−40	6,5	8,5
	4 000	−23,3	6,5	8,5
	1 700	−18	6,5	8,5

[a] 1 centipoise = 1 cP = 1 mPa · s = 10^{-3} Pa · s (= $2,09 \times 10^{-5}$ lbf · s/pé^2).
[b] 1 centistoke = 10^{-6} m^2/s (= $1,08 \times 10^{-5}$ pé^2/s).

Tabela A.6 Propriedades Termodinâmicas de Gases Comuns na Condição Padrão ou "Standard"[a] (Dados de [7,16,17].)

Gás	Símbolo Químico	Massa Molecular, M_m	R^b $\left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$	c_p $\left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$	c_v $\left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$	$k = \frac{c_p}{c_v}$ (—)	R^b $\left(\frac{pé \cdot lbf}{lbm \cdot °R}\right)$	c_p $\left(\frac{Btu}{lbm \cdot °R}\right)$	c_v $\left(\frac{Btu}{lbm \cdot °R}\right)$
Ar	—	28,98	286,9	1004	717,4	1,40	53,33	0,2399	0,1713
Bióxido de carbono	CO_2	44,01	188,9	840,4	651,4	1,29	35,11	0,2007	0,1556
Hélio	He	4,003	2077	5225	3147	1,66	386,1	1,248	0,7517
Hidrogênio	H_2	2,016	4124	14.180	10.060	1,41	766,5	3,388	2,402
Metano	CH_4	16,04	518,3	2190	1672	1,31	96,32	0,5231	0,3993
Monóxido de carbono	CO	28,01	296,8	1039	742,1	1,40	55,17	0,2481	0,1772
Nitrogênio	N_2	28,01	296,8	1039	742,0	1,40	55,16	0,2481	0,1772
Oxigênio	O_2	32,00	259,8	909,4	649,6	1,40	48,29	0,2172	0,1551
Vapor[c]	H_2O	18,02	461,4	~ 2000	~ 1540	~ 1,30	85,78	~ 0,478	~ 0,368

[a]Temperatura e pressão na condição padrão ou "standard", $T = 15°C = 59°F$ e $p = 101,325$ kPa (abs.) = 14,696 psia.
[b]$R \equiv R_u/M_m$; $R_u = 8314,3$ J/(kgmol · K) = 1545,3 pé · lbf/(lbmol · °R); 1 Btu = 778,2 pé · lbf.
[c]O vapor d'água comporta-se como um gás ideal quando superaquecido de 55°C (100°F) ou mais.

Tabela A.7 Propriedades da Água (Unidades Usuais nos EUA)

Temperatura T (°F)	Massa Específica ρ (slug/pé³)	Viscosidade Dinâmica μ (lbf·s/pé²)	Viscosidade Cinemática ν (pé²/s)	Tensão Superficial σ (lbf/pé)	Pressão de Vapor p_v (psia)	Módulo de Compressibilidade E_v (psi)
32	1,94	3,66E−05	1,89E−05	0,00519	0,0886	2,92E+05
40	1,94	3,19E−05	1,65E−05	0,00514	0,122	
50	1,94	2,72E−05	1,40E−05	0,00509	0,178	
59	1,94	2,37E−05	1,23E−05	0,00504	0,247	
60	1,94	2,34E−05	1,21E−05	0,00503	0,256	
68	1,94	2,09E−05	1,08E−05	0,00499	0,339	
70	1,93	2,04E−05	1,05E−05	0,00498	0,363	3,20E+05
80	1,93	1,79E−05	9,27E−06	0,00492	0,507	
90	1,93	1,59E−05	8,24E−06	0,00486	0,699	
100	1,93	1,42E−05	7,38E−06	0,00480	0,950	
110	1,92	1,28E−05	6,66E−06	0,00474	1,28	
120	1,92	1,16E−05	6,05E−06	0,00467	1,70	3,32E+05
130	1,91	1,06E−05	5,53E−06	0,00461	2,23	
140	1,91	9,68E−06	5,08E−06	0,00454	2,89	
150	1,90	8,91E−06	4,69E−06	0,00448	3,72	
160	1,89	8,24E−06	4,35E−06	0,00441	4,75	
170	1,89	7,65E−06	4,05E−06	0,00434	6,00	
180	1,88	7,14E−06	3,79E−06	0,00427	7,52	
190	1,87	6,68E−06	3,56E−06	0,00420	9,34	
200	1,87	6,27E−06	3,36E−06	0,00413	11,5	3,08E+05
212	1,86	5,83E−06	3,14E−06	0,00404	14,7	

Tabela A.8 Propriedades da Água (Unidades SI)

Temperatura T (°C)	Massa Específica ρ (kg/m³)	Viscosidade Dinâmica μ (N · s/m²)	Viscosidade Cinemática ν (m²/s)	Tensão Superficial σ (N/m)	Pressão de Vapor p_v (kPa)	Módulo de Compressibilidade E_v (GPa)
0	1000	1,75E−03	1,75E−06	0,0757	0,661	2,01
5	1000	1,50E−03	1,50E−06	0,0749	0,872	
10	1000	1,30E−03	1,30E−06	0,0742	1,23	
15	999	1,14E−03	1,14E−06	0,0735	1,71	
20	998	1,00E−03	1,00E−06	0,0727	2,34	2,21
25	997	8,90E−04	8,93E−07	0,0720	3,17	
30	996	7,97E−04	8,01E−07	0,0712	4,25	
35	994	7,18E−04	7,23E−07	0,0704	5,63	
40	992	6,51E−04	6,57E−07	0,0696	7,38	
45	990	5,94E−04	6,00E−07	0,0688	9,59	
50	988	5,44E−04	5,51E−07	0,0679	12,4	2,29
55	986	5,01E−04	5,08E−07	0,0671	15,8	
60	983	4,63E−04	4,71E−07	0,0662	19,9	
65	980	4,30E−04	4,38E−07	0,0654	25,0	
70	978	4,00E−04	4,10E−07	0,0645	31,2	
75	975	3,74E−04	3,84E−07	0,0636	38,6	
80	972	3,51E−04	3,61E−07	0,0627	47,4	
85	969	3,30E−04	3,41E−07	0,0618	57,8	
90	965	3,11E−04	3,23E−07	0,0608	70,1	2,12
95	962	2,94E−04	3,06E−07	0,0599	84,6	
100	958	2,79E−04	2,91E−07	0,0589	101	

Tabela A.9 Propriedades do Ar à Pressão Atmosférica (Unidades Usuais nos EUA)

Temperatura T (°F)	Massa Específica ρ (slug/pé³)	Viscosidade Dinâmica μ (lbf·s/pé²)	Viscosidade Cinemática ν (pé²/s)
40	0,00247	3,63E−07	1,47E−04
50	0,00242	3,69E−07	1,52E−04
59	0,00238	3,74E−07	1,57E−04
60	0,00237	3,75E−07	1,58E−04
68	0,00234	3,79E−07	1,62E−04
70	0,00233	3,80E−07	1,63E−04
80	0,00229	3,86E−07	1,69E−04
90	0,00225	3,91E−07	1,74E−04
100	0,00221	3,97E−07	1,80E−04
110	0,00217	4,02E−07	1,86E−04
120	0,00213	4,07E−07	1,91E−04
130	0,00209	4,13E−07	1,97E−04
140	0,00206	4,18E−07	2,03E−04
150	0,00202	4,23E−07	2,09E−04
160	0,00199	4,28E−07	2,15E−04
170	0,00196	4,33E−07	2,21E−04
180	0,00193	4,38E−07	2,27E−04
190	0,00190	4,43E−07	2,33E−04
200	0,00187	4,48E−07	2,40E−04

Tabela A.10 Propriedades do Ar à Pressão Atmosférica (Unidades SI)

Temperatura T (°C)	Massa Específica ρ (kg/m³)	Viscosidade Dinâmica μ (N·s/m²)	Viscosidade Cinemática ν (m²/s)
0	1,29	1,72E−05	1,33E−05
5	1,27	1,74E−05	1,37E−05
10	1,25	1,77E−05	1,41E−05
15	1,23	1,79E−05	1,46E−05
20	1,21	1,81E−05	1,50E−05
25	1,19	1,84E−05	1,55E−05
30	1,17	1,86E−05	1,60E−05
35	1,15	1,88E−05	1,64E−05
40	1,13	1,91E−05	1,69E−05
45	1,11	1,93E−05	1,74E−05
50	1,09	1,95E−05	1,79E−05
55	1,08	1,98E−05	1,84E−05
60	1,06	2,00E−05	1,88E−05
65	1,04	2,02E−05	1,93E−05
70	1,03	2,04E−05	1,98E−05
75	1,01	2,07E−05	2,04E−05
80	1,00	2,09E−05	2,09E−05
85	0,987	2,11E−05	2,14E−05
90	0,973	2,13E−05	2,19E−05
95	0,960	2,15E−05	2,24E−05
100	0,947	2,17E−05	2,30E−05

REFERÊNCIAS

1. *Handbook of Chemistry and Physics,* 62nd ed. Cleveland, OH: Chemical Rubber Publishing Co., 1981–1982.
2. "Meriam Standard Indicating Fluids," Pamphlet No. 920GEN: 430-1, The Meriam Instrument Co., 10920 Madison Avenue, Cleveland, OH 44102.
3. E. Vernon Hill, Inc., P.O. Box 7053, Corte Madera, CA 94925.
4. Avallone, E. A., and T. Baumeister, III, eds., *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers,* 9th ed. New York: McGraw-Hill, 1987.
5. *Handbook of Tables for Applied Engineering Science.* Cleveland, OH: Chemical Rubber Publishing Co., 1970.
6. Vargaftik, N. B., *Tables on the Thermophysical Properties of Liquids and Gases,* 2nd ed. Washington, D.C.: Hemisphere Publishing Corp., 1975.
7. *The U.S. Standard Atmosphere (1976).* Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1976.
8. Trefethen, L., "Surface Tension in Fluid Mechanics," in *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics.* Cambridge, MA: The M.I.T. Press, 1972.
9. Streeter, V. L., ed., *Handbook of Fluid Dynamics.* New York: McGraw-Hill, 1961.
10. Touloukian, Y. S., S. C. Saxena, and P. Hestermans, *Thermophysical Properties of Matter, the TPRC Data Series, Vol. 11—Viscosity.* New York: Plenum Publishing Corp., 1975.
11. Reid, R. C., and T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids,* 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1966.
12. "Engine Oil Viscosity Classification—SAE Standard J300 Jun86," *SAE Handbook,* 1987 ed. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1987.
13. "Axle and Manual Transmission Lubricant Viscosity Classification—SAE Standard J306 Mar85," *SAE Handbook,* 1987 ed. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1987.
14. "Fluid for Passenger Car Type Automatic Transmissions—SAE Information Report J311 Apr86," *SAE Handbook,* 1987 ed. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1987.
15. ASTM Standard D 341–77, "Viscosity-Temperature Charts for Liquid Petroleum Products," American Society for Testing and Materials, 1916 Race Street, Philadelphia, PA 19103.
16. NASA, *Compressed Gas Handbook* (Revised). Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration, SP-3045, 1970.
17. ASME, *Thermodynamic and Transport Properties of Steam.* New York: American Society of Mechanical Engineers, 1967.

Apêndice B

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

A equação da continuidade em coordenadas cilíndricas para massa específica constante é

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \tag{B.1}$$

As tensões normais e de cisalhamento em coordenadas cilíndricas para massa específica e viscosidade constantes são

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} & \tau_{r\theta} &= \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \\
\sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) & \tau_{\theta z} &= \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) \\
\sigma_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} & \tau_{zr} &= \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

As equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas para massa específica e viscosidade constantes são

componente r:

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \\
&\qquad = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_r]\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right\}
\end{aligned} \tag{B.3a}$$

componente θ:

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \\
&\qquad = \rho g_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_\theta]\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right\}
\end{aligned} \tag{B.3b}$$

componente z:

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \\
&\qquad = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right\}
\end{aligned} \tag{B.3c}$$

Apêndice C

FILMES PARA MECÂNICA DOS FLUIDOS

São listados a seguir, por fornecedor, os títulos de fitas de vídeo sobre mecânica dos fluidos.

1. Encyclopaedia Britannica Educational Corporation
310 South Michigan Avenue
Chicago, Illinois 60604

Os vinte e dois filmes seguintes, desenvolvidos pelo *National Committee for Fluid Mechanics Films* (NCFMF),[1] encontram-se disponíveis (duração conforme assinalada):

Aerodynamic Generation of Sound (44 min, diretores: M. J. Lighthill, J. E. Ffowcs-Williams)
Boundary Layer Control (25 min, diretor: D. C. Hazen)
Cavitation (31 min, diretor: P. Eisenberg)
Channel Flow of a Compressible Fluid (29 min, diretor: D. E. Coles)
Deformation of Continuous Media (38 min, diretor: J. L. Lumley)
Eulerian and Lagrangian Descriptions in Fluid Mechanics (27 min, diretor: J. L. Lumley)
Flow Instabilities (27 min, diretor: E. L. Mollo-Christensen)
Flow Visualization (31 min, diretor: S. J. Kline)
The Fluid Dynamics of Drag[2] (4 partes, 120 min, diretor: A. H. Shapiro)
Fundamentals of Boundary Layers (24 min, diretor: F. H. Abernathy)
Low-Reynolds-Number Flows (33 min, diretor: Sir G. I. Taylor)
Magnetohydrodynamics (27 min, diretor: J. A. Shercliff)
Pressure Fields and Fluid Acceleration (30 min, diretor: A. H. Shapiro)
Rarefied Gas Dynamics (33 min, diretores: F. C. Hurlbut, F. S. Sherman)
Rheological Behavior of Fluids (22 min, diretor: H. Markovitz)
Rotating Flows (29 min, diretor: D. Fultz)
Secondary Flow (30 min, diretor: E. S. Taylor)
Stratified Flow (26 min, diretor: R. R. Long)
Surface Tension in Fluid Mechanics (29 min, diretor: L. M. Trefethen)
Turbulence (29 min, diretor: R. W. Stewart)
Vorticity (2 partes, 44 min, diretor: A. H. Shapiro)
Waves in Fluids (33 min, diretor: A. E. Bryson)

[1]Resumos detalhados dos filmes da NCFMF estão contidos em *Illustatred Experiments in Fluids Mechanics* (Cambridge, MA: The M.I.T. Press, 1972).
[2]O conteúdo desse filme está resumido e ilustrado em *Shape and Flow: The Fluid Dynamics of Drag*, por Ascher H. Shapiro (New York: Anchor Books, 1961).

2. University of Iowa
AVC Marketing
215 Seashore Center
Iowa City, Iowa 52242-1402

Os seis filmes seguintes foram preparados por H. Rouse como uma série, na ordem listada. Eles podem ser vistos individualmente sem perda maior de continuidade.

Introduction to the Study of Fluid Motion (24 min). Este filme de orientação mostra uma variedade de fenômenos de escoamento já bem conhecidos. O emprego de modelos em escala para o estudo empírico de fenômenos complexos é ilustrado; o significado dos números de Euler, Froude, Mach e Reynolds, como parâmetros de semelhança, é mostrado com a utilização de diversas seqüências de escoamentos para o modelo e para o protótipo.

Fundamental Principles of Flow (23 min). Os conceitos básicos e as relações físicas necessárias para a análise dos movimentos dos fluidos são desenvolvidos neste filme. As equações da continuidade, da quantidade de movimento e da energia são deduzidas e empregadas para analisar um dispositivo de propulsão a jato.

Fluid Motion in a Gravitational Field (23 min). Os efeitos de empuxo e os escoamentos com superfície livre são ilustrados neste filme. O número de Froude é mostrado como um parâmetro fundamental para escoamentos com superfície livre. Os movimentos de ondas são mostrados para escoamentos em canais abertos e escoamentos com estratificação de massa específica.

Characteristics of Laminar and Turbulent Flow (26 min). Corante, fumaça, partículas em suspensão e bolhas de hidrogênio são usados para visualizar escoamentos laminares e turbulentos. As instabilidades que conduzem à turbulência são mostradas; a produção e extinção da turbulência e a mistura são descritas.

Form Drag, Lift, and Propulsion (24 min). Os efeitos da separação da camada-limite sobre a configuração do escoamento e as distribuições de pressão são mostrados para diversas formas de corpos. As características básicas de formas de sustentação, incluindo efeitos de razão de aspecto, são discutidas, e os resultados são aplicados à análise do desempenho de hélices e conversores de torque.

Effects of Fluid Compressibility (17 min). A analogia hidráulica entre o escoamento de líquido em canal aberto e o escoamento de gás compressível é utilizada para mostrar configurações de ondas representativas. A visualização do escoamento pelo método ótico de Schlieren é empregada num túnel de vento super-

sônico para mostrar configurações de escoamento em torno de diversos corpos, a velocidades subsônicas e supersônicas.

3. American Institute of Aeronautics and Astronautics
   370 L'Enfant Promenade, S.W.
   Washington, D.C. 20024-2518

America's Wings (29 min). Indivíduos que fizeram importantes contribuições para o desenvolvimento de aviões para vôo de alta velocidade são entrevistados; eles discutem e explicam suas contribuições. Trata-se de um filme eficaz para uma platéia relativamente sofisticada.

4. Purdue University
   Center for Instructional Services
   Film Booking
   Hicks Undergaduate Library
   West Lafayette, Indiana 47907

Tacoma Narrows Bridge Collapse (3 min, mudo). Este filme curto contém a espetacular filmagem original do colapso espontâneo, sob uma leve brisa, da ponte de 2800 pés suspensa sobre o estreito de Tacoma, ocorrido em 7 de novembro de 1940.

Apêndice D

CURVAS DE DESEMPENHO SELECIONADAS PARA BOMBAS E VENTILADORES

D.1 INTRODUÇÃO

Muitas empresas, em todo o mundo, fabricam máquinas de fluxo em numerosos tipos e tamanhos padrões. Cada fabricante publica dados completos de desempenho a fim de permitir a aplicação de suas máquinas em sistemas. Este Apêndice contém dados de desempenho selecionados para uso na resolução de problemas de sistemas de bombas e ventiladores. Dois tipos de bomba e um tipo de ventilador são incluídos.

A escolha de um fabricante pode basear-se na prática, na localização, ou no custo. Uma vez escolhido um fabricante, a seleção da máquina é um processo em três etapas:

1. Selecione um tipo de máquina adequado à aplicação a partir de um catálogo completo de um fabricante, que dê as faixas de elevação de pressão (altura de carga) e a vazão para cada tipo de máquina.
2. Escolha um modelo de máquina apropriado e uma velocidade do motor a partir de um diagrama mestre de seleção que superpõe as faixas de altura de carga e de vazão de uma série de máquinas em um só gráfico.
3. Verifique se a máquina pré-selecionada é satisfatória para a aplicação pretendida usando uma curva de desempenho detalhada para a máquina específica.

É aconselhável consultar engenheiros de sistemas experientes, sejam eles empregados pelo fabricante da máquina ou de sua própria organização, antes de tomar a decisão final de compra.

Hoje em dia, muitos fabricantes usam procedimentos informatizados para selecionar uma máquina que seja mais adequada para cada aplicação. Tais procedimentos são, simplesmente, versões automatizadas do método tradicional de seleção. O emprego do diagrama de seleção e das curvas detalhadas de desempenho é ilustrado a seguir para bombas e ventiladores utilizando os dados de um fabricante de cada tipo de máquina. A literatura de outros fabricantes difere nos detalhes, mas contém as informações necessárias para a seleção de máquinas.

D.2 SELEÇÃO DE BOMBAS

As Figs. D.1 a D.10 mostram dados representativos para bombas Peerless[1] horizontais de carcaça bipartida, de um só estágio (série AE) e as Figs. D.11 e D.12 para bombas Peerless de estágios múltiplos (séries TU e TUT).

As Figs. D.1 e D.2 são diagramas mestres de seleção de bombas da série AE para 3500 e 1750 rpm nominais. Nesses diagramas, o número do modelo (p. ex., 6AE14) indica a bitola da linha de descarga (tubo de 6 pol. nominais), a série da bomba (AE) e o diâmetro máximo do rotor (aproximadamente 14 pol.).

As Figs. D.3 a D.10 são diagramas detalhados de desempenho para modelos individuais de bombas da série AE.

As Figs. D.11 e D.12 são diagramas mestres de seleção para as séries TU e TUT de 1750 rpm nominais. Os dados para as bombas de dois estágios são apresentados na Fig. D.11, enquanto a Fig. D.12 contém dados para bombas com três, quatro e cinco estágios.

Cada diagrama de desempenho de bomba contém curvas da altura de carga total versus vazão volumétrica; curvas para diversos diâmetros de rotores — testados na mesma carcaça — são apresentadas num único gráfico. Cada diagrama de desempenho também contém contornos mostrando a eficiência da bomba e a potência do motor; o requisito de altura de sucção líquida positiva (*NPSH*), uma vez que varia com a vazão, é mostrado pela curva na parte inferior de cada diagrama. O ponto de melhor eficiência (PME ou, em inglês, *best efficiency point — BEP*) para cada rotor pode ser encontrado usando-se os contornos de efi-ciência.

O emprego dos diagramas mestres de seleção e das curvas detalhadas de desempenho é ilustrado no Problema-Exemplo D.1.

---

[1]Peerless Pump Company, P.O. Box 7026, Indianapolis, IN 46207-7026.

EXEMPLO D.1 — Procedimento de Seleção de Bomba

Selecione uma bomba para fornecer 1750 gpm de água com uma altura de carga total de 120 pés. Escolha o modelo apropriado da bomba e a velocidade do motor. Especifique a eficiência da bomba, a potência do motor e o requisito de *NPSH*.

PROBLEMA-EXEMPLO D.1

DADOS: Selecione uma bomba para fornecer 1750 gpm de água com altura de carga total de 120 pés.

DETERMINAR: **(a)** O modelo da bomba e a velocidade do motor.
(b) A eficiência da bomba.
(c) A potência do motor.
(d) O requisito de *NPSH*.

SOLUÇÃO:

Use o procedimento de seleção descrito na Seção D.1. (Os números abaixo correspondem às etapas enumeradas no procedimento.)

1. Primeiro, selecione um tipo de máquina adequado à aplicação. (Esta etapa, na verdade, requer um catálogo completo do fabricante que não é reproduzido aqui. O catálogo da linha de produtos Peerless especifica uma vazão e uma altura de carga máximas de 2500 gpm e 660 pés para as bombas da série AE. Portanto, o desempenho exigido pode ser obtido; admita que a seleção deve ser feita nesta série.)
2. Segundo, consulte o diagrama mestre de seleção de bombas. O ponto de operação desejado não se encontra dentro de qualquer contorno do diagrama de seleção para 3500 rpm (Fig. D.1). Do diagrama para 1750 rpm (Fig. D.2), selecione uma bomba modelo 6AE14. Da curva de desempenho para a bomba 6AE14 (Fig. D.6), escolha um rotor de 13 pol.
3. Terceiro, verifique o desempenho da máquina usando o diagrama detalhado. No diagrama de desempenho para o modelo 6AE14, estenda uma linha vertical na abscissa $Q = 1750$ gpm. Projete horizontalmente o ponto $H = 120$ pés da ordenada até a linha vertical. A interseção é o desempenho da bomba no ponto de operação desejado:

$$\eta \approx 85{,}8\% \qquad \mathcal{P} \approx 64 \text{ hp}$$

A partir do ponto de operação, projete uma linha vertical para baixo até a curva de requisito de *NPSH*. Na interseção, leia $NPSH \approx 17$ pés.

{Isto completa o processo de seleção para essa bomba. Engenheiros experientes devem ser consultados para certificar que a condição de operação do sistema foi prevista com precisão e que a bomba foi selecionada corretamente.}

D.3 SELEÇÃO DE VENTILADORES

A seleção de ventiladores é similar à seleção de bombas. Um diagrama mestre de seleção representativo é mostrado na Fig. D.13 para uma série de ventiladores axiais Buffalo Forge.[2] O diagrama mostra o desempenho da série completa de ventiladores como uma função do tamanho do ventilador e da velocidade do motor.

[2]Buffalo Forge, 465 Broadway, Buffalo, NY 14240.

O diagrama mestre de seleção de ventiladores é usado para selecionar um tamanho de ventilador e uma velocidade de motor para consideração detalhada. A avaliação final da adequação do modelo de ventilador à aplicação em vista é feita usando-se diagramas detalhados de desempenho para o modelo específico. Uma amostra de diagrama de desempenho para um ventilador de pás axiais Buffalo Forge Tamanho 48 é apresentada na Fig. D.14.

O diagrama de desempenho é plotado como aumento total de pressão *versus* vazão volumétrica. A Fig. D.14 contém curvas para as rodas HB, LB e MB, operando a várias velocidades constantes; as faixas sombreadas representam a eficiência total medida para os ventiladores.

EXEMPLO D.2 — Procedimento de Seleção de Ventilador

Selecione um ventilador de fluxo axial para fornecer 40.000 cfm de ar padrão a 1,25 pol. de H_2O de pressão total. Escolha o modelo apropriado de ventilador e a velocidade do motor. Especifique a eficiência do ventilador e a potência do motor.

PROBLEMA-EXEMPLO D.2

DADOS: Selecione um ventilador axial para fornecer 40.000 cfm de ar padrão a 1,25 pol. de H_2O de altura de carga total.

DETERMINAR: **(a)** O tamanho do ventilador e a velocidade do motor.
(b) A eficiência do ventilador.
(c) A potência do motor.

SOLUÇÃO:

Use o procedimento de seleção de ventiladores descrito na Seção D.1. (Os números a seguir correspondem às etapas enumeradas no procedimento.)

1. Primeiro, selecione um tipo de máquina adequado à aplicação. (Esta etapa, na verdade, requer o catálogo completo do fabricante que não é reproduzido aqui. Admita que a seleção do ventilador deve ser feita a partir dos dados para máquinas axiais apresentados na Fig. D.13.)
2. Segundo, consulte o diagrama mestre de seleção. O ponto de operação desejado encontra-se dentro do contorno para o Tamanho 48 do diagrama de seleção (Fig. D.13). Para alcançar o desempenho desejado, é necessário acionar o ventilador a 870 rpm.

3. Terceiro, verifique o desempenho da máquina usando o diagrama detalhado (Fig. D.14). No diagrama de desempenho detalhado, estenda uma linha vertical na abscissa $Q = 40.000$ cfm. Projete horizontalmente o ponto $p = 1,25$ pol. de H_2O da ordenada até a linha vertical. A interseção é o ponto de operação desejado.

Essas condições de operação não podem ser providas por uma roda Tipo LB; entretanto, elas estão próximas do pico de eficiência máxima para ambas as rodas, HB e MB. As condições de operação podem ser supridas a cerca de 72% de eficiência total usando-se uma roda HB. Com uma roda MB, pode-se esperar eficiência ligeiramente superior a 75%. Do diagrama, o "fator de eficiência" é 4780 para $\eta = 0,75$, e o requisito de potência do motor deve ser

$$\mathcal{P} = \frac{\text{Pressão Total} \times \text{Capacidade}}{\text{Fator de Eficiência}} =$$

$$= \frac{1,25 \text{ pol. } H_2O \times 40.000 \text{ pé}^3 / \text{min}}{4780} = 10,5 \text{ hp}$$

Isto completa o processo de seleção do ventilador. Novamente, engenheiros de sistemas experientes devem ser consultados para certificar que a condição de operação do sistema foi prevista com precisão e que o ventilador foi selecionado corretamente.

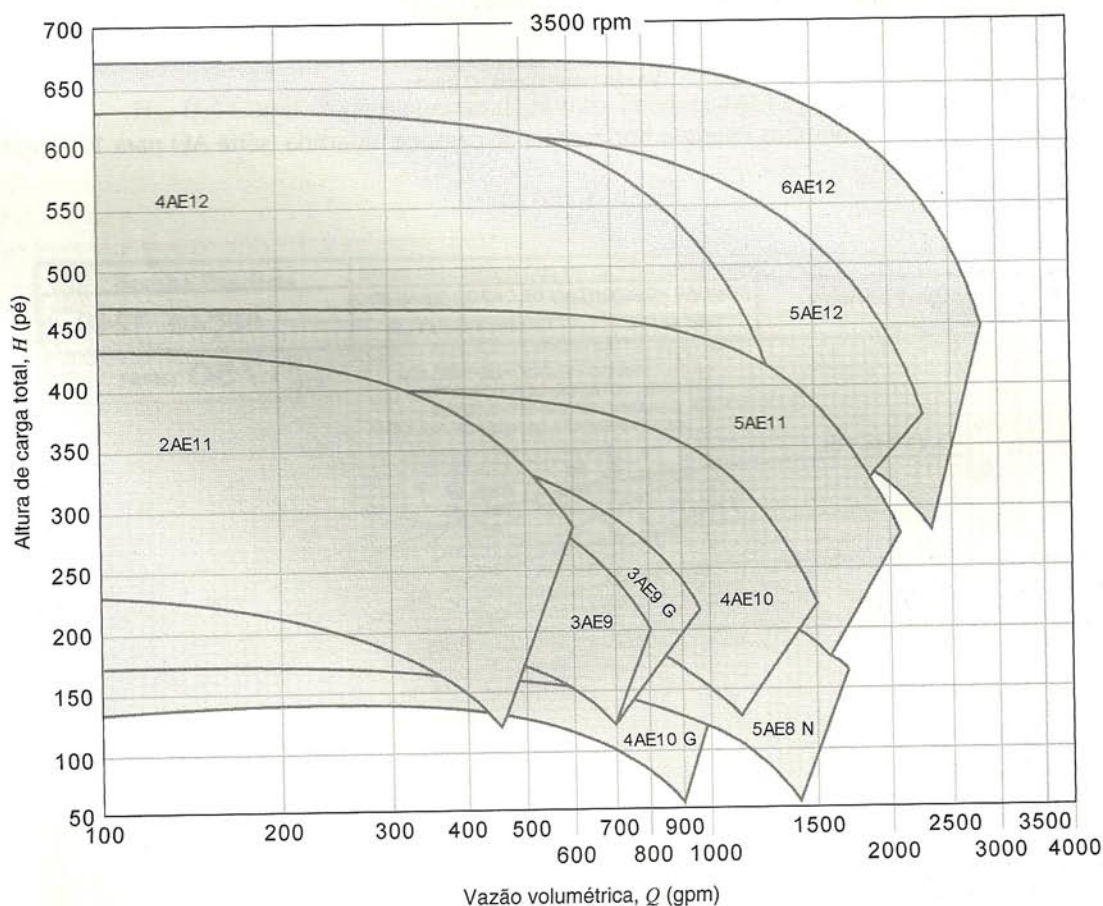



Fig. D.1 Diagrama de seleção de bombas Peerless horizontais de carcaça bipartida (série AE) para 3500 rpm nominais.

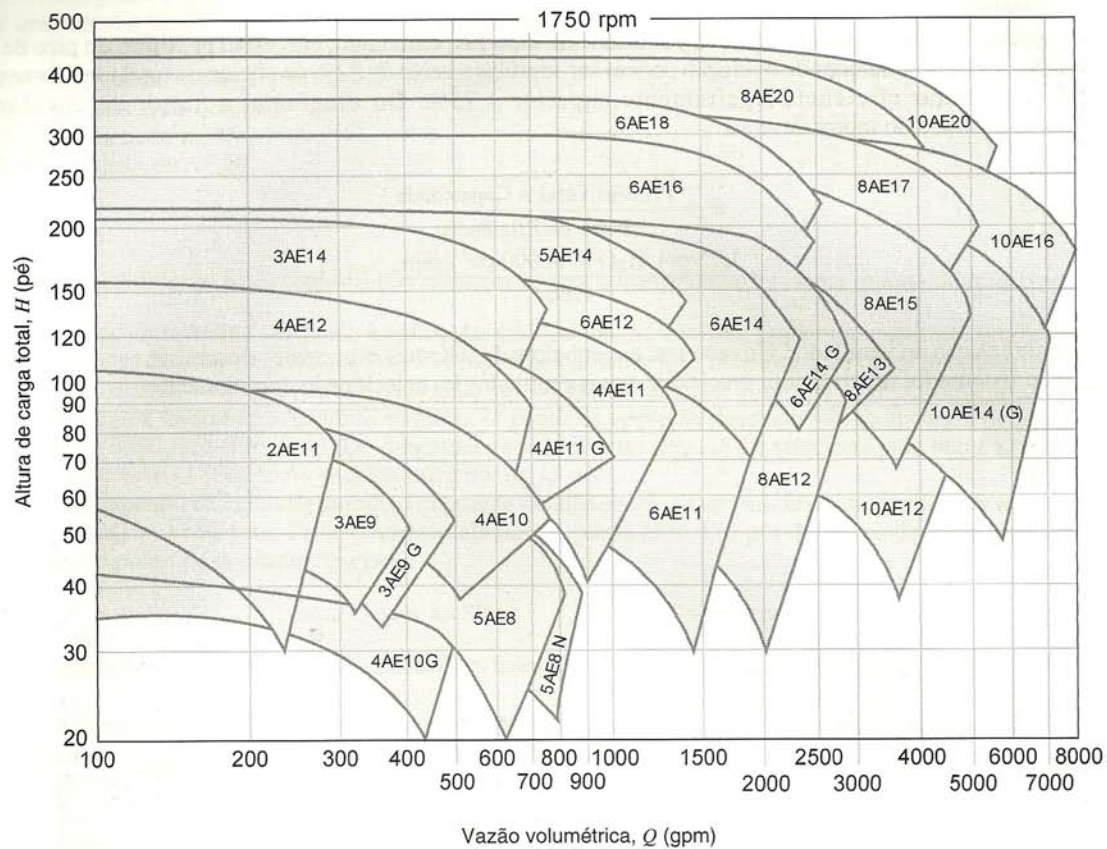



Fig. D.2 Diagrama de seleção de bombas Peerless horizontais de carcaça bipartida (série AE) para 1750 rpm nominais.

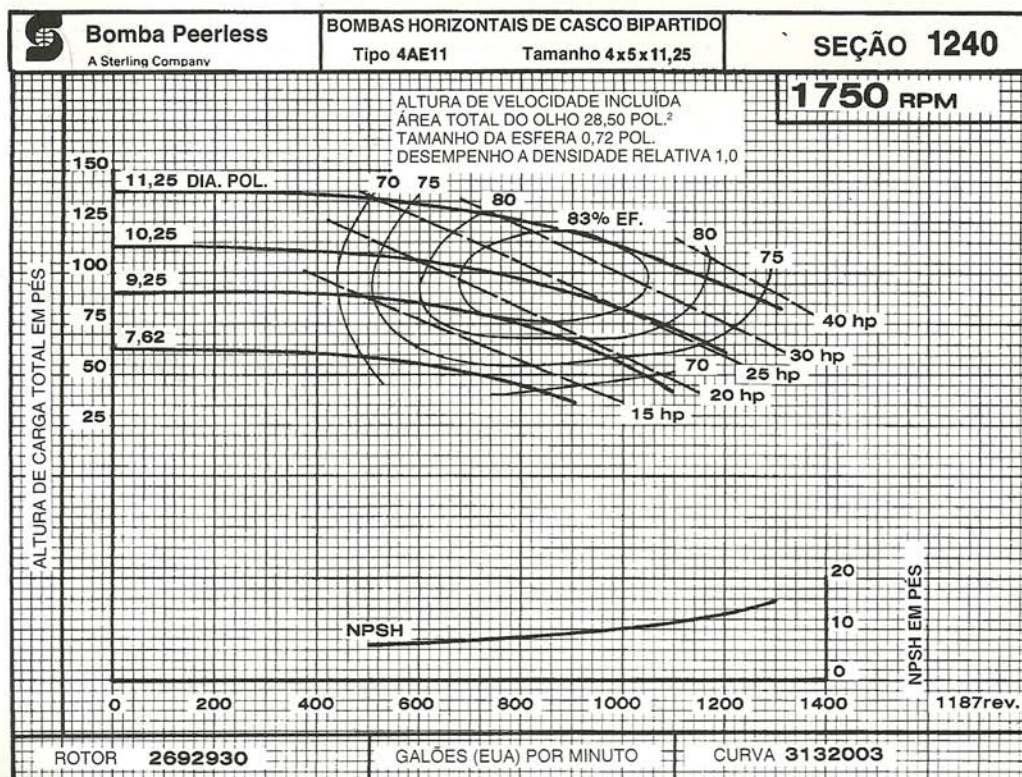



Fig. D.3 Curva de desempenho da bomba Peerless 4AE11 para 1750 rpm.

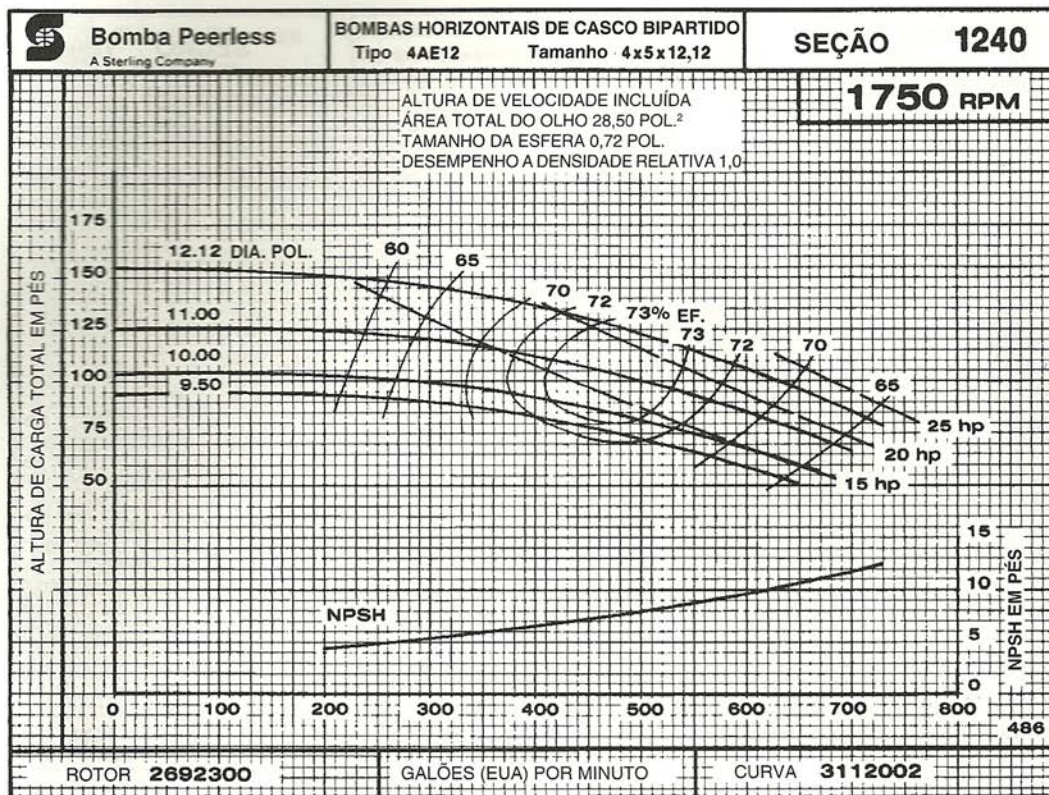



Fig. D.4 Curva de desempenho da bomba Peerless 4AE12 para 1750 rpm.

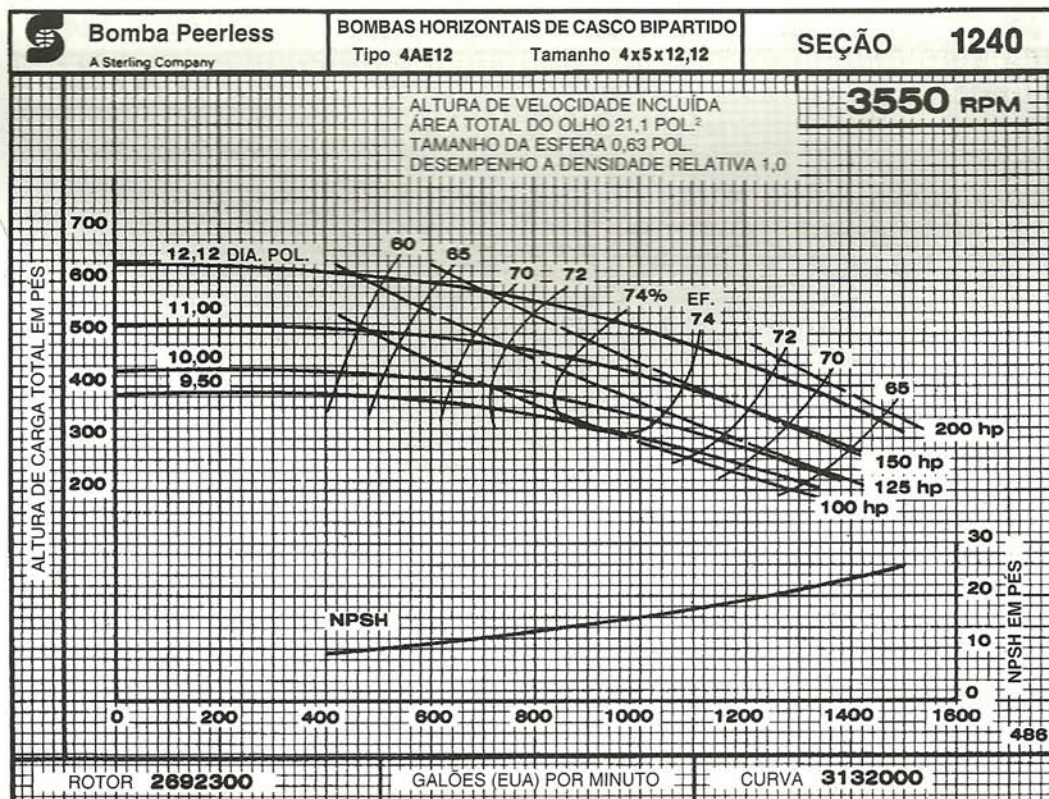



Fig. D.5 Curva de desempenho da bomba Peerless 4AE12 para 3550 rpm.

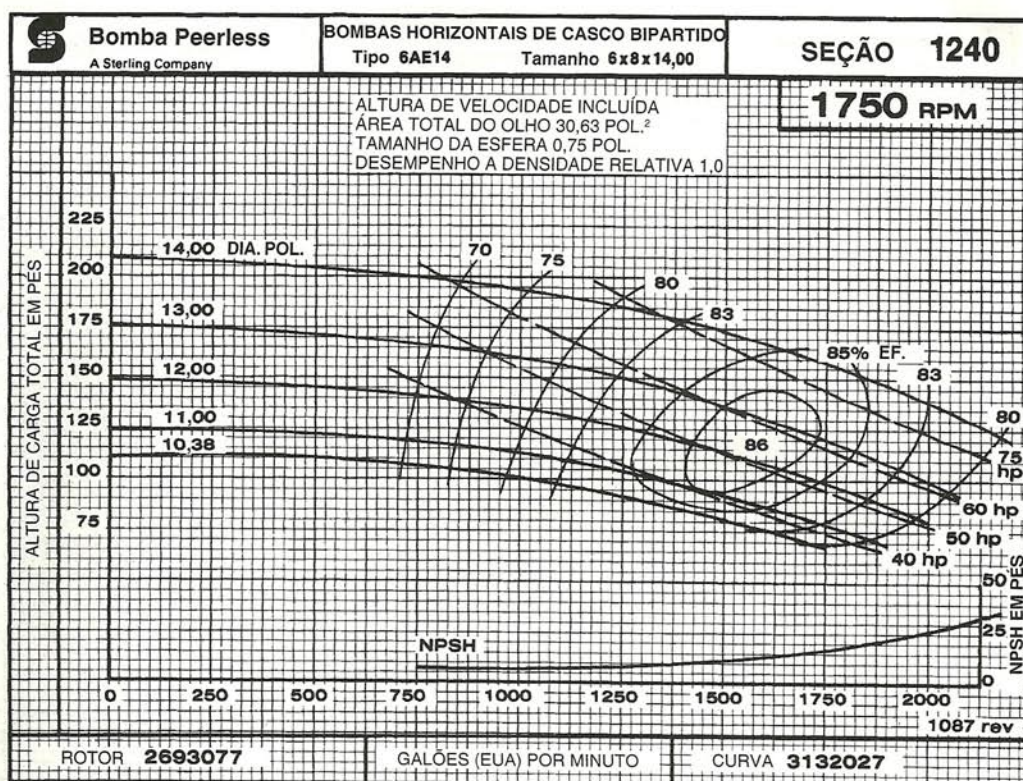



Fig. D.6 Curva de desempenho da bomba Peerless 6AE14 para 1750 rpm.

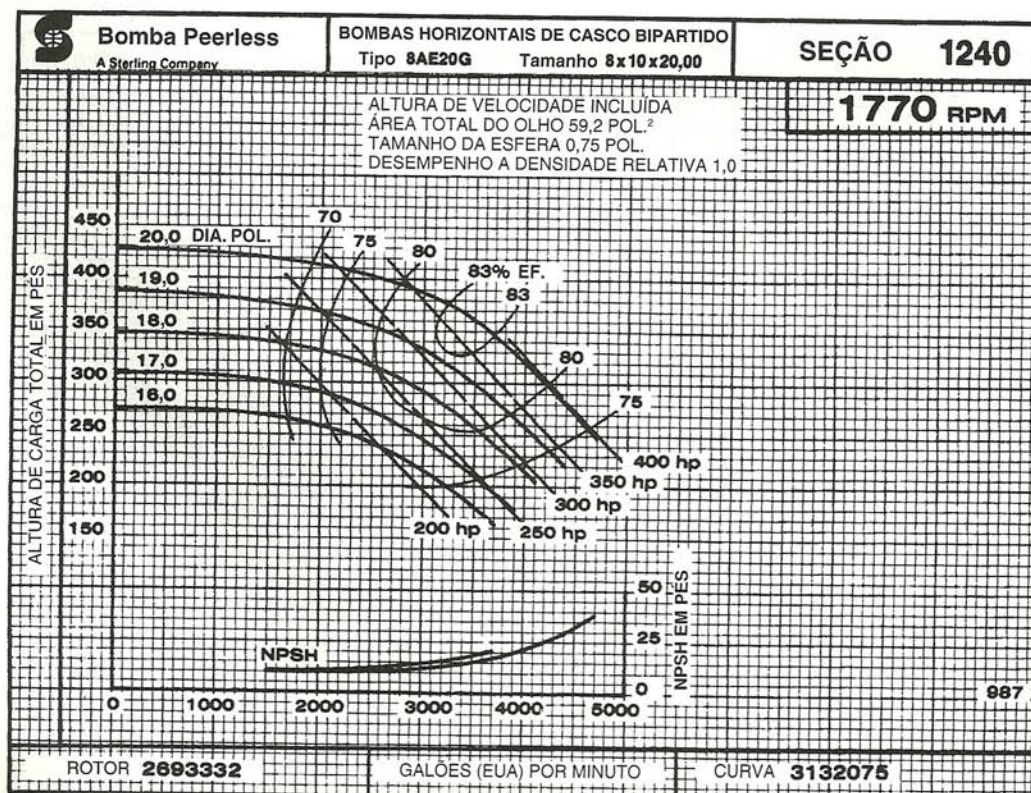



Fig. D.7 Curva de desempenho da bomba Peerless 8AE20G para 1770 rpm.

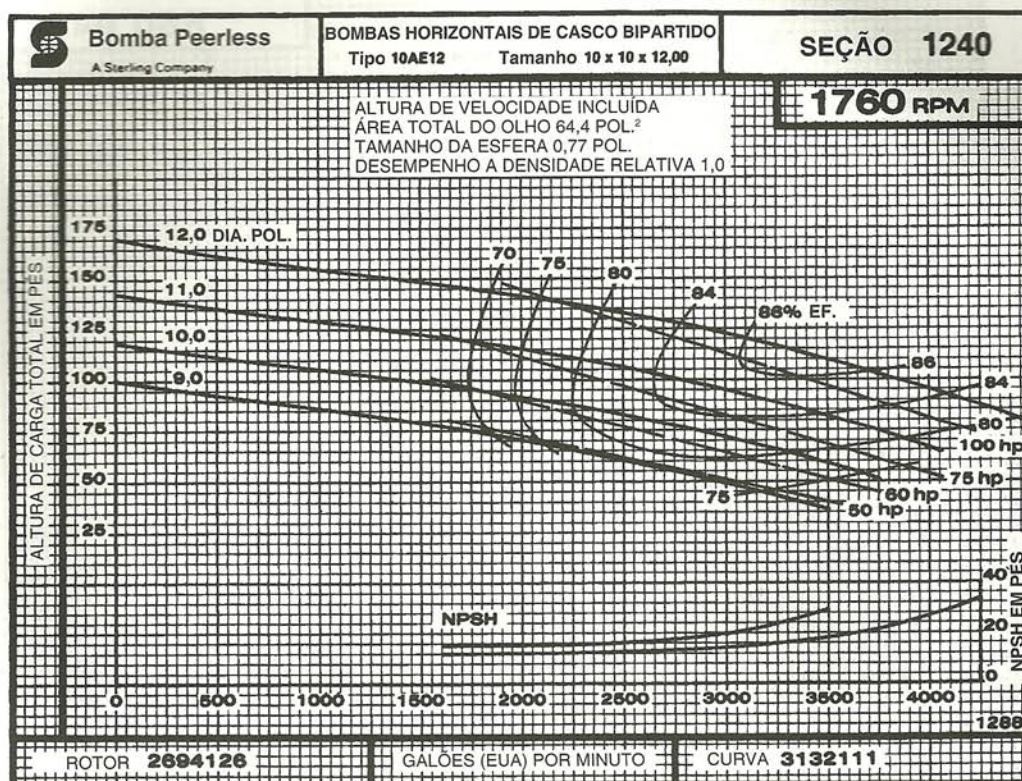



Fig. D.8 Curva de desempenho da bomba Peerless 10AE12 para 1760 rpm.

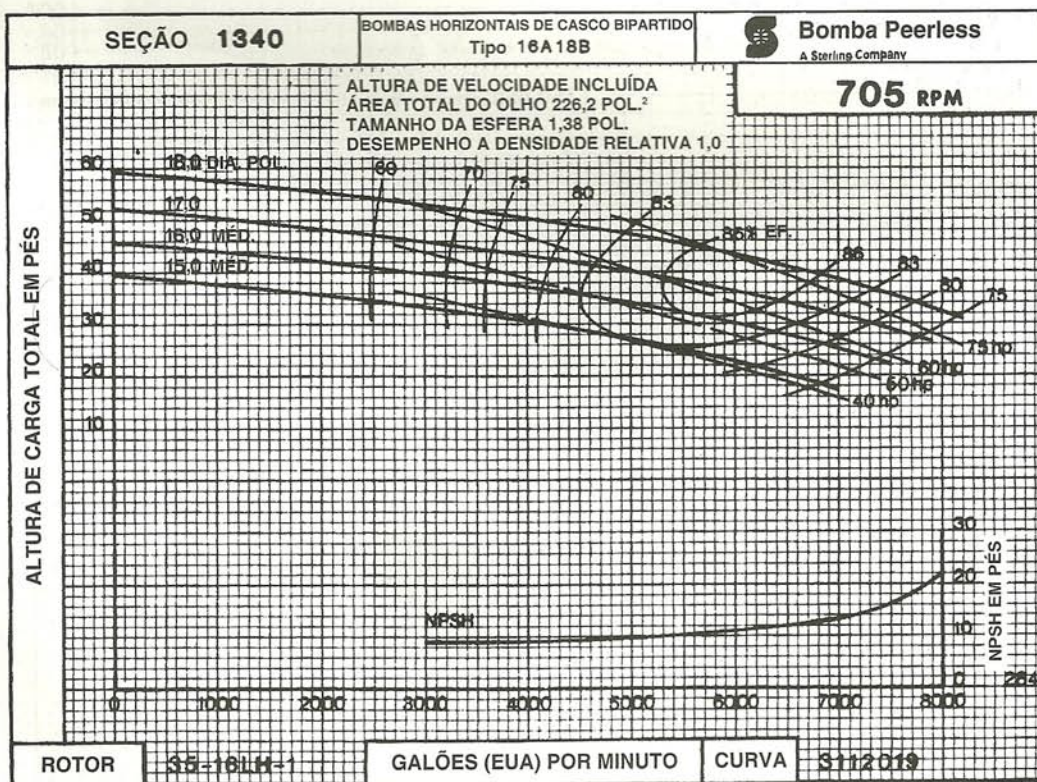



Fig. D.9 Curva de desempenho da bomba Peerless 16A 18B para 705 rpm.

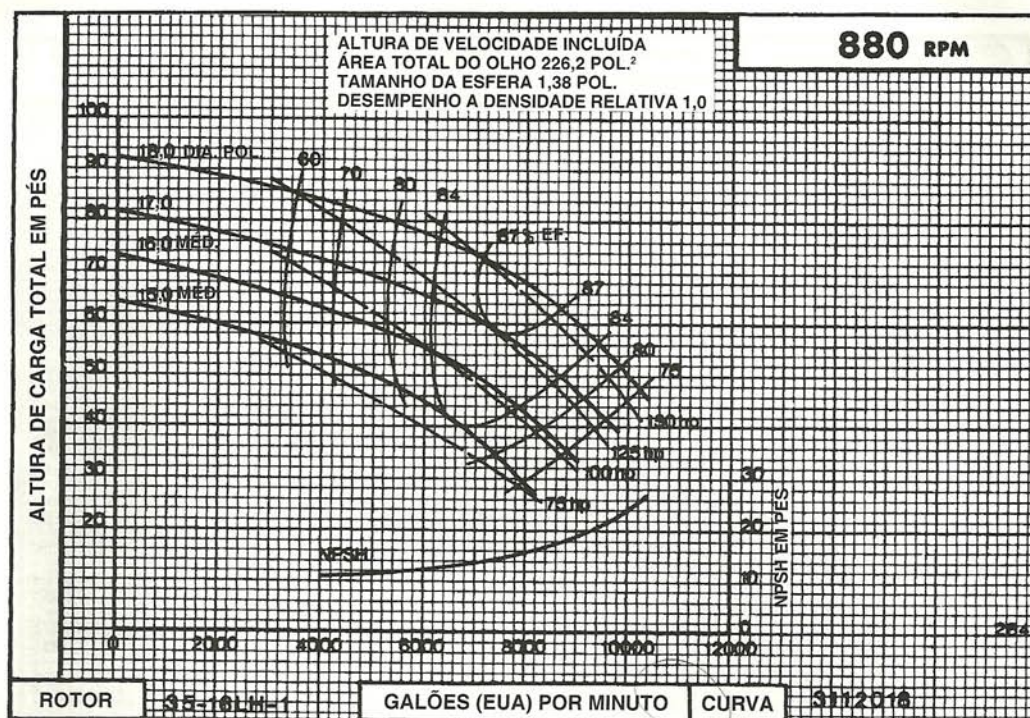



Fig. D.10 Curva de desempenho da bomba Peerless 16A 18B para 880 rpm.

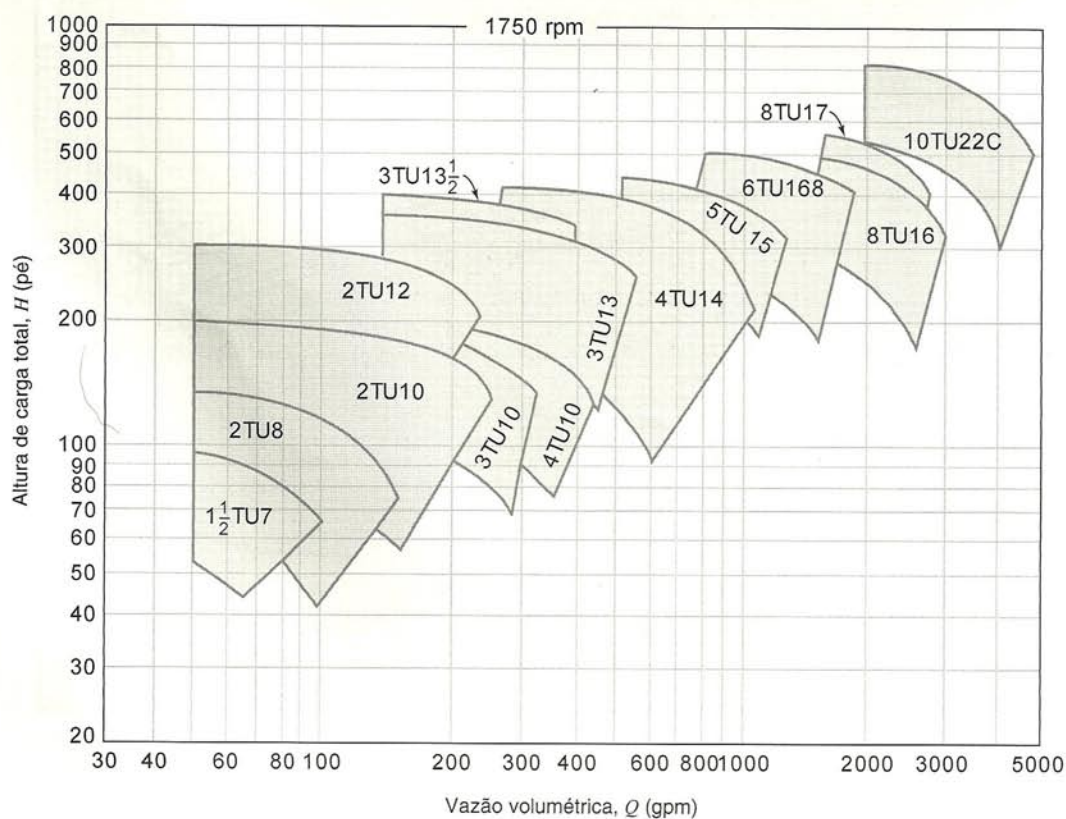



Fig. D.11 Diagrama de seleção de bombas Peerless de dois estágios (séries TU e TUT) para 1750 rpm nominais.

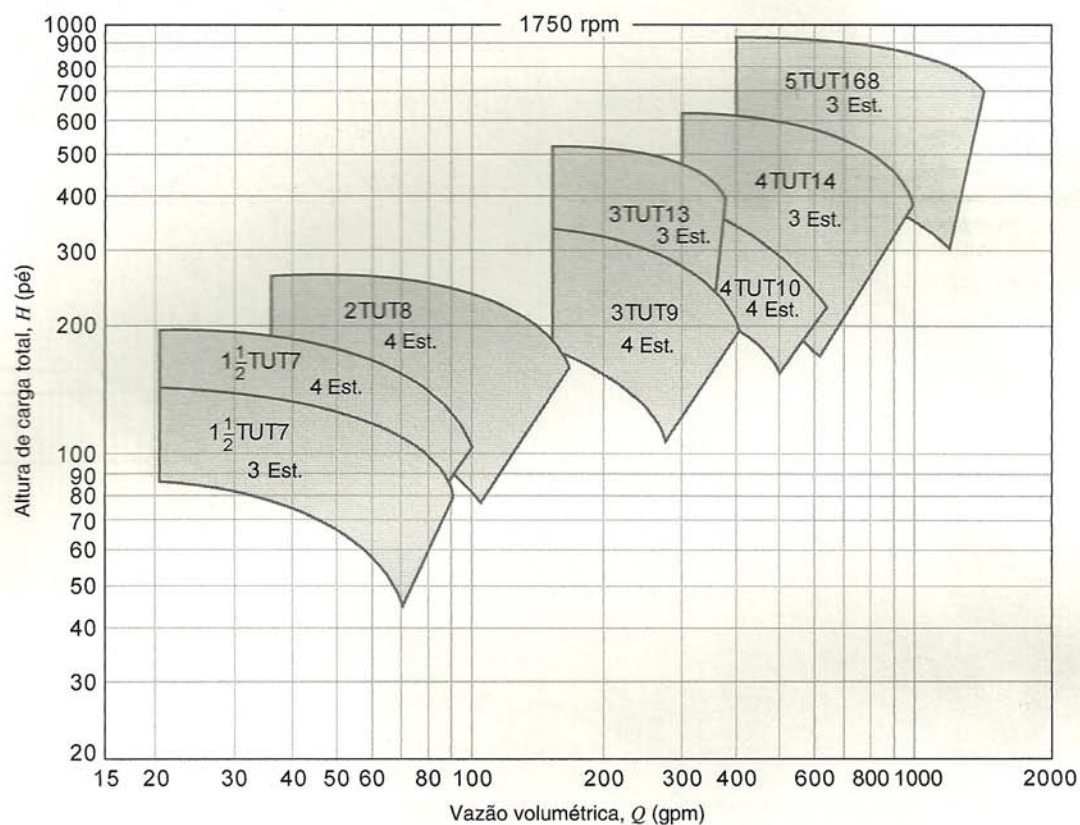



Fig. D.12 Diagrama de seleção de bombas Peerless de múltiplos estágios (séries TU e TUT) para 1750 rpm nominais.

TAMANHO	ÁREA DE SAÍDA, PÉ²
22	2,72
25	3,46
29	4,64
33	6,00
38	7,96
43	10,40
48	12,72
54	16,25
60	19,92
66	24,25
72	28,80
78	33,90
84	39,20

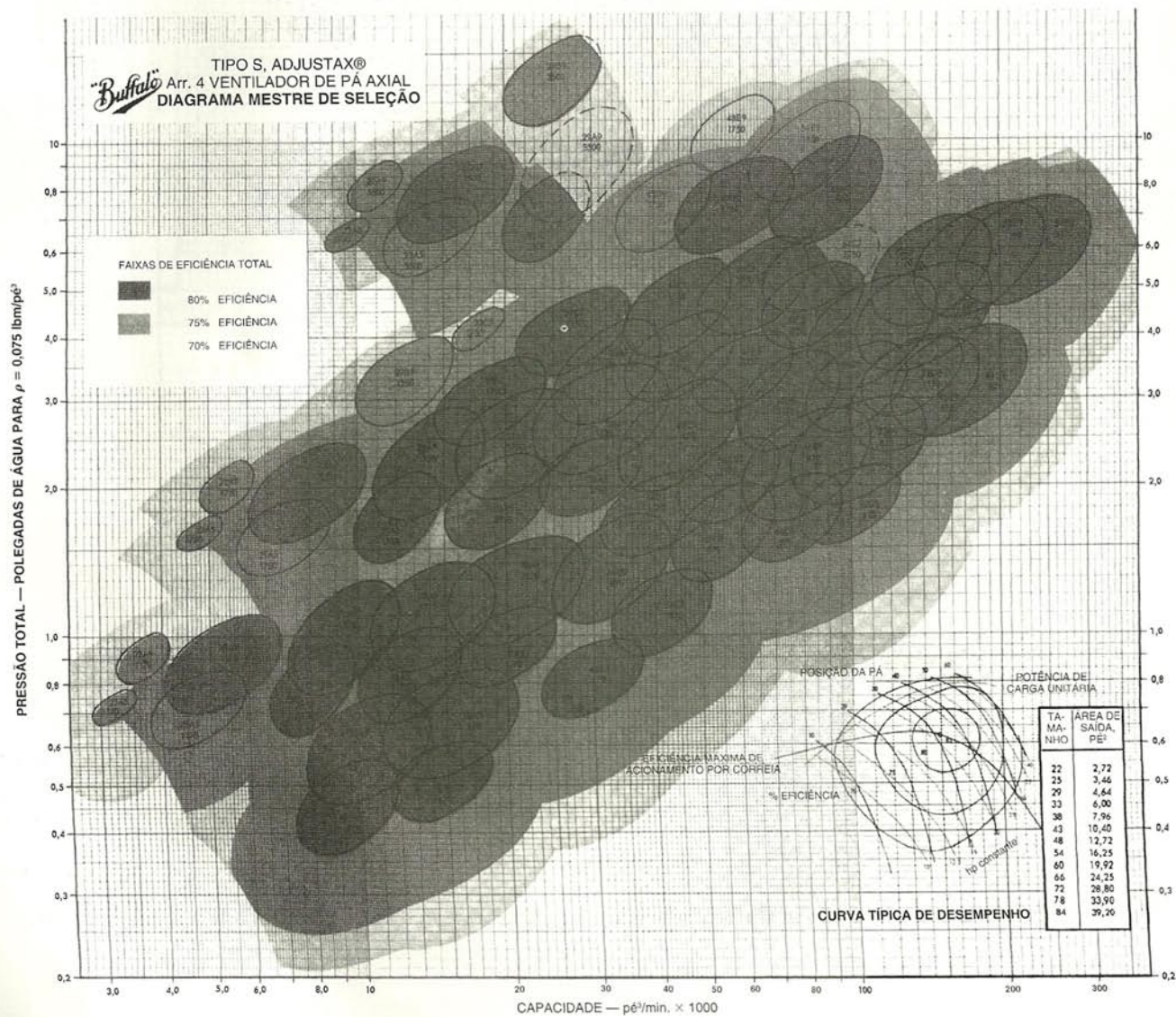



Fig. D.13 Diagrama de seleção de ventiladores axiais Buffalo Forge.

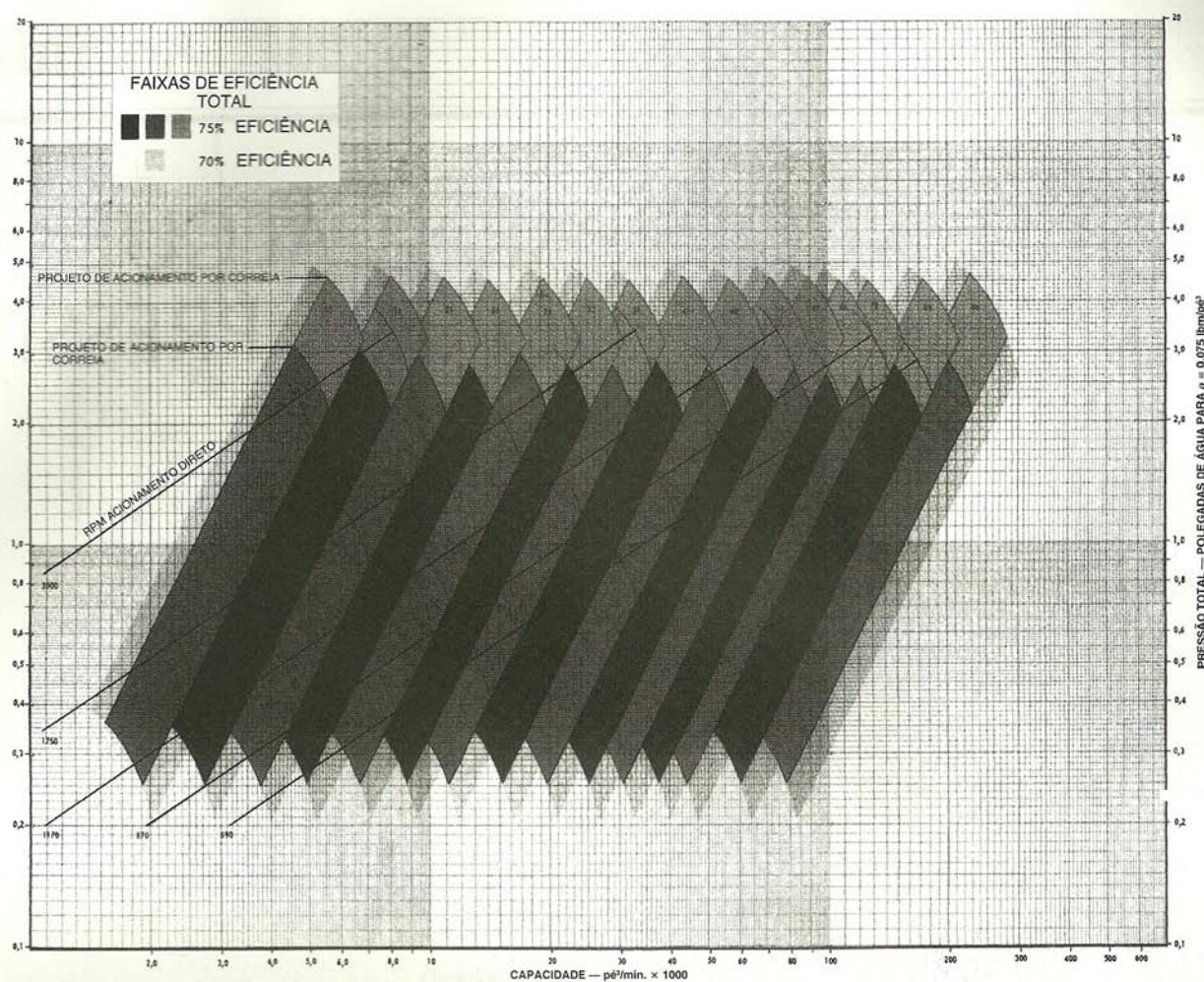



Fig. D.14 Diagrama de desempenho de ventiladores axiais Buffalo Forge.

REFERÊNCIAS

1. Literatura Peerless Pump:
   - Horizontal Split Case Single Stage Double Suction Pumps, Series AE, Brochure B-1200, 1987.
   - Horizontal Split Case Series AE Pumps, 60 Hertz, Performance Curves, Brochure B-1240, n.d.
   - Horizontal Split Case, Multistage Single Suction Pumps, Types TU, TUT, 60 Hertz, Performance Curves, Brochure B-1440, n.d.
2. Literatura Buffalo Forge:
   - Axial Flow Fans, Bulletin F-305A, 1968.

FUNÇÕES PARA CÁLCULO DE ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

E.1 ESCOAMENTO ISOENTRÓPICO

As funções de escoamento isoentrópico são calculadas com o auxílio das seguintes equações:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \quad (11.17b)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \quad (11.17a)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{1/(k-1)} \quad (11.17c)$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{1 + \frac{k-1}{2}M^2}{1 + \frac{k-1}{2}}\right]^{(k+1)/2(k-1)} \quad (12.6)$$

Valores representativos das funções de escoamento isoentrópico para $k = 1{,}4$ estão apresentados na Tabela E.1 e plotados na Fig. E.1.

Tabela E.1 Funções do Escoamento Isoentrópico (escoamento unidimensional, gás ideal, $k = 1{,}4$)

M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	∞
0,50	0,9524	0,8430	0,8852	1,340
1,00	0,8333	0,5283	0,6339	1,000
1,50	0,6897	0,2724	0,3950	1,176
2,00	0,5556	0,1278	0,2301	1,688
2,50	0,4444	0,05853	0,1317	2,637
3,00	0,3571	0,02722	0,07623	4,235
3,50	0,2899	0,01311	0,04523	6,790
4,00	0,2381	0,006586	0,02766	10,72
4,50	0,1980	0,003455	0,01745	16,56
5,00	0,1667	0,001890	0,01134	25,00

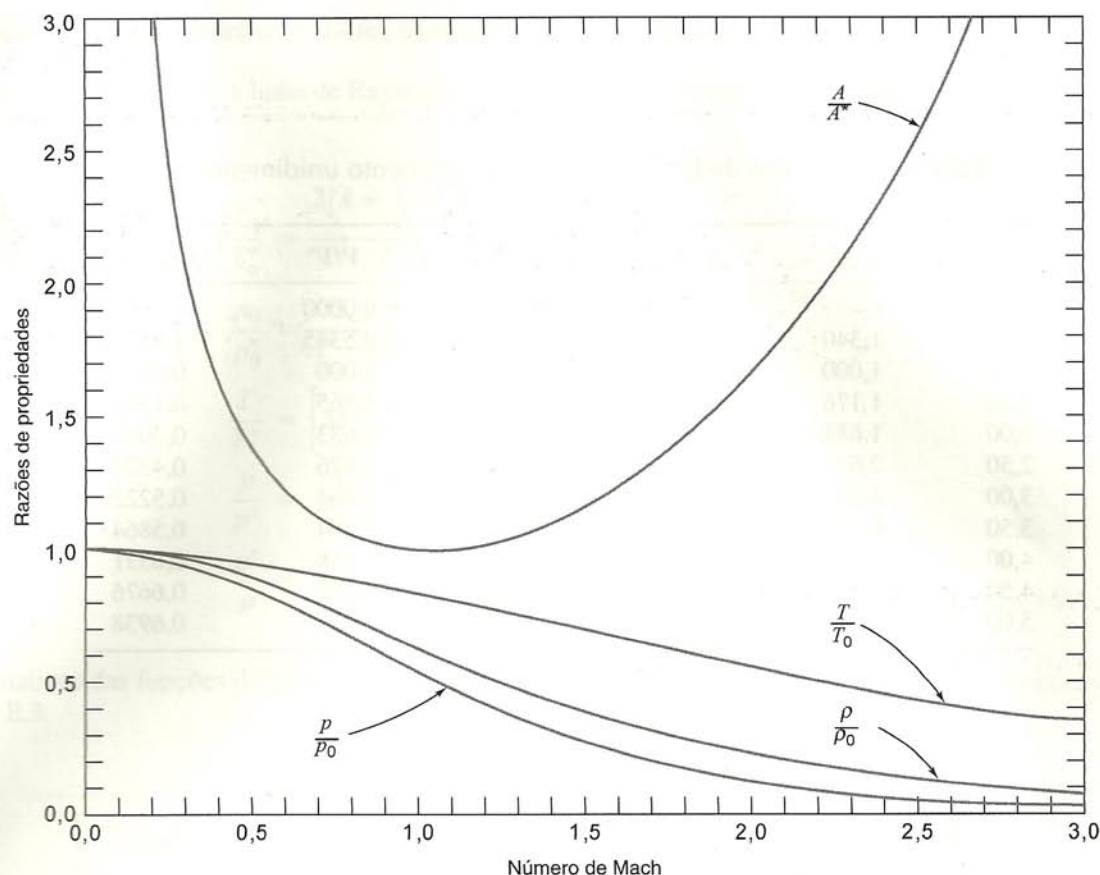



Fig. E.1 Funções de escoamento isoentrópico.

E.2 ESCOAMENTO DE LINHA DE FANNO

As funções de escoamento segundo a linha de Fanno são calculadas com o auxílio das seguintes equações:

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{(k+1)/2(k-1)} \tag{12.18e}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)} \tag{12.18a}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \tag{12.18d}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2}M^2}{\left(\frac{k+1}{2}\right)M^2}\right]^{1/2} \tag{12.18c}$$

$$\frac{\bar{f}L_{\text{máx}}}{D_h} = \frac{1-M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\left[\frac{(k+1)M^2}{2\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}\right] \tag{12.17}$$

Valores representativos das funções de escoamento segundo a linha de Fanno para $k = 1,4$ estão apresentados na Tabela E.2 e plotados na Fig. E.2.

Tabela E.2 Funções de Linha de Fanno (escoamento unidimensional, gás ideal, $k = 1,4$)

M	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*	$\bar{f}L_{máx}/D_h$
0,00	∞	1,200	∞	0,0000	∞
0,50	1,340	1,143	2,138	0,5345	1,069
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	0,0000
1,50	1,176	0,8276	0,6065	1,365	0,1361
2,00	1,688	0,6667	0,4083	1,633	0,3050
2,50	2,637	0,5333	0,2921	1,826	0,4320
3,00	4,235	0,4286	0,2182	1,964	0,5222
3,50	6,790	0,3478	0,1685	2,064	0,5864
4,00	10,72	0,2857	0,1336	2,138	0,6331
4,50	16,56	0,2376	0,1083	2,194	0,6676
5,00	25,00	0,2000	0,08944	2,236	0,6938

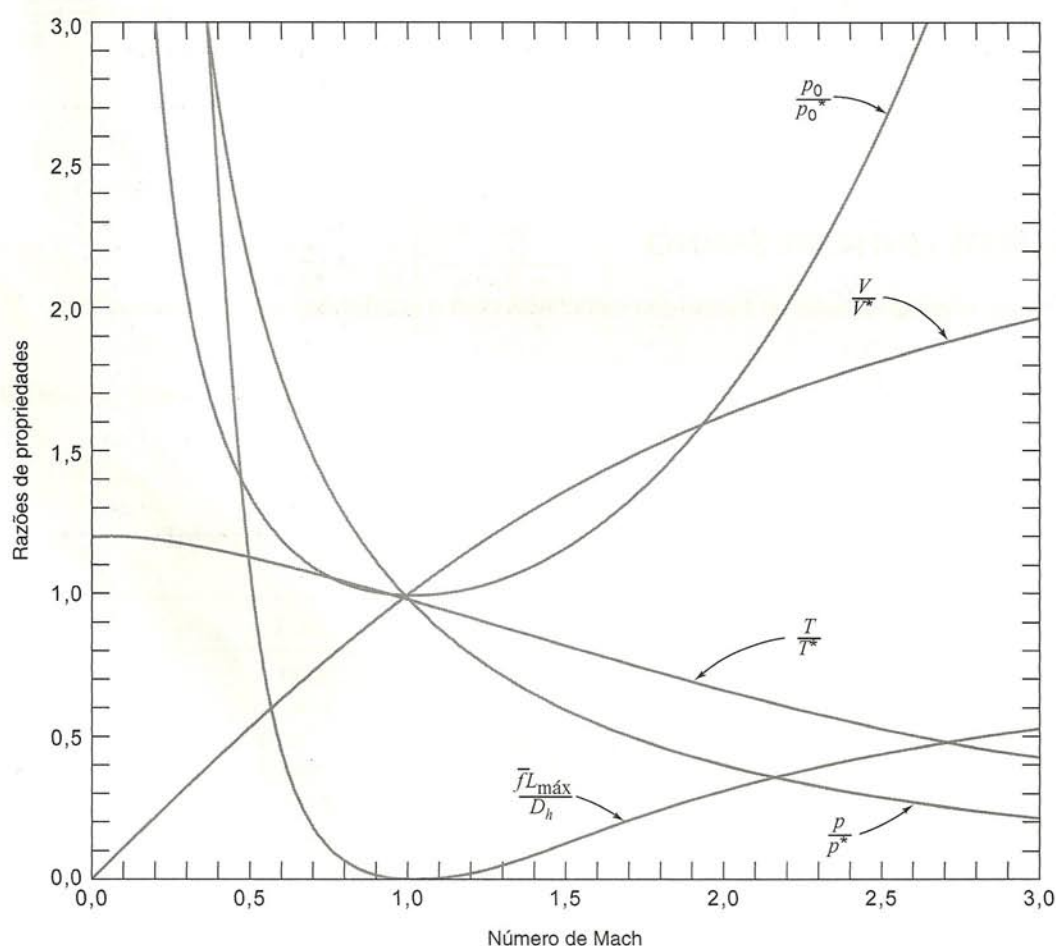



Fig. E.2 Funções de escoamento de linha de Fanno.

E.3 ESCOAMENTO DE LINHA DE RAYLEIGH

As funções de escoamento segundo a linha de Rayleigh são calculadas com o auxílio das seguintes equações:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(k+1)M^2\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}{(1+kM^2)^2} \quad (12.30d)$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1+k}{1+kM^2}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{k/(k-1)} \quad (12.30e)$$

$$\frac{T}{T^*} = \left[M\left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)\right]^2 \quad (12.30b)$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \quad (12.30a)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*} = \frac{M^2(1+k)}{1+kM^2} \quad (12.30c)$$

Valores representativos das funções de escoamento segundo a linha de Rayleigh para $k = 1{,}4$ estão apresentados na Tabela E.3 e plotados na Fig. E.3.

Tabela E.3 Funções de Linha de Rayleigh (escoamento unidimensional, gás ideal, $k = 1{,}4$)

M	T_0/T_0^*	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*
0,00	0,0000	1,268	0,0000	2,400	0,0000
0,50	0,6914	1,114	0,7901	1,778	0,4445
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,50	0,9093	1,122	0,7525	0,5783	1,301
2,00	0,7934	1,503	0,5289	0,3636	1,455
2,50	0,7101	2,222	0,3787	0,2462	1,539
3,00	0,6540	3,424	0,2803	0,1765	1,588
3,50	0,6158	5,328	0,2142	0,1322	1,620
4,00	0,5891	8,227	0,1683	0,1026	1,641
4,50	0,5698	12,50	0,1354	0,08177	1,656
5,00	0,5556	18,63	0,1111	0,06667	1,667

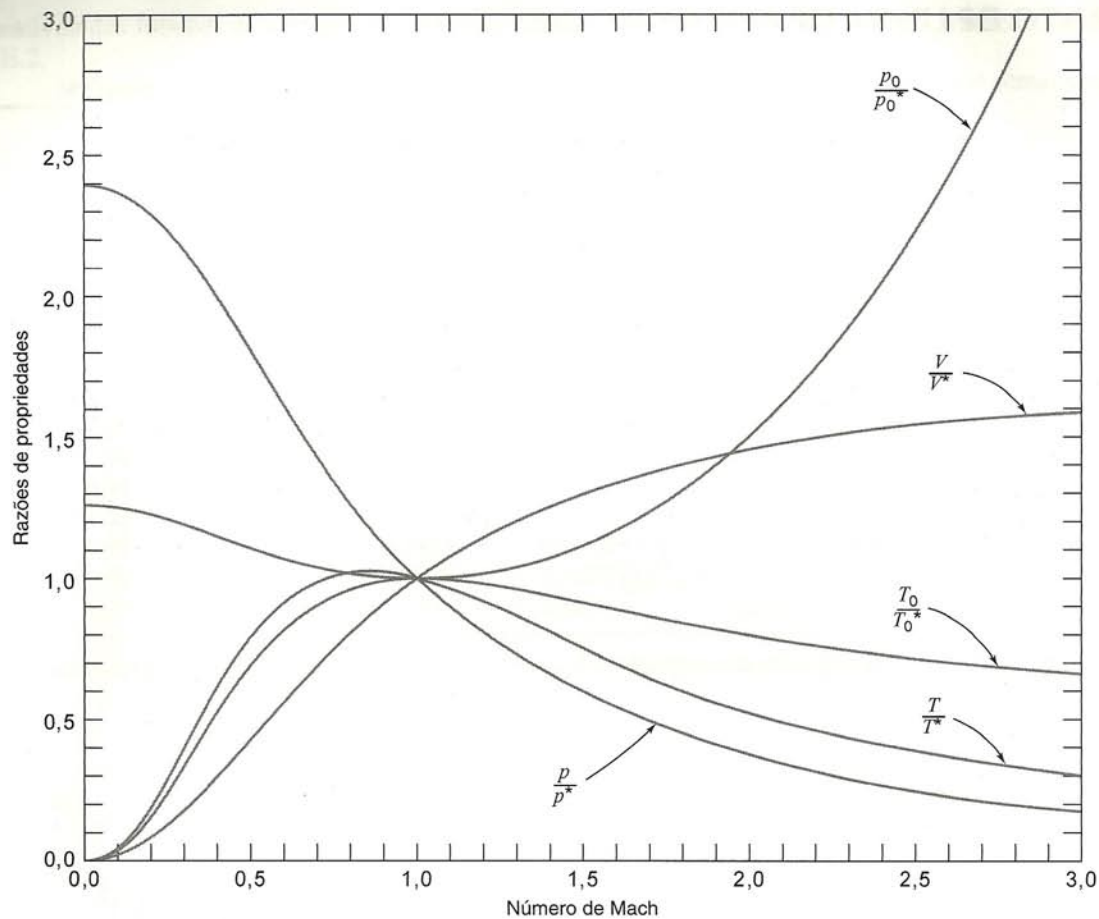



Fig. E.3 Funções de escoamento de linha de Rayleigh.

E.4 CHOQUE NORMAL

As funções de escoamento com choque normal são calculadas com o auxílio das seguintes equações:

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1}M_1^2 - 1} \tag{12.34b}$$

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{\left[\dfrac{\dfrac{k+1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{k/(k-1)}}{\left[\dfrac{2k}{k+1}M_1^2 - \dfrac{k-1}{k+1}\right]^{1/(k-1)}} \tag{12.37}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2} \tag{12.32a}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \tag{12.36}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2}\left[\frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{1/2} \tag{12.32c}$$

Valores representativos das funções de escoamento com choque normal para $k = 1{,}4$ estão apresentados na Tabela E.4 e plotados na Fig. E.4.

Tabela E.4 Funções de Escoamento com Choque Normal (escoamento unidimensional, gás ideal, $k = 1{,}4$)

M_1	M_2	p_{0_2}/p_{0_1}	T_2/T_1	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,50	0,7011	0,9298	1,320	2,458	1,862
2,00	0,5774	0,7209	1,687	4,500	2,667
2,50	0,5130	0,4990	2,137	7,125	3,333
3,00	0,4752	0,3283	2,679	10,33	3,857
3,50	0,4512	0,2130	3,315	14,13	4,261
4,00	0,4350	0,1388	4,047	18,50	4,571
4,50	0,4236	0,09170	4,875	23,46	4,812
5,00	0,4152	0,06172	5,800	29,00	5,000

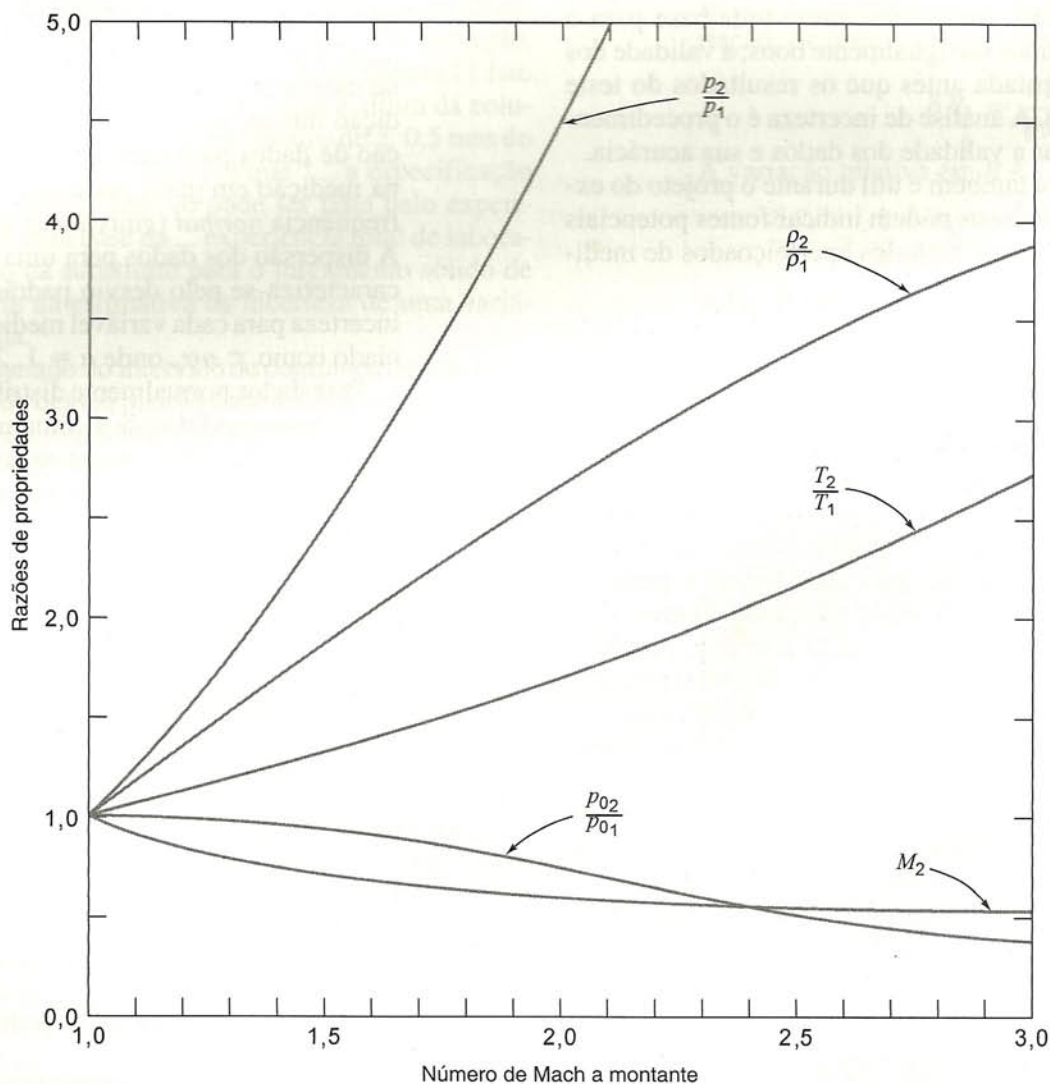



Fig. E.4 Funções de escoamento com choque normal.

Apêndice F

ANÁLISE DE INCERTEZA EXPERIMENTAL

F.1 INTRODUÇÃO

Dados de testes experimentais são freqüentemente utilizados para complementar análises de engenharia como uma base para o projeto. Nem todos os dados são igualmente bons; a validade dos dados deve ser documentada antes que os resultados do teste sejam usados no projeto. A análise de incerteza é o procedimento usado para quantificar a validade dos dados e sua acurácia.

A análise de incerteza também é útil durante o projeto do experimento. Estudos cuidadosos podem indicar fontes potenciais de erros inaceitáveis e sugerir métodos aperfeiçoados de medição.

F.2 TIPOS DE ERROS

Erros estão sempre presentes quando medições experimentais são feitas. Além dos enganos grosseiros do experimentalista, os erros podem ser de dois tipos. O erro fixo (ou sistemático) causa repetidas medições erradas da mesma quantidade em cada tentativa. O erro fixo é o mesmo para cada leitura e pode ser eliminado pela calibração ou correção adequada. O erro aleatório (não repetitivo) é diferente para cada leitura e, portanto, não pode ser eliminado. Os fatores que introduzem o erro aleatório são incertos por sua própria natureza. O objetivo da análise de incerteza é estimar o erro aleatório provável nos resultados experimentais.

Admitimos que o equipamento foi construído corretamente e calibrado de forma adequada para eliminar os erros fixos. Admitimos que os instrumentos têm resolução apropriada e que as flutuações nas leituras não são excessivas. Admitimos também que observações são feitas e registradas com o devido cuidado de modo que só os erros aleatórios permanecem.

F.3 ESTIMATIVA DE INCERTEZA

Nossa meta é estimar a incerteza de medições experimentais e de resultados calculados devida aos erros aleatórios. O procedimento tem três etapas:

1. Estimar o intervalo de incerteza para cada quantidade medida.
2. Enunciar o limite de confiança em cada medição.
3. Analisar a propagação de incerteza nos resultados calculados a partir dos dados experimentais.

A seguir delineamos o procedimento para cada etapa e ilustramos aplicações com exemplos.

Etapa 1. *Estimar o intervalo da incerteza de medição.* Designe as variáveis medidas numa experiência como $x_1, x_2, ..., x_n$. Um modo possível para determinar o intervalo de incerteza para cada variável seria repetir cada medição muitas vezes. O resultado seria uma distribuição de dados para cada variável. Os erros aleatórios na medição em geral produzem uma distribuição de freqüência *normal* (*gaussiana*) dos valores medidos. A dispersão dos dados para uma distribuição normal caracteriza-se pelo desvio padrão, σ. O intervalo de incerteza para cada variável medida, x_i, pode ser enunciado como $\pm n\sigma_i$, onde $n = 1, 2$ ou 3.

Para dados normalmente distribuídos, mais de 99% dos valores medidos de x_i situam-se dentro de $\pm 3\sigma_i$ do valor médio, 95% situam-se dentro de $\pm 2\sigma_i$ e 68% situam-se dentro de $\pm \sigma_i$ do valor médio do conjunto de dados [1]. Dessa forma, seria possível quantificar os erros esperados dentro de qualquer *limite de confiança* desejável se um conjunto de dados estatisticamente significativos estivesse disponível.

Em geral, o método das medições repetidas é impraticável. Na maioria das aplicações é impossível obter dados suficientes para uma amostra estatisticamente significativa, em virtude do tempo e custo excessivos. Contudo, a distribuição normal sugere diversos conceitos importantes:

1. Os pequenos erros são mais prováveis do que os grandes.
2. Os erros para mais e para menos são igualmente prováveis.
3. Nenhum erro máximo finito pode ser especificado.

Uma situação mais típica do trabalho de engenharia é uma experiência de "uma só amostra", na qual apenas uma medição é feita para cada ponto [2]. Uma estimativa razoável da incerteza de medição devida ao erro aleatório numa experiência de uma só amostra é geralmente mais ou menos metade da menor divisão da escala (a *contagem mínima*) do instrumento. Contudo, essa abordagem também deve ser usada com cautela, conforme ilustrado no exemplo seguinte.

EXEMPLO F.1 — Incerteza na Leitura de um Barômetro

A altura observada da coluna de mercúrio de um barômetro é h = 752,6 mm. A contagem mínima na escala do vernier é de 0,1 mm, de modo que o erro provável da medição pode ser estimado como ± 0,05 mm.

Provavelmente, uma medição não poderia ser feita com tal precisão. Os cursores e o menisco do barômetro devem ser alinhados pelo olho humano. O cursor tem uma contagem mínima de 1 mm. Como estimativa conservadora, uma medição poderia ser feita dentro do milímetro mais próximo. O valor provável de uma só medição seria então expresso como 752,6 ± 0,5 mm. A incerteza relativa na altura barométrica seria determinada como

$$u_h = \pm \frac{0{,}5 \text{ mm}}{752{,}6 \text{ mm}} = \pm 0{,}000664 \quad \text{ou} \quad \pm 0{,}0664\%$$

Comentários:

1. Um intervalo de incerteza de ± 0,1% corresponde a um resultado especificado dentro de três dígitos significativos; essa acurácia é suficiente para a maioria dos trabalhos de engenharia.
2. A medição da altura do barômetro foi acurada, conforme mostrado pela estimativa de incerteza. Mas foi acurada o suficiente? A temperaturas ambientes típicas, a leitura observada do barômetro deve ser reduzida por uma correção devida à temperatura de quase 3 mm! Esse é um exemplo de erro fixo que requer um fator de correção.

Etapa 2. *Enunciar o limite de confiança de cada medição.* O intervalo de incerteza de uma medição deve ser enunciado em probabilidades especificadas. Por exemplo, pode-se escrever h = 752,6 ± 0,5 mm (20 para 1). Isto significa que aposta-se 20 por 1 que a altura da coluna de mercúrio realmente está dentro de ± 0,5 mm do valor declarado. É óbvio [3] que "... a especificação de tais probabilidades só pode ser feita pelo experimentalista com base na ... experiência total de laboratório. Não há substituto para o julgamento sólido de engenharia na estimativa da incerteza de uma variável medida."

O enunciado do intervalo de confiança baseia-se no conceito de desvio padrão para uma distribuição normal. Probabilidades de cerca de 370 por 1 correspondem a $\pm 3\sigma$; 99,7% de todas as leituras futuras são esperadas cair dentro do intervalo. Probabilidades de cerca de 20 por 1 correspondem a $\pm 2\sigma$ e de 3 por 1 correspondem a limites de confiança de $\pm \sigma$. Probabilidades de 20 por 1 são as utilizadas, tipicamente, nos trabalhos de engenharia.

Etapa 3. *Analisar a propagação de incerteza nos cálculos.* Suponha que medições das variáveis independentes, x_1, x_2, ..., x_n, são feitas no laboratório. A incerteza relativa de cada quantidade medida independentemente é estimada como u_i. As medições são usadas para calcular algum resultado, R, para o experimento. Desejamos analisar como os erros nos x_i propagam-se no cálculo de R a partir dos valores medidos.

Em geral, R pode ser expresso matematicamente como $R = R(x_1, x_2, ..., x_n)$. O efeito sobre R de um erro na medição de um x_i individual pode ser estimado por analogia com a derivada de uma função [4]. Uma variação, δx_i, em x_i, causaria a variação de δR_i em R,

$$\delta R_i = \frac{\partial R}{\partial x_i} \delta x_i$$

A variação relativa em R é

$$\frac{\delta R_i}{R} = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x_i} \delta x_i = \frac{x_i}{R} \frac{\partial R}{\partial x_i} \frac{\delta x_i}{x_i} \qquad \text{(F.1)}$$

A Eq. F.1 pode ser empregada para estimar o intervalo de incerteza no resultado devido às variações em x_i. Introduzindo a notação de incerteza relativa, obtemos

$$u_{R_i} = \frac{x_i}{R} \frac{\partial R}{\partial x_i} u_{x_i} \qquad \text{(F.2)}$$

Como estimamos a incerteza relativa em R causada pelos efeitos combinados das incertezas relativas em todos os x_i? O erro aleatório em cada variável tem uma faixa de valores dentro do intervalo de incerteza. É improvável que todos os erros terão valores adversos ao mesmo tempo. Pode ser mostrado [2] que a melhor representação para a incerteza relativa do resultado é

$$u_R = \pm \left[\left(\frac{x_1}{R} \frac{\partial R}{\partial x_1} u_1 \right)^2 + \left(\frac{x_2}{R} \frac{\partial R}{\partial x_2} u_2 \right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{R} \frac{\partial R}{\partial x_n} u_n \right)^2 \right]^{1/2} \qquad \text{(F.3)}$$

EXEMPLO F.2 — Incerteza no Volume de um Cilindro

Obtenha uma expressão para a incerteza na determinação do volume de um cilindro a partir de medições do seu raio e da sua altura.

O volume do cilindro em termos do raio e da altura é

$$\forall = \forall(r, h) = \pi r^2 h$$

Diferenciando, obtemos

$$d\forall = \frac{\partial \forall}{\partial r} dr + \frac{\partial \forall}{\partial h} dh = 2\pi r h \, dr + \pi r^2 dh$$

uma vez que

$$\frac{\partial \forall}{\partial r} = 2\pi r h \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \forall}{\partial h} = \pi r^2$$

Da Eq. F.2, a incerteza relativa devida ao raio é

$$u_{\forall,r} = \frac{\delta \forall_r}{\forall} = \frac{r}{\forall}\frac{\partial \forall}{\partial r}u_r = \frac{r}{\pi r^2 h}(2\pi r h)u_r = 2u_r$$

e a incerteza relativa devida à altura é

$$u_{\forall,h} = \frac{\delta \forall_h}{\forall} = \frac{h}{\forall}\frac{\partial \forall}{\partial h}u_h = \frac{h}{\pi r^2 h}(\pi r^2)u_h = u_h$$

A incerteza relativa no volume é

$$u_{\forall} = \pm\,[(2u_r)^2 + (u_h)^2]^{1/2} \tag{F.4}$$

Comentário: O coeficiente 2, na Eq. F.4, mostra que a incerteza na medição do raio do cilindro tem um efeito maior do que a incerteza na medição da altura. Isto ocorre porque o raio é elevado ao quadrado na equação do volume.

F.4 APLICAÇÕES A DADOS

Aplicações a dados obtidos de medições de laboratório são ilustradas nos exemplos seguintes.

EXEMPLO F.3 — Incerteza na Vazão em Massa de um Líquido

A vazão em massa de água fluindo através de um tubo deve ser determinada coletando-a num recipiente. A vazão em massa é calculada a partir da massa líquida de água coletada dividida pelo intervalo de tempo,

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \tag{F.5}$$

onde $\Delta m = m_f - m_e$. As estimativas de erro para as quantidades medidas são

Massa do recipiente cheio, $m_f = 400 \pm 2$ g (20 por 1)
Massa do recipiente vazio, $m_e = 200 \pm 2$ g (20 por 1)
Intervalo de tempo de coleta, $\Delta t = 10 \pm 0{,}2$ s (20 por 1)

As incertezas relativas nas quantidades medidas são

$$u_{m_f} = \pm\frac{2\text{ g}}{400\text{ g}} = \pm\,0{,}005$$

$$u_{m_e} = \pm\frac{2\text{ g}}{200\text{ g}} = \pm\,0{,}01$$

$$u_{\Delta t} = \pm\frac{0{,}2\text{ s}}{10\text{ s}} = \pm\,0{,}02$$

A incerteza relativa no valor medido da massa líquida é calculada a partir da Eq. F.3 como

$$u_{\Delta m} = \pm\left[\left(\frac{m_f}{\Delta m}\frac{\partial \Delta m}{\partial m_f}u_{m_f}\right)^2 + \left(\frac{m_e}{\Delta m}\frac{\partial \Delta m}{\partial m_e}u_{m_e}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \pm\,\{[(2)(1)(\pm\,0{,}005)]^2 + [(1)(-1)(\pm\,0{,}01)]^2\}^{1/2}$$

$$u_{\Delta m} = \pm\,0{,}0141$$

Uma vez que $\dot{m} = \dot{m}(\Delta m, \Delta t)$, podemos escrever a Eq. F.3 como

$$u_{\dot{m}} = \pm\left[\left(\frac{\Delta m}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta m}u_{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta t}u_{\Delta t}\right)^2\right]^{1/2} \tag{F.6}$$

Os termos requeridos das derivadas parciais são

$$\frac{\Delta m}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta m} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\Delta t}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta t} = -1$$

Substituindo na Eq. F.6 resulta

$$u_{\dot{m}} = \pm \{[(1)(\pm 0{,}0141)]^2 + [(-1)(\pm 0{,}02)]^2\}^{1/2}$$

$$u_{\dot{m}} = \pm 0{,}0245 \quad \text{ou} \quad \pm 2{,}45 \text{ por cento (20 para 1)}$$

Comentário: O intervalo de incerteza de 2% na medição do tempo é a contribuição mais importante para o intervalo de incerteza do resultado.

EXEMPLO F.4 — Incerteza no Número de Reynolds para Escoamento de Água

O número de Reynolds deve ser calculado para o escoamento de água num tubo. A equação de cálculo para o número de Reynolds é

$$Re = \frac{4\dot{m}}{\pi \mu D} = Re(\dot{m}, D, \mu) \tag{F.7}$$

Consideramos o intervalo de incerteza no cálculo da vazão em massa. E com relação às incertezas em μ e D? O diâmetro do tubo é dado como $D = 6{,}35$ mm. Podemos admitir esse valor como exato? O diâmetro pode ser medido com resolução de 0,1 mm. Se assim for, a incerteza relativa no diâmetro seria estimada como

$$u_D = \pm \frac{0{,}05 \text{ mm}}{6{,}35 \text{ mm}} = \pm 0{,}00787 \quad \text{ou} \quad \pm 0{,}787 \text{ por cento}$$

A viscosidade da água depende da temperatura. Esta é estimada como $T = 24 \pm 0{,}5$°C. Como a incerteza na temperatura afetará a incerteza em μ? Um modo de estimar isto é escrever

$$u_{\mu(T)} = \pm \frac{\delta \mu}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dT}(\pm \delta T) \tag{F.8}$$

A derivada pode ser estimada a partir de dados tabulados de viscosidade perto da temperatura nominal de 24°C. Assim,

$$\frac{d\mu}{dT} \approx \frac{\Delta \mu}{\Delta T} = \frac{\mu(25°\text{C}) - \mu(23°\text{C})}{(25-23)°\text{C}} = (0{,}000890 - 0{,}000933)\,\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2} \times \frac{1}{2°\text{C}}$$

$$\frac{d\mu}{dT} = -2{,}15 \times 10^{-5}\ \text{N}\cdot\text{s}/(\text{m}^2\cdot°\text{C})$$

Segue-se, da Eq. F.8, que a incerteza na viscosidade devida à temperatura é

$$u_{\mu(T)} = \frac{1}{0{,}000911}\frac{\text{m}^2}{\text{N}\cdot\text{s}} \times -2{,}15 \times 10^{-5}\ \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2\cdot°\text{C}} \times (\pm 0{,}5°\text{C})$$

$$u_{\mu(T)} = \pm 0{,}0118 \quad \text{ou} \quad \pm 1{,}18 \text{ por cento}$$

Os próprios dados tabulados de viscosidade também têm alguma incerteza. Se ela for de $\pm$ 1,0%, uma estimativa para a incerteza relativa resultante na viscosidade será

$$u_\mu = \pm [(\pm 0{,}01)^2 + (\pm 0{,}0118)^2]^{1/2} = \pm 0{,}0155 \quad \text{ou} \quad \pm 1{,}55 \text{ por cento}$$

As incertezas na vazão em massa, diâmetro do tubo e viscosidade, necessárias para calcular o intervalo de incerteza do número de Reynolds calculado, são agora conhecidas. As derivadas parciais requeridas, determinadas a partir da Eq. F.7, são

$$\frac{\dot{m}}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \dot{m}} = \frac{\dot{m}}{Re}\frac{4}{\pi \mu D} = \frac{Re}{Re} = 1$$

$$\frac{\mu}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \mu} = \frac{\mu}{Re}(-1)\frac{4\dot{m}}{\pi \mu^2 D} = -\frac{Re}{Re} = -1$$

$$\frac{D}{Re}\frac{\partial Re}{\partial D} = \frac{D}{Re}(-1)\frac{4\dot{m}}{\pi \mu D^2} = -\frac{Re}{Re} = -1$$

Substituindo na Eq. F.3 dá

$$u_{Re} = \pm\left\{\left[\frac{\dot{m}}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \dot{m}}u_{\dot{m}}\right]^2 + \left[\frac{\mu}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \mu}u_\mu\right]^2 + \left[\frac{D}{Re}\frac{\partial Re}{\partial D}u_D\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$u_{Re} = \pm \{[(1)(\pm 0{,}0245)]^2 + [(-1)(\pm 0{,}0155)]^2 + [(-1)(\pm 0{,}00787)]^2\}^{1/2}$$

$$u_{Re} = \pm 0{,}0300 \quad \text{ou} \quad \pm 3{,}00 \text{ por cento}$$

Comentário: Os Exemplos F.3 e F.4 ilustram dois pontos importantes para projeto de experimento. Primeiro, a massa de água coletada, Δm, é calculada a partir de duas quantidades medidas, m_f e m_e. Para qualquer intervalo de incerteza admitido nas medições de m_f e m_e, a incerteza *relativa* em Δm pode ser diminuída fazendo Δm maior. Isto pode ser realizado usando-se recipientes maiores ou um tempo de medição mais longo, Δt, que também reduziria a incerteza relativa no Δt medido. Segundo, a incerteza nos dados de propriedades tabulados pode ser significativa. A incerteza dos dados também é aumentada pela incerteza na medição da temperatura do fluido.

EXEMPLO F.5 — Incerteza na Velocidade do Ar

A velocidade do ar é calculada a partir de medições com tubo de pitot num túnel de vento. Da equação de Bernoulli,

$$V = \left(\frac{2gh\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}}\right)^{1/2} \tag{F.9}$$

onde h é a altura observada da coluna do manômetro.

O único elemento novo neste exemplo é a raiz quadrada. A variação em V devida ao intervalo de incerteza em h é

$$\frac{h}{V}\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{h}{V}\frac{1}{2}\left(\frac{2gh\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}}\right)^{-1/2}\frac{2g\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}}$$

$$\frac{h}{V}\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{h}{V}\frac{1}{2}\frac{1}{V}\frac{2g\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}} = \frac{1}{2}\frac{V^2}{V^2} = \frac{1}{2}$$

Usando a Eq. F.3, calculamos a incerteza relativa em V como

$$u_V = \pm\left[\left(\frac{1}{2}u_h\right)^2 + \left(\frac{1}{2}u_{\rho_{\text{água}}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}u_{\rho_{\text{ar}}}\right)^2\right]^{1/2}$$

Se $u_h = \pm 0{,}01$ e as outras incertezas forem desprezíveis,

$$u_V = \pm\left\{\left[\frac{1}{2}(\pm 0{,}01)\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$u_V = \pm 0{,}00500 \quad \text{ou} \quad \pm 0{,}500 \text{ por cento}$$

Comentário: A raiz quadrada reduz a incerteza relativa na velocidade calculada para metade daquela de u_h.

F.5 RESUMO

Um enunciado da incerteza provável de dados é uma importante parte de um relatório de dados experimentais completo e claro. A Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos exige que todos os artigos submetidos para publicação em revistas incluam um enunciado adequado de incerteza de dados experimentais [5]. A estimativa de incerteza em resultados experimentais requer cuidado, experiência e capacidade de julgamento, em comum com muito esforço de engenharia. Enfatizamos a necessidade de quantificar a incerteza de medições, mas o espaço permitiu a inclusão de apenas alguns exemplos. Muito mais informações estão disponíveis nas referências que seguem (p. ex., [4, 6, 7]). Nós o encorajamos a consultá-las, quando estiver projetando experimentos ou analisando dados.

REFERÊNCIAS

1. Pugh, E. M., and G. H. Winslow, *The Analysis of Physical Measurements.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
2. Kline, S. J., and F. A. McClintock, "Describing Uncertainties in Single-Sample Experiments," *Mechanical Engineering, 75,* 1, January 1953, pp. 3–9.
3. Doebelin, E. O., *Measurement Systems,* 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1990.
4. Young, H. D., *Statistical Treatment of Experimental Data.* New York: McGraw-Hill, 1962.
5. Rood, E. P., and D. P. Telionis, "JFE Policy on Reporting Uncertainties in Experimental Measurements and Results," *Transactions of ASME, Journal of Fluids Engineering, 113,* 3, September 1991, pp. 313–314.
6. Coleman, H. W., and W. G. Steele, *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers.* New York: Wiley, 1989.
7. Holman, J. P., *Experimental Methods for Engineers,* 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1989.

Apêndice G

UNIDADES SI, PREFIXOS E FATORES DE CONVERSÃO

Tabela G.1 Unidades SI e Prefixos[a]

Unidades SI	Quantidade	Unidade	Símbolo SI	Fórmula
Unidades básicas SI:	Comprimento	metro	m	—
	Massa	quilograma	kg	—
	Tempo	segundo	s	—
	Temperatura	kelvin	K	—
Unidade complementar SI:	Ângulo plano	radiano	rad	—
Unidades derivadas SI:	Energia	joule	J	$N \cdot m$
	Força	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
	Potência	watt	W	J/s
	Pressão	pascal	Pa	N/m^2
	Trabalho	joule	J	$N \cdot m$

Prefixos SI	Fator de Multiplicação	Prefixo	Símbolo SI
	1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
	1 000 000 000 = 10^{9}	giga	G
	1 000 000 = 10^{6}	mega	M
	1 000 = 10^{3}	quilo	k
	0,01 = 10^{-2}	centi[b]	c
	0,001 = 10^{-3}	mili	m
	0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
	0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
	0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p

[a]Fonte: Norma ASTM para Prática Métrica E 380-97, 1997.
[b]A ser evitado sempre que possível.

G.1 CONVERSÕES DE UNIDADES

Os dados necessários para resolver problemas nem sempre estão disponíveis em unidades coerentes. Assim, é necessário freqüentemente converter de um sistema de unidades para outro.

Em princípio, todas as unidades derivadas podem ser expressas em termos das unidades básicas. Então, apenas os fatores de conversão para as unidades básicas seriam requeridos.

Na prática, muitas grandezas de engenharia são expressas em termos de unidades definidas, como, por exemplo, o *horsepower*, a *British thermal unit* (Btu), o quarto, a milha náutica. As definições de tais grandezas são necessárias, e fatores de conversão adicionais são úteis nos cálculos.

A Tabela G.2 apresenta as unidades básicas SI e os fatores de conversão necessários, mais algumas definições e fatores de conversão convenientes.

Tabela G.2 Fatores de Conversão e Definições

Dimensão Fundamental	Unidade Inglesa	Valor SI Exato	Valor SI Aproximado
Comprimento	1 pol.	0,0254 m	—
Massa	1 lbm	0,453 592 37 kg	0,454 kg
Temperatura	1°F	5/9 K	—

Definições:

Aceleração da gravidade:	$g = 9{,}8066$ m/s² (= 32,174 pés/s²)
Energia:	Btu (unidade térmica britânica) ≡ quantidade de energia requerida para aumentar a temperatura de 1 lbm de água de 1°F (1 Btu = 778,2 pés · lbf)
	quilocaloria ≡ quantidade de energia requerida para aumentar a temperatura de 1 kg de água de 1 K (1 kcal = 4187 J)
Comprimento:	1 milha = 5280 pés; 1 milha náutica = 6076,1 pés = 1852 m (exato)
Potência:	1 horsepower ≡ 550 pés · lbf/s
Pressão:	1 bar ≡ 10^5 Pa
Temperatura:	grau Fahrenheit, $T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$ (T_C em graus Celsius)
	grau Rankine, $T_R = T_F + 459{,}67$
	Kelvin, $T_K = T_C + 273{,}15$ (exato)
Viscosidade:	1 Poise ≡ 0,1 kg/(m · s)
	1 Stoke ≡ 0,0001 m²/s
Volume:	1 gal ≡ 231 pol.³ (1 pé³ = 7,48 gal)

Fatores de Conversão Úteis:

1 lbf = 4,448 N
1 lbf/pol.² = 6895 Pa
1 Btu = 1055 J
1 hp = 746 W = 2545 Btu/h
1 kW = 3413 Btu/h
1 quarto = 0,000946 m³ = 0,946 litro
1 kcal = 3,968 Btu

RESPOSTAS DE PROBLEMAS SELECIONADOS

Capítulo 1

1.2 $\forall = 0{,}0567\ \text{m}^3$, $D = 0{,}477$ m
1.3 $m = 5{,}47$ kg
1.7 $\rho = 0{,}0765\ \text{lbm/ft}^3$, $u_\rho = \pm\ 0{,}348\%$
1.8 $\rho = 1{,}39\ \text{kg/m}^3$, $u_\rho = \pm\ 0{,}238\%$
1.9 $u_{\dot{m}} = \pm\ 1{,}30\%$, $\pm\ 0{,}217\%$
1.10 $\rho = 930 \pm 27{,}2\ \text{kg/m}^3$ (20 para 1)
1.11 $\rho = 1130 \pm 21{,}4\ \text{kg/m}^3$
SG $= 1{,}13 \pm 0{,}214$ (20 para 1)
1.12 $\rho = 1260 \pm 28{,}9\ \text{kg/m}^3$
SG $= 1{,}26 \pm 0{,}0289$ (20 para 1)
1.15 $u_a = \pm\ 3{,}47\%$
1.16 $\delta x = \pm\ 0{,}158$ mm
1.17 $\delta D = \pm\ 0{,}00441$ pol.
1.18 $H = 57{,}7 \pm 0{,}548$ pé
1.19 $u_\forall = \pm\ 10{,}9\%$
1.20 $t = 3W/gk$
1.21 $s = 2{,}05\ W^2/gk^2$
1.22 $V_{\text{máx}} = 56{,}8$ m/s, $V_{100} = 38{,}3$ m/s
1.23 $V_0 = 37{,}7$ m/s, $\theta_0 = 21{,}8°$
1.24 $V_t = 53{,}9$ m/s, $s = 345$ m,
$s = 134$ m
1.27 1 Pa $= 1{,}45 \times 10^{-4}$ lbf/pol.²
1 gal $= 3{,}79$ L
$1\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2 = 2{,}09 \times 10^{-2}\ \text{lbf}\cdot\text{s/pé}^2$
1.28 $1\ \text{N/m}^2 = 1{,}45 \times 10^{-4}$ lbf/pol.²
1 hp $= 746\ \text{N}\cdot\text{m/s}$
1 Btu/lbm $= 2320\ \text{N}\cdot\text{m/kg}$
1.29 SG $= 13{,}6$, $v = 7{,}37 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{kg}$
$\gamma_E = 847\ \text{lbf/pé}^3$, $\gamma_M = 144\ \text{lbf/pé}^3$
1.30 $1\ \text{m}^3/\text{s} = 35{,}3\ \text{pé}^3/\text{s}$
$1\ \text{pé}^3/\text{s} = 449$ gpm
1 gal/h $= 1{,}05 \times 10^{-3}$ L/s
1 SCFM $= 1{,}70\ \text{m}^3/\text{h}$
1.31 32 psi $= 2{,}25\ \text{kgf/cm}^2$
1.32 1 basquetebol $= 5{,}84$ N
1 lançamento $= 6{,}40$ m
1 tiro $= 45$ s
razão de massa $= 1850$
1.33 1 beisebol $= 1{,}42$ N
1 rebatida $= 117$ m
1 retirada $= 40{,}2$ m/s
razão de massa $= 0{,}103$
1.34 $W = 59{,}9$ lbf, $\forall = 0{,}964\ \text{pé}^3$

Capítulo 2

2.3 $y = cx^{-b/a}$
2.4 $xy = c$
2.5 $(x + B/A)y = c$
2.6 $\vec{V} = 8\hat{i} - 4\hat{j}$ m/s; $y = 2x^{-2}$
2.7 $xy^2 = c$
2.8 $x = y/3$; $t = 2$ s
2.9 $xy = 2$
2.10 $xy = 2$
2.11 $xy = 8$
2.12 $y - y_0 = (B/2A^2)(x - x_0)^2$
2.21 $y = (x^2/4) + 4$; (4, 8); (5, 10,25)
2.22 $x = (y^2/4) - 3$; (6, 6); (1, 4)
2.23 (2,8; 5), (3, 3)
2.24 (5,67; 3,00); (3,58; 3,25)
2.27 $\tau_{yx} = -3{,}05\ \text{N/m}^2$; Mais x
2.28 $F = 0{,}0152$ N; Direita
2.30 $a = -0{,}462\ \text{pé/s}^2$
2.31 $\tau_{yx} = 0{,}277\ \text{lbf/pé}^2$; Positivo x
2.32 $F = 34{,}8$ lbf
2.33 $V = 34{,}3$ pé/s
2.34 $F_v = \mu VA/h$; $V = (mgh/\mu A)(1 - \exp[-\mu AT/(M + m)h])$
2.35 $F_b = \mu Ua^2/h$; $t = 3{,}0h/\mu a^2$
2.36 $a_0 = 4{,}91\ \text{m/s}^2$;
$U = (g\,\text{sen}\theta md/\mu A)(1-\exp(-\mu AT/md))$
2.37 $F = 1{,}01$ N
2.38 $T = 15{,}3\ \text{pé}\cdot\text{lbf}$
2.39 $\mu = 8{,}07 \times 10^{-4}\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2$
2.40 $\mu = 0{,}0208\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2$
2.41 $\mu = 0{,}0781\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2$
2.43 $\omega_{\text{máx}} = 2{,}63$ rad/s; $t = 0{,}671$ s
2.44 $\mu = 0{,}202\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2$
2.45 $T = \pi\mu\omega R^4/2h$
2.46 $\dot{\gamma} = \omega/\theta$; $T = 2\pi R^3\tau_{yx}/3$
2.47 $T = \pi\mu\Delta\omega R^4/2a$; $\mathcal{P} = \pi\mu\omega_0\Delta\omega R^4/2a$;
$s = 2Ta/\pi\mu R^4\omega_i$; $\eta = 1 - s$

2.49 $u = 0,277$ por cento
2.50 $\tau = \mu\omega z \operatorname{tg} \theta / a$; $T = 0,0206$ N · m
2.51 $T = \dfrac{2\pi\mu\omega R^4}{h}\left(\dfrac{\cos^3\alpha}{3} - \cos\alpha + \dfrac{2}{3}\right)$
2.53 $\Delta p = 2,91$ kPa
2.57 $\Delta\rho/\rho_0 = 0,453\%$

Capítulo 3

3.1 $m = 14,7$ kg; $t = 11,9$ mm
3.4 $F = 21,9$ N
3.5 $F = 2620$ lbf; $T = 14,4$ lbf
3.6 $\rho = 5,72$ slug/pé^3; SG = 2,95
3.7 $D = 14,4$ mm
3.10 $\Delta\rho/\rho_0 = 4,34\%$; 2,14%
3.11 $p = 6,39 \times 10^3$ N/m^2; $h = 43,6$ mm
3.13 $p = 6,72$ psig
3.14 $H = 17,8$ mm
3.15 $H = 30,0$ mm
3.16 $h = 42,8$ mm
3.17 $p_1 - p_2 = 59,5$ Pa
3.18 $p_a = 1,18$ psig
3.19 SG = 0,900
3.20 $p_1 - p_2 = 558$ N/m^2
3.21 $p_A - p_B = 1,64$ psi
3.22 $l = 1,6$ m
3.23 $L = 27,2$ mm
3.24 $l = 0,546$ m
3.25 $h = 1,11$ pol.
3.26 $h = 7,85$ mm; $s = 0,308$
3.27 $\theta = 12,5°$; $s = 5,0$
3.28 $\theta = 11,1°$
3.29 $p_{atm} = 14,0$ psi
3.30 $l = 0,316$ m
3.31 $\Delta h = 38,1$ mm; 67,9 mm
3.34 $\Delta z = 89,0$ mm; $\Delta z = 1440$ m
3.35 $\rho = 0,00332$ kg/m^3
3.36 $p = 57,5$ kPa; $p = 60,2$ kPa
3.38 $F_R = 25,7$ kN, $y' = 1,86$ m; $F_R = 71,5$ kN, $y' = 1,78$ m
3.39 $F_L = 14,7$ kN; $F_L = 52,7$ kN
3.40 $F_R = 376$ N; $y' = 0,3$ m
3.41 $F_A = 366$ kN
3.42 $W = 15.800$ lbf
3.43 $F = 2\rho g R^3/3$; $y' = 3\pi R/16$
3.44 $F_D = 32,9$ N
3.45 $F = 1,82 \times 10^6$ lbf; $\vec{F}_H = (1,76\hat{i} + 3,04\hat{j})10^6$ lbf
3.46 $F_R = 552$ kN; $(x', y') = (2,5; 2,0)$ m
3.49 $F = 33,3$ kN; $D \approx 7,3$ mm
3.50 $F_A = 32,7$ kN
3.51 $d = 2,66$ m
3.52 $F_{AB} = 1800$ lbf
3.53 $D = 2,60$ m
3.54 SG = 0,542
3.56 (a) $F_V = 73,9$ kN; $x' = 1,06$ m
(b) $F_{A_H} = 34,8$ kN (c) $F_{A_V} = 30,2$ kN
3.57 (a) $F_V = 7,63$ kN; momento = 3,76 kN · m
(b) $F_{A_H} = 5,71$ kN
3.58 $F_V = 1,05$ MN; $x' = 1,61$ m
3.59 $F_{R_V} = \rho g w \pi R^2/4$; $x' = 4R/3\pi$
3.60 $F_{R_V} = 2,19$ kN; $x' = 0,243$ m
3.61 $F_{R_V} = 17.100$ lbf; $x' = 2,14$ pé
3.62 (a) $F_{R_V} = 14.200$ lbf; $z' = 1,91$ pé
(b) $F_{R_V} = 12.500$ lbf; $z' = 1,93$ pé
3.63 $F_B = 82,4$ kN
3.64 $F_R = 1,83 \times 10^7$ N; $\alpha = 19,9°$
3.65 $F_R = 370$ kN; $\alpha = 57,6°$
3.66 $M/L = \rho R^2[1 + 3\pi/4]$, $F/L = \rho g R^2/2$
3.67 $F_V = 1,55$ kN; $x' = 0,120$ m
3.68 $F_V = 2,48$ kN; $x' = 0,642$ m;
$F_H = 7,35$ kN; $y' = 0,217$ m
3.69 $W = 4\rho g L(H - d)^{3/2}/3\sqrt{a}$
3.70 SG = $(\cos^{-1}(1 - \alpha) + (\alpha - 1)\sqrt{2 - \alpha})/\pi$
3.72 $M = 631$ kg
3.73 $\gamma_s = 51,2$ lbf/pé^3; $h_G = 0,223$ pé
3.74 $h = 177$ mm
3.75 SG = $SG_{H_2O} W_{ar}/(W_{ar} - W_{líquido})$
3.78 $F_B = 8,02 \times 10^{-11}$ N;
$V = 0,344$ mm/s
3.79 As alegações são válidas; a sustentação aumenta 45 por cento.
3.82 $\theta = 23,8°$
3.83 $D = 82,7$ m; $M = 637$ kg
3.84 $D = 116$ m; $M = 703$ kg
3.86 SG > 0,70
3.90 $\omega = 1,81$ rad/s
3.91 $\omega = 13,1$ rad/s; Não
3.92 $a = gh/L$
3.93 Inclinação = 0,22
3.94 $a_r = -r\omega^2$; $\partial p/\partial r = \rho r\omega^2$; $p = 7,19$ MPa
3.95 $\Delta p = \rho\omega^2 R^2/2$; $\omega = 7,16$ rad/s
3.96 $\omega = 188$ rad/s
3.97 Inclinação = −0,20;
$p(x, 0) = 106 - 1,57x$(m) kPa
3.98 $\alpha = 13,3°$
3.99 $\alpha = 30°$; Inclinação = 0,346
3.100 Inclinação = 0,540; $\omega = 3,48$ rad/s
3.101 $T = 47,6$ lbf; $p = 55,3$ lbf/pé^2 (manométrica)
3.102 $p_2/p_1 = 24,2$
3.105 $\theta = 14,3°$ (em direção ao centro de curvatura)
3.106 $\omega = 31,3$ rad/s;
$p_{máx} = 51,5$ kPa (manométrica);
$p_{mín} = 43,9$ kPa (manométrica)

Capítulo 4

4.1 $s_2 - s_1 = -0,291$ kJ/(kg · K)
4.2 $V_0 = 87,5$ km/h
4.3 $s = 2290$ pé, $t = 22,4$ s
4.4 $\theta = 48,2°$
4.5 $\Delta U = 4,50 \times 10^5$ Btu; $\Delta U = 0$; $dT/dt = 11,8°$R/h

4.6 $\Delta u = 77{,}5$ kJ/kg
4.7 $t = 4{,}18$ h; $Q = -7{,}02$ kcal
4.8 $h = 21{,}2$ mm; $\mu_s = 0{,}604$
4.10 $Q = 0$; $mf = -0{,}5\hat{i} - 0{,}5\hat{j}$ m^4/s^2
4.11 $Q = Vhw/2$; $mf_x = -\rho V^2 wh/3$
4.12 $Q = -12{,}0$ m^3/s; $mf = 16\hat{i} - 24\hat{j} - 12\hat{k}$ m^4/s^2
4.13 $Q = 8{,}0$ pé^3/s
4.14 $Q = u_{\text{máx}}\pi R^2/2$; $mf = u_{\text{máx}}^2 \pi R\hat{i}/3$
4.15 K.E. fluxo $= -\rho V^3 wh/8$
4.16 K.E. fluxo $= \pi\rho u_{\text{máx}}^3 R^2/8$
4.17 $Q_3 = -5{,}00$ pé^3/s (para dentro do VC)
4.18 $\dot{m}_3 = 2500 + 999\cos(4\pi t)$ kg/s
4.19 $\vec{V}_3 = 4{,}04\hat{i} - 2{,}34\hat{j}$ m/s
4.20 $\dot{m}/w = \rho^2 gh^3 \operatorname{sen}\theta/6\mu$
4.21 $u_{\text{máx}} = 7{,}50$ m/s
4.22 $V_m = \pi V_1/4$
4.23 $U = 5{,}00$ pé/s
4.24 $V_3 = 3{,}33$ pé/s (para dentro do VC)
4.25 $v_{\text{mín}} = 5{,}0$ m/s
4.26 $\dot{m}_2 = 16{,}2$ kg/s
4.27 $\partial \mathcal{V}/\partial t = -0{,}181$ gal/s
4.28 $dh/dt = -0{,}326$ mm/s (caindo)
4.29 $dh/dt = -8{,}61$ mm/s
4.30 $\partial\rho/\partial t = -0{,}369$ kg/m^3/s
4.31 $\partial\rho_0/\partial t = 2{,}50 \times 10^{-3}$ slug/pé^3/s
4.32 $dh/dt = -56{,}6$ mm/s
4.33 $Q = 1{,}50 \times 10^4$ gal/s; $A = 4{,}92 \times 10^7$ pé^2
4.34 $y = 0{,}134$ m
4.35 $t = 22{,}2$ s
4.36 $dy/dt = -9{,}01$ mm/s
4.37 $Q_0 = 3{,}61 \times 10^{-5}$ m^3/s; $dh/dt = -0{,}0532$ m/s
4.38 $\dot{m}_{\text{bc}} = 1{,}42$ kg/s (para fora)
4.39 $Q_{\text{cd}} = 4{,}5 \times 10^{-3}$ m^3/s; $Q_{\text{ad}} = 0{,}6 \times 10^{-3}$ m^3/s; $Q_{\text{bc}} = 1{,}65 \times 10^{-3}$ m^3/s
4.40 $t = 6\mathcal{V}_0/5Q_0$
4.43 $mf = 349\hat{i} - 16{,}5\hat{j}$ N
4.44 Razão = 1,2
4.45 Razão = 1,33
4.46 $mf = -340\hat{i} - 1230\hat{j}$ lbf
4.47 $mf = -320\hat{i} + 332\hat{j}$ N
4.48 $T = 1{,}23$ N
4.49 $M = 409$ kg
4.50 $F_x = 0{,}0230$ lbf
4.51 $F_x = 184$ N
4.52 $M = 671$ kg
4.53 $F = 1{,}81$ kN, tensão
4.54 $F = 321$ N
4.55 $F = 370$ N
4.56 $F = 206$ lbf, tensão
4.57 $\vec{F} = -714\hat{i} + 498\hat{j}$ N
4.58 $F = 8{,}32$ kN
4.59 $F = 1{,}70$ lbf
4.60 $Q = 0{,}424$ m^3/s; $F_y = 4{,}05$ kN
4.61 $T = 65.200$ lbf
4.62 $T = 47.400$ lbf
4.64 $T = \rho gy\pi d^2 \cos\theta/2$
4.65 $t = 1{,}19$ mm; $F_x = 3{,}63$ kN
4.66 $\vec{F} = -26{,}7\hat{i} - 139\hat{j}$ lbf
4.67 $\vec{F} = -4{,}68\hat{i} + 1{,}66\hat{j}$ kN
4.68 $V_2 = 6{,}60$ m/s; $p_2 - p_1 = 84{,}2$ kPa
4.69 $\vec{F} = -1040\hat{i} - 667\hat{j}$ N
4.70 $F = 837$ lbf
4.71 $F = 4{,}77$ lbf
4.72 $F = 5{,}11$ kN
4.73 $Q = 0{,}141$ m^3/s; $\vec{F} = -1{,}65\hat{i} - 1{,}34\hat{j}$ kN
4.74 $\vec{F} = 799\hat{i} - 387\hat{j}$ N
4.75 $K_x = 37{,}9$ N
4.76 $\dot{m} = 9{,}67$ kg/s; $V_{2,\text{máx}} = 15{,}0$ m/s; $F_D = 65$ N
4.77 $u_{\text{máx}} = 30$ pé/s; $p_1 - p_2 = 0{,}190$ lbf/pé^2
4.78 $u_{\text{máx}} = 60$ pé/s; $p_1 - p_2 = 0{,}699$ lbf/pé^2
4.79 $F = 7{,}90 \times 10^{-4}$ N
4.80 $F/w = 0{,}277$ N/m
4.81 Arrasto = 0,446 N
4.82 $F/w = 0{,}0393$ N/m
4.85 $h_2/h_1 = 0{,}5(1 + \operatorname{sen}\theta)$
4.86 $F_D/w = 54{,}1$ N/m
4.87 Erro = 1,73 por cento
4.88 $h = H/2$
4.89 $h = 89{,}6$ mm; $F = 0{,}242$ N
4.90 $\mu_s < 0{,}181$
4.91 $V = [V_0^2 + 2gh]^{1/2}$; $F = 1{,}49$ N
4.92 $V = [V_0^2 - 2gh]^{1/2}$; $h = 4{,}15$ pé
4.93 $V = 175$ pé/s; $F_{x\,\text{jato}} = 2{,}96$ lbf
4.94 $M = 4{,}46$ kg; $M_w = 2{,}06$ kg
4.96 $p_1 = 61{,}0$ kPa (manométrica) $K_y = 209$ N (perpendicular à placa)
4.98 $z = 3V_0^2/2g$
4.99 $z = V_0^2/2g$
4.100 $p(x) = p(0) - \rho(Qx/whL)^2$
4.102 $h_1 = [h_2^2 + 2Q^2/gb^2h_2]^{1/2}$
4.103 $V(r) = V_0 r/2h$
4.105 $\vec{F} = -822\hat{i} + 220\hat{j}$ N
4.106 $\vec{F} = -570\hat{i} + 329\hat{j}$ lbf
4.107 $\vec{F} = -135\hat{i} + 135\hat{j}$ N
4.108 $F = 1{,}73$ kN
4.109 $F = 167$ N
4.110 $F = 3840$ lbf para $U = 75$ mph
4.111 $\dot{W} = \rho(V - U)^2 UA(1 - \cos\theta)$
4.112 $t = 4{,}17$ mm; $F = 4240$ N
4.113 $t = 6{,}25$ mm; $F = 7940$ N
4.114 $\alpha = 30°$; $F = 10{,}3$ kN
4.115 $U = V/2$
4.116 $\dot{m}_2/\dot{m}_3 = 0{,}5$; $F = 7{,}46$ kN
4.117 $F = 187$ N
4.118 $a_{\text{rf}} = 13{,}5$ m/s^2
4.119 $t = M/\rho AV(1 + \operatorname{sen}\theta)$
4.120 $dU/dt = 13{,}7$ m/s^2; $U_t = 15{,}8$ m/s
4.121 $U/V = \ln[M_0/(M_0 - \rho VAt)]$
4.123 $\theta = 19{,}7°$
4.124 $A = 111$ mm^2

4.125 $A = 0{,}900$ pol.^{2}; $t = 3$ s
4.126 $t = 22{,}6$ s
4.127 $h = 17{,}9$ mm
4.128 $U = 22{,}5$ m/s
4.129 $a_{rf} = 5{,}99$ m/s^2; $U/U_t = 0{,}667$
4.130 $t = 1{,}71$ s; $s = 7{,}47$ m
4.131 $dU/dt = 14{,}2$ m/s^2; $U_t = 15{,}2$ m/s
4.132 $U_t = 15{,}8$ m/s
4.133 $t = M/\rho VA(1 + V/U_0)$
4.134 $U/U_0 = e^{-4\rho VAt/M}$
4.135 $t = 0{,}750\, M/\rho VA$; $x = 0{,}238\, MU_0/\rho VA$
4.136 $a_y = -16{,}5$ pé/s^2
4.137 $Q \approx 0{,}0462$ m^3/s
4.138 $U = 270$ m/s
4.139 $t = 129$ s
4.140 $U = 834$ m/s; $a_{máx} = 96{,}7$ m/s^2
4.141 $a = 83{,}3$ m/s^2; $U = 719$ m/s
4.142 $M_f = 186$ lbm
4.143 $U = 344$ m/s
4.144 Fração de massa = 0,393
4.145 $M_{combustível} = 38{,}1$ kg
4.146 $a_0 = 17{,}3g$
4.147 $V = 1910$ m/s
4.148 $V = 3860$ pé/s; $Y = 33.500$ pé
4.149 $U_{máx} = 384$ m/s @ $t = 11{,}1$ s
4.151 $\theta = 18{,}9°$
4.152 $U = 16{,}5$ m/s
4.153 $t = M/2\rho VA$
4.154 $U = U_0/[1 + 2\rho U_0 At/M_0]^{1/2}$
4.155 $U/V = 1 - 1/[1 + 2\rho VAt/M_0]^{1/2}$
4.156 $\dot{m} = Mg/V_e$; $t = 110$ s
4.157 $V_{máx} = 456$ pé/s; $Y_{máx} = 3600$ pé (139 m/s; 1090 m)
4.160 $h = 20{,}5$ m
4.167 $V = 43{,}8$ m/s
4.168 $F = 44{,}4$ kN; $T = 920$ kN · m
4.169 $T = 0{,}193$ N · m; $\dot{\omega} = 2610$ rad/s^2
4.170 $\omega_{máx} = 29{,}5$ rad/s
4.171 $\omega_{máx} = 20{,}2$ rad/s
4.172 $\omega = 39{,}1$ rad/s
4.173 $T = 0{,}0161$ N · m
4.174 $T = 0{,}0722$ N · m
4.175 $\dot{\omega} = 0{,}161$ rad/s^2
4.177 $\omega = 6{,}04$ rad/s; $A = 1720$ m^2
4.178 $T = 29{,}4$ N·m; $\vec{M} = 51{,}0\hat{i} + 1{,}40\hat{j}$ N·m
4.182 $\dot{W} = -80{,}0$ kW
4.183 $\dot{Q} = -146$ Btu/s
4.184 $\dot{W} = -96{,}0$ kW
4.185 $p_1 - p_2 = 75{,}4$ kPa
4.186 $\partial T/\partial t = -0{,}177$°R/s
4.187 $\dot{W} = -3{,}41$ kW
4.188 Eficiência = 74,8%
4.189 $Q = 0{,}0166$ m^3/s; $z_{máx} = 61{,}4$ m; $F = 561$ N
4.190 $V = 94{,}5$ m/s; $\dot{W} = -739$ kW
4.191 $\Delta m.e. = -1{,}88$ N · m/kg; $\Delta T = 4{,}49 \times 10^{-4}$ K

Capítulo 5

5.1 (a)
5.2 (b), (c)
5.3 (a), (b)
5.4 $A + E + J = 0$
5.5 $u = -2yx - 2x + f(y)$
5.6 $v = -A(y^2/2 - By) + f(x)$
5.7 $v = Ay/x^2$
5.8 $u = A/x$
5.9 $v/U)_{máx} = 0{,}0025$
5.10 $v/U)_{máx} = 0{,}00167$
5.11 $v/U)_{máx} = 0{,}00182$
5.12 $u = 3Bx^2y^2/2$; $xy^{3/2} = c$
5.13 $v = -2Axy^3/3$; $xy^{3/2} = c$
5.16 (a), (b), (c)
5.17 $V_\theta = -\Lambda\, \text{sen}\theta/r^2 + f(r)$
5.18 $\vec{V} = \hat{e}_\theta \omega rz/h$
5.19 Sim; $r = e^\theta$
5.22 $\psi = Uy^2/2h$; $y = h/\sqrt{2}$
5.23 $\psi = x^2y - y^3/3$
5.24 $\psi = A\theta - A\ln r$
5.25 $\vec{V} = (-U\cos\theta + q/2\pi r)\hat{e}_r + U\,\text{sen}\theta\,\hat{e}_\theta$
5.26 $\psi = -y^3z - 2z^2$
5.27 $Q = 4$ m^3/s/m
5.28 $\psi = Uy^2/2h$; $y = 2{,}83$ pé
5.29 $\psi = Uy^2/2\delta$; $y/\delta = 0{,}50, 0{,}707$
5.30 $y/\delta = 0{,}442, 0{,}652$
5.31 $y/\delta = 0{,}460, 0{,}667$
5.32 $\psi = -\omega r^2/2$; $Q/b = 6 \times 10^{-4}$ m^3/s/m
5.33 $\psi = -c\ln r$; $Q/b = 0{,}168$ m^3/s/m
5.34 Sim; $\vec{a}_p = 0{,}625\hat{i} + 0{,}313\hat{j}$ m/s^2
5.35 $\vec{a}_p = (16\hat{i} + 32\hat{j} + 16\hat{k})/3$ m/s^2
5.36 3-D; Não; $\vec{a}_p = 27\hat{i} + 9\hat{j} + 64\hat{k}$ m/s^2
5.37 $\vec{a}_p = -2{,}86(10^{-2}\hat{i} + 10^{-4}\hat{j})$ m/s^2, $dy/dx = 0{,}01$
5.38 $u = Ax^2/2$; $\vec{a}_p = A^2(0{,}5\hat{i} + \hat{j})$
5.39 $\vec{a}_p = -4\hat{i} - 12\hat{j}$ m/s^2
5.40 $\vec{a}_p = -(U^2/2L)(1 - x/2L)$
5.41 $\vec{a}_p = -(Q/2\pi h)^2 r^{-3}\hat{e}_r$
5.42 $a_r = -81{,}0$ km/s^2; $a_r = -3{,}0$ km/s^2
5.43 $V_r = qr/2h$; $a_r = 60{,}0$ m/s^2
5.45 $DT/Dt = -14$°F/min
5.46 $\partial T/\partial x = -0{,}0873$°F/mi
5.47 $DC/Dt = 0{,}00$, 125 ppm/h, 250 ppm/h
5.49 $\vec{a}_p = x\hat{i} + y\hat{j}$
5.50 Sim; $\vec{a}_p = 330\hat{i} + 200\hat{j}$ pé/s^2
5.51 $c = -2$ s^{-1}; $\vec{a}_p = 4\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$ m/s^2
5.52 $\vec{a}_p = (A^2x - AB)\hat{i} + A^2y\hat{j}$; $\hat{a}_p = -0.12\hat{i} + 0{,}267\hat{j}$ m/s^2, $\vec{a}_p = -0{,}08\hat{i} + 0{,}40\hat{j}$ m/s^2, $\vec{a}_p = -0{,}04\hat{i} + 0{,}80\hat{j}$ m/s^2
5.53 $\psi = axy[2 + \cos(\omega t)]$ + constante; $\vec{a}_{local} = 3\pi\hat{i} - 6\pi\hat{j}$ m/s^2, $\vec{a}_{conv} = 18\hat{i} + 36\hat{j}$ m/s^2; $\vec{a}_{total} = 27{,}4\hat{i} + 17{,}2\hat{j}$ m/s^2

5.54 Razão = 100
5.55 $y/\delta = 0{,}634$
5.57 $v = v_0(1 - y/h)$;
$\vec{a}_p = \hat{i}v_0^2 x/h^2 - \hat{j}(v_0^2/h)(1 - y/h)$
5.58 $\vec{a}_p = \hat{e}_r(v_0/2h)^2 r - \hat{k}(v_0^2/h)(1 - z/h)$
5.60 $\vec{a}_p = 44{,}5\hat{i}$ pé/s^2; $\vec{a}_p = 103\hat{i}$ pé/s^2
5.62 $f_1 = x_0 e^{At}$, $f_2 = y_0 e^{-At}$;
$t(1, 1) = 0{,}693$ s, $t(2, 0{,}5) = 1{,}39$ s;
$\vec{a}_p(1, 1) = \hat{i} + \hat{j}$ m/s^2,
$\vec{a}_p(2, 0{,}5) = 2\hat{i} + 0{,}5\hat{j}$ m/s^2
5.63 $a_t = -0{,}0875, -0{,}226, -0{,}766$ m/s^2;
$a_n = 0{,}279, 0{,}339, 0{,}233$ m/s^2
5.65 Sim; Sim
5.66 Não; Sim
5.67 $\Gamma = -0{,}100$ m^2/s
5.68 $\Gamma = 0$
5.69 $\vec{\omega} = -0{,}5\hat{k}$ rad/s, $\Gamma = -0{,}50$ m^2/s
5.70 Sim; Sim
5.71 $\vec{\omega} = -0{,}05$ s^{-1} $\hat{k}$; $\psi = Ay^2/2 + c$
5.72 $\vec{\omega} = -2x\hat{k}$, $\Gamma = -2$ m^2/s; $\psi = 2xy^2$
5.73 $\psi = A(y^2 - x^2)/2 + By$; $\Gamma = 0$
5.74 $\vec{\omega} = -\hat{k}$
5.75 $\omega = -U/2h$
5.76 $\Gamma = -UL/4$, 0
5.77 $\vec{V} = -2y\hat{i} - 2x\hat{j}$
5.78 Sim; $\psi = -(q\theta + K \ln r)/2\pi$
5.79 $\vec{\zeta} = \hat{e}_\theta V_{\text{máx}} 2r/R^2$
5.80 $\vec{\zeta} = \hat{k}2yu_{\text{máx}}/b^2$
5.82 $df/d\forall = -1{,}85$ kN/m^3
5.83 $df/d\forall = -0{,}0134$ lbf/pé^3

Capítulo 6

6.1 $a = 2{,}24$ m/s^2 para $\theta = 63{,}4°$ acima do eixo x;
$\nabla p = -(1{,}0\hat{i} + 11{,}8\hat{j})$ kN/m^2/m
6.2 $\vec{a}_p = 2\hat{i} + 2\hat{j}$ pé/s^2;
$\nabla p = -(4{,}0\hat{i} + 68{,}4\hat{j})$ lbf/pé^2/pé
6.3 $\vec{a}_p = 605\hat{i} + 5\hat{j}$ pé/s^2;
$\partial p/\partial x = -1170$ lbf/pé^2/pé
6.4 $\nabla p = -(3{,}0\hat{i} + 9{,}0\hat{j})$ kN/m^2/m
6.5 $\vec{a}_p = 2\hat{i} + 2\hat{j}$ pé/s^2;
$\nabla p = -(4\hat{i} + 68{,}4\hat{j})$ lbf/pé^2/pé
6.6 $v = -Ay$; $\vec{a}_p = 8\hat{i} + 4\hat{j}$ m/s^2;
$\nabla p = -12\hat{i} - 6\hat{j} - 14{,}7\hat{k}$ N/m^3;
$p(x) = 190 - 3x^2$ Pa (manométrica)
6.8 Sim; $(x, y) = (2{,}5, 1{,}5)$;
$\nabla p = -\rho[(4x - 10)\hat{i} + (4y - 6)\hat{j} + g\hat{k}]$;
$\Delta p = 9{,}6$ N/m^2
6.9 $p = 43{,}4$ kPa (manométrica)
6.11 $a_x = 16v_0^2 x/D^2$; $p(0) = 8\rho v_0^2(L/D)^2$
6.12 $F = 1{,}56$ N, para baixo
6.13 $\nabla p = -4{,}23\hat{i} - 12{,}1\hat{j}$ N/m^3;
$(x/h) = [1 - y/h] =$ constante
6.14 $\vec{a}_{p\,\text{máx}} = 144$ m/s^2; $M/L = 1{,}20 \times 10^{-3}$ kg/m
6.15 $F_y = 4\rho V^2 L^3 w/3b^2$
6.16 $a_{p_x} = q^2 x/h^2$
6.17 $a_r = -2800g$; $\partial p/\partial r = 270$ lbf/pé^2/pé
6.19 $p_{L/2} - p_0 = -30{,}6$ N/m^2
6.21 $\vec{V} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ m/s; $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$ m/s^2
$\vec{a}_t = 1{,}16\hat{i} - 0{,}771\hat{j}$ m/s^2;
$\partial p/\partial s = -1{,}71$ N/m^2/m
6.22 $y = x/2$; $a_t = -7{,}34$ m/s^2
6.23 $B = -0{,}1$ m$^{-1}\cdot$ s^{-1}; $\vec{a}_p = 0{,}04\hat{i} + 0{,}02\hat{j}$ m/s^2
$a_n = 0{,}0291$ m/s^2
6.24 $\vec{a}_p = 0{,}5\hat{i} + 1{,}0\hat{j}$ m/s^2; $R = 2{,}83$ m
6.25 $\vec{a}_p = 2{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}$ pé/s^2; $R = 1{,}40$ pé
6.26 $\vec{a}_p = 4{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j}$ pé/s^2; $R = 5{,}84$ pé
6.27 $\vec{a}_p = 4\hat{i} + 2\hat{j}$ pé/s^2; $R = 5{,}84$ pé
6.28 $x^2 y = 2$; $\vec{a}_p = 2A^2 x^3\hat{i} + Bx^2 y(B - A)\hat{j}$;
$R = 5{,}35$ m
6.29 $\Delta h = 33{,}7$ mm Hg
6.30 $\Delta h = 48{,}4$ mm água
6.31 $\Delta h = 37{,}3$ mm água
6.32 $\Delta h = 628$ mm água
6.33 $V = 89{,}5$ pé/s
6.35 $V = 27{,}5$ m/s
6.36 $p_{\text{dyn}} = 296$ N/m^2; $p = -355$ N/m^2 (manométrica)
6.37 $p_0 = 900$ kPa (abs); $p_0 = 413$ kPa (abs);
$\vec{V}_{\text{abs}} = 2{,}5\hat{i} + 21{,}7\hat{j}$ m/s; $p_0 = 338$ kPa (abs)
6.38 $p = 227$ kPa (manométrica)
6.39 $p = 291$ kPa (manométrica)
6.40 $h = 7{,}72$ m
6.41 $V = 21{,}5$ pé/s; $Q = 0{,}469$ pé^3/s
6.43 $p = -0{,}404$ kPa (manométrica)
6.44 $p = 52{,}6$ kPa (manométrica)
6.45 $Q = 66{,}1$ m^3/h
6.46 $V = 330$ pé/s
6.47 $p = 1150$ kPa (manométrica)
6.48 $V = 44{,}2$ m/s
6.49 $\Delta h = 1{,}77$ pol. de água $\Delta h = 3{,}15$ pol. de água
6.50 $\Delta p = 5{,}54$ kPa; $\Delta p/q = 0{,}933$
6.51 $p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\,\text{sen}^2\,\theta)$;
$\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$
6.52 $F = 338$ lbf
6.53 $Q = 301$ gpm; $F_x = 565$ lbf; Tensão
6.54 $p = 39{,}0$ psf (manométrica); $K_x = 1{,}67$ lbf
6.55 $Q = 2{,}55 \times 10^{-3}$ m^3/s
6.56 $p_{1g} = 49{,}2$ kPa; $K_x = 57{,}5$ N
6.57 $V_2 = 3{,}05$ m/s; $p_{0_2} = 4{,}65$ kPa (manométrica); $K_y = 11{,}5$ N
6.58 $p = 1{,}35$ psig; $p_{\text{máx}} = 1{,}79$ psig; $F = 4{,}76$ lbf
6.61 $h/h_0 = \left[1 - \sqrt{\frac{g}{2h_0(AR^2 - 1)}}\,t\right]^2$
6.62 $h = H/2$; $R = H$
6.63 $\Delta h = 89{,}6$ mm; $K_x = 0{,}242$ N
6.64 $p = p_{\text{atm}} - \rho q^2(R^2 - r^2)/8h^2$; $M = 3{,}12 \times 10^{-4}$ kg
6.65 $F_V = 532$ kN

6.66 $F_V = 83{,}3$ kN
6.67 $p = 164$ kPa (manométrica); $F = 152$ N
6.73 $C_c = 0{,}5$
6.74 $p = 12{,}3$ kN/m^2 (manométrica)
6.75 $dQ/dt = 0{,}0516$ m^3/s/s
6.76 $d^2l/dt^2 = 2gl/L$
6.77 $p_{\text{manométrica}} = 3\rho V^2R^2/8b^2$
6.78 $D/d = 0{,}32$
6.79 Não; Sim
6.80 Não; $p_2 - p_1 = -252$ lbf/pé^2
6.81 $\phi = [A(y^2 - x^2)/2 + Bxy]t$
6.82 $\phi = xy^2 - x^3/3$
6.83 $\vec{V} = -2(y\hat{i} + x\hat{j})$; $\phi = 2xy$
6.84 $\psi = -2xy$
6.85 $\psi = B(x^2 - y^2)/2 - 2Axy$
6.86 $\vec{V} = -(2x+1)\hat{i} + 2y\hat{j}$; $\psi = -(2xy + y)$; $\Delta p = 12{,}0$ kN/m^2
6.87 $|\vec{V}| = x^2 + y^2$; $\psi = xy^2 - x^3/3$
6.88 $\phi = 3A(x^2y - x^3)$
6.89 Ponto de estagnação $(-2, 4/3)$ m; $\phi = A(y^2 - x^2)/2 - Bx - Cy$; $\Delta p = 55{,}8$ kPa
6.90 $Q = 1{,}25$ m^3/s/m; $\phi = B(y^2 - x^2)/2$
6.91 $r > 10a$
6.93 $r > 9{,}77$ m, $p = -6{,}37$ kPa (manométrica)
6.94 $y = \pm a$
6.95 $\psi = 0{,}324\,q$; $Q/b = 0{,}176\,q$; $p_{\text{dyn}} = 0{,}8\rho q^2/4\pi^2a^2$
6.97 Estagnação em $r = 0{,}367$ m, $\theta = 0, \pi$
6.98 $h = 0{,}162$ m; $\vec{V} = 44{,}3\hat{i}$ m/s, $p = -957$ N/m^2 (manométrica)
6.100 $q = 25\pi$ m^2/s; $y = \pm\pi/2$
6.101 $r = 1{,}82$ m, $\theta = 63°$; $p = -317$ N/m^2 (manométrica)
6.102 $R_x/b = 5{,}51$ kN/m

Capítulo 7

7.1 $F/\mu VD =$ constante
7.2 $\Delta p/\rho V^2 = f(\mu/\rho VD, d/D)$
7.3 $\delta/x = f(\rho Ux/\mu)$
7.4 $\tau_w/\rho U^2 = f(\mu/\rho UL)$
7.6 $Q = h^2(gh)^{1/2} f(b/h)$
7.7 $V = \sqrt{gD}\,f(\lambda/d)$
7.8 $V(\rho\lambda/\sigma)^{1/2} =$ constante
7.9 $W/D^2\omega\mu = f(l/D, c/D)$
7.10 $T = R^3\mu\omega f(h/R)$
7.11 $E = \rho V^3 f(nr/V)$
7.12 $\mathcal{P} = \rho D^5\omega^3 f(Q/D^3\omega)$
7.13 4; 3; $\mu/\rho d^{3/2}g^{1/2}$
7.14 4; 3; $\mu/\rho d^{3/2}g^{1/2}$
7.15 $Q = Vh^2 f(\rho Vh/\mu, V^2/gh)$
7.16 $R/\rho V^2b^2$, $\rho Vb/\mu$, h/b
7.17 3; $\rho VD/\mu$, d/D, $\sigma/\rho DV^2$
7.18 $\rho VD/\mu$, h/d, D/d
7.19 4; Q/Vd^2; $\mu/\rho VD$
7.20 3; $\dot{m} = \rho A^{5/4}g^{1/2} f(h/A^{1/2}, \Delta p/\rho A^{1/2}g)$
7.21 $T/\rho V^2D^3$, $\mu/\rho VD$, $\omega D/V$, d/D
7.22 $F_T/\rho V^2D^2$, gD/V^2, $\omega D/V$, $p/\rho V^2$, $\mu/\rho VD$
7.23 $\mathcal{P} = p\omega D^5 f(\mu\omega/p, c/D, \ell/D)$
7.24 $\mathcal{P}/\rho D^2V^3$, $\omega D/V$, $\mu/\rho VD$, c/V
7.25 $\sigma/\rho_L V^2D$, ρ_G/ρ_L, d/D, $\mu/\rho_L VD$
7.26 $\dot{Q}/\rho V^3L^2$, $c_p\Theta/V^2$, $\mu/\rho VL$
7.27 $p_{\text{máx}}/\rho U_0^2 = f(E_v/\rho U_0^2)$
7.28 $\mathcal{P}/\rho\omega^3D^5$, $V/\omega D$, H/D, $\mu/\rho\omega D^2$
7.29 $V_{\text{ar}}/V_{\text{água}} = 15{,}1$ para 20°C
7.30 $p = 539$ kPa; $F = 1{,}34$ kN
7.31 $V_m/V_p = 0{,}331$; $F_D = 214$ N
7.32 $p = 1{,}94$ MPa (abs); $F_D = 43{,}4$ kN
7.33 $V_m = 40{,}3$ m/s; $V_p = 40{,}3$ m/s
7.34 $V = 179$ pé/s; $F_m/F_p = 4{,}94$
7.35 $V_m = 6{,}00$ m/s; $F_D = 1{,}05$ N
7.36 $D_m = 5{,}04$ pol.; $\omega_m = 1000$ rpm
7.37 $V_m = 80$ pé/s; $\omega_m = 1600$ rpm
7.38 $p_m = 2{,}96$ psia
7.39 $\bar{V} = 0{,}048$ pé/s; $\Delta p = 0{,}019$ psig
7.40 $V_{\text{máx}} = 27{,}1$ pé/s
7.41 $C_{D,m} = 0{,}0972$; $F_D = 470$ N
7.42 $V_m = 9{,}51$ m/s; $F_{Dp}/F_{Dm} = 0{,}263$; $p_\infty = 88{,}1$ kPa
7.43 $V_1/V_2 = 1/2$; $f_1/f_2 = 1/4$
7.44 $F_D = 2{,}46$ kN; $\mathcal{P} = 55{,}1$ kW
7.45 $F_D = 237$ kN
7.46 $\tau = 1070$ h
7.47 $V_m = 1{,}88$ m/s; $V_m = 7{,}29$ m/s, $F_{Dm}/F_D = 0{,}872$
7.48 $C_D = 0{,}951$; $F_D = 794$ lbf; $V = 807$ pé/s
7.49 Razão de escala = 1/50; Impossível
7.51 $Q = 4930$ cfm
7.52 $\Delta p_p = 52{,}5$ kPa; $Q_m = 0{,}0928$ m^3/min
7.53 $h = 145$ pé · lbf/slug; $Q = 5{,}92$ pé^3/s; $D = 0{,}491$ pé
7.54 $F_t/\rho\omega^2D^4 = f_1(g/\omega^2D, \omega D/V)$; $T/\rho\omega^2D^5 = f_2(g/\omega^2D, \omega D/V)$; $\mathcal{P}/\rho\omega^3D^5 = f_3(g/\omega^2D, \omega D/V)$
7.55 $\omega = 533$ rpm; $F_t = 17.800$ lbf; $T = 53.000$ pé · lbf
7.56 $V = 80$ pé/s; $F_t = 1{,}47 \times 10^5$ lbf; $T = 6{,}72 \times 10^5$ pé · lbf; $\mathcal{P}_t = 2{,}14 \times 10^4$ hp; $\mathcal{P}_{\text{entra}} = 3{,}07 \times 10^4$ hp; $\eta = 0{,}697$
7.57 Razão de EC = 7,22
7.59 $F_B \approx 0{,}273$ N; $C_D = 0{,}443$; $F_D = 1{,}64$ kN
7.60 $F_B = 0{,}574$; 0,44%
7.61 $\sigma/\rho LV_0^2$, gL/V_0^2
7.62 V_0^2/gL
7.63 gL/V_0^2
7.64 ν/V_0L

Capítulo 8

8.1 Turbulento; $7{,}5 < L < 12{,}0$ m
8.5 $Q = 2{,}29 \times 10^{-5}$ m^3/s; $\bar{V} = 2{,}64$ m/s; $L = 1{,}75$ m
8.6 $Re = 4Q/\pi D\mu$; $Re = 3000$
8.8 $\bar{V}/u_{\text{máx}} = 2/3$

8.9 $Q/b = 2h/3$; $V/u_{máx} = 2/3$
8.10 $\tau_{yx} = -1{,}80$ N/m^2 (para a direita); $Q/b = 5{,}40 \times 10^{-6}$ m^3/s/m
8.11 $\tau_{yx} = -0{,}040$ lbf/pé^2 (para a direita); $Q/b = 6{,}67 \times 10^{-5}$ pé^3/s/pé
8.12 $\tau_{yx} = y\partial p/\partial x$; $\tau_{máx} = -0{,}00835$ lbf/pé^2
8.13 $Q = 6{,}32 \times 10^{-2}$ pol.^{3}/s
8.14 $Q = 2{,}44 \times 10^{-2}$ pol.^{3}/s
8.15 $Q = 5{,}93 \times 10^{-4}$ pol.^{3}/s
8.16 $w = 0{,}50$ pé; $dp/dx = -400$ psi/pé; $h = 2{,}02 \times 10^{-3}$ pol.
8.17 $M = 4{,}32$ kg; $a = 1{,}28 \times 10^{-5}$ m
8.21 $\mu = 0{,}0695$ N $\cdot$ s/m^2
8.22 $Q/b = 0{,}0146$ pé^3/s/pé
8.23 $\partial p/\partial x = -92{,}6$ N/m^2/m
8.25 $Re = 1{,}94$; $\tau = 2{,}02$ kN/m^2; $\mathcal{P} = 11{,}4$ W
8.26 $\nu = 1{,}0 \times 10^{-4}$ m^2/s
8.28 $\tau_{máx} = 34{,}8$ N/m^2; $Q/w =$ 263 mm^3/s/mm; $Re = 0{,}236$
8.29 $Q/b = 2{,}5 \times 10^{-3}$ m^3/s/m; $\tau = 1{,}43 \times 10^{-2}$ N/m^2; $\partial p/\partial x = 22{,}9$ N/m^2/m
8.30 $y/b = 0{,}695$; $u_{máx}/U = 1{,}24$; $\forall/w = 9{,}27 \times 10^{-2}$ pé^3/pé
8.32 $\partial p/\partial x = 51{,}6$ N/m^2/m, -103 N/m^2/m
8.33 $Q/b = 3{,}75 \times 10^{-3}$ m^3/s/m; $\tau = 0{,}912$ N/m^2; $\partial p/\partial x = 1{,}46$ kN/m^2/m
8.34 $t = 95{,}5$ s
8.41 $r = 0{,}707R$
8.43 $\Delta p = 4{,}97$ lbf/pol.^{2}; $u_\mu = 32\%$
8.44 $Q = 11{,}3$ mm^3/s
8.45 $\delta D = \pm\, 0{,}775\ \mu$m
8.46 $\Delta p = 349$ kPa, 14,0 GPa
8.49 $u = (c_1/\mu)\ln r + c_2$; $c_1 = \mu V_0/\ln(r_i/r_o)$; $c_2 = -V_0 \ln r_o/\ln(r_i/r_o)$
8.53 $\tau_w = 2{,}16$ lbf/pé^2
8.54 $\bar{\tau}_w = -7{,}91$ N/m^2
8.56 $Q = 4{,}52 \times 10^{-7}$ m^3/s; $\Delta p = 235$ kPa; $\tau_w = 294$ N/m^2
8.57 $n = 6{,}17$ (gráfico); 6,50 (mínimos quadrados)
8.58 $n = 8{,}34$ (gráfico); 9,16 (mínimos quadrados)
8.59 $r/R = 0{,}707$ (laminar); 0,757 (turbulento)
8.62 $\beta = 4/3$ (laminar); 1,02 (turbulento)
8.64 Fluxo de EC = 0,296 N $\cdot$ m/s
8.65 $\alpha = 1{,}54$
8.66 $\alpha = 2{,}0$
8.67 $\alpha = 1{,}055$
8.68 $h_l = 345$ J/kg
8.69 $p = 345$ kPa (manométrica)
8.70 $H_l = 4{,}24$ pé; $h_l = 137$ pé $\cdot$ lbf/slug
8.71 $\bar{V}_1 = 6{,}44$ pé/s
8.72 $d = 2{,}97$ m
8.73 $Q = 2{,}66 \times 10^{-2}$ m^3/s
8.74 $H_l = 2720$ pé
8.77 $H_l = 28{,}4$ pé
8.78 $H = 104$ pé, $H_l = 25{,}2$ pé
8.80 $f = 0{,}042$
8.81 $\Delta T = 0{,}245$ K/km
8.82 $e/D = 0{,}003$
8.85 $p_2 - p_1 = 24{,}4$ lbf/pé^2
8.86 $\bar{V} = 76{,}2$ pé/s; $Q = 224$ pé^3/min
8.87 $Q = 1{,}10 \times 10^{-3}$ m^3/s
8.88 $C_c = 0{,}715$; $K = 0{,}196$
8.89 $Q = 0{,}0361$ pé^3/s
8.90 $\Delta Q = 0{,}0184$ m^3/s
8.95 $\Delta Q/Q = 16{,}4\%$; $p_{mín} = -5{,}26$ kPa (manométrica)
8.96 $AR = 2{,}7$, $2\phi = 12°$; $Q = 0{,}172$ m^3/s
8.97 $\bar{V} = 0{,}723$ m/s; $d = 3{,}66$ m
8.98 $Q = 2{,}87 \times 10^{-5}$ m^3/s; $d = 13{,}6$ mm
8.99 $d = 54{,}0$ m
8.100 $p = 1{,}42$ MPa (manométrica)
8.101 $\Delta z = 88{,}4$ m; Fração = 1,1 por cento
8.102 $\Delta p = 43{,}9$ N/m^2
8.103 $\bar{V} = 12{,}9$ pé/s; $\Delta p = 3{,}63$ psi
8.105 $\Delta z = 8{,}13$ m
8.106 $p = 135$ psig
8.107 $e/D = 0{,}021$; Economia = 48,2 por cento
8.108 $d = 1{,}51$ m
8.110 $L = 26{,}5$ m
8.111 $Q = 1{,}01$ m^3/s
8.112 $Q = 1{,}49$ pé^3/s
8.113 $Q = 0{,}980$ pé^3/s
8.114 $\dot{h}_1 = -42{,}5$ mm/s
8.115 $Q = 5{,}69 \times 10^{-3}$ m^3/s
8.116 $V_0 = 28{,}0$ m/s; $F = 365$ N
8.117 $Q = 5{,}89 \times 10^{-3}$ m^3/s; $L = 2{,}51 \times 10^4$ m; $L = 1{,}15 \times 10^7$ m
8.118 $d = 2{,}08$ pé; $Q = 614$ gpm; $p =$ 79,8 psig
8.119 $Q = 0{,}260$ pé^3/s; $p_{mín} = -2{,}96$ psig
8.120 $Q_A = 0{,}0108$ m^3/s; $Q_B = 0{,}00373$ m^3/s
8.121 $Q = 5{,}30 \times 10^{-4}$ m^3/s; $Q = 5{,}35 \times 10^{-4}$ m^3/s
8.122 $L = 0{,}97$ pé
8.123 $p = 35{,}9$ psig; $Q = 11{,}5$ gpm
8.124 $D \geq 14$ mm
8.125 $D = 2{,}5$ pol. (nominal)
8.126 $h = 0{,}194$ m, $b = 0{,}388$ m
8.127 $D = 6$ pol.
8.129 $Re_{\bar{V}} = 8{,}21 \times 10^4$; $f = 0{,}019$
8.132 $dQ/dt = -0{,}324$ pé^3/s/s
8.134 $\mathcal{P} = 2{,}08$ hp
8.135 $\mathcal{P} = 6{,}01$ hp
8.136 $\Delta p = 52{,}7$ psi
8.137 $D = 48$ mm; $\Delta p = 3840$ kPa; $\mathcal{P} =$ 24,3 kW
8.138 $\mathcal{P} = 664$ hp
8.139 $p = 341$ psig; $\mathcal{P} = 171$ hp
8.140 $\Delta p = 43{,}7$ psi; $\mathcal{P} = 286$ hp; Custo = \$476/dia
8.140 $Q = 108$ gpm; $V = 124$ pé/s; $\mathcal{P} =$ 13,4 hp

8.143 C = \$7,62/dia
8.146 p_2 (manométrica) $= 26{,}3Q_2^2$; $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_0/3$
8.149 $\Delta p = 462$ lbf/pé^2
8.150 $Q = 8{,}15$ pé^3/s
8.151 $Q = 0{,}0404$ m^3/s
8.152 $Q = 96{,}8$ gpm
8.153 $Q = 136$ gpm
8.154 $D = 40{,}8$ mm; $\dot{m} = 0{,}0220$ kg/s
8.155 $\dot{m} = 2{,}10$ kg/s; $\Delta h = 170$ mm Hg
8.157 $Q = 1{,}37$ pé^3/s
8.160 $Re = 1800$; $f = 0{,}0356$; $p = -290$ N/m^2 (manométrica)

Capítulo 9

9.1 $x = 182$ mm; $x_m = 13{,}5$ mm
9.2 $x = 0{,}114$ m
9.6 $A = U$; $B = \pi/2\delta$, $c = 0$
9.9 $\delta^*/\delta = 1/2, 1/3, 3/8, 0{,}363$
9.10 $\delta^*/\delta = 0{,}125, 0{,}333$; $\theta/\delta = 0{,}0972, 0{,}133$
9.11 $\delta^*/x = 1{,}83/\sqrt{Re_x}$; $\theta/x = 0{,}731/\sqrt{Re_x}$
9.12 $\theta/\delta = 0{,}167, 0{,}133, 0{,}137$
9.13 $\dot{m}_{ab} = 3{,}99 \times 10^{-3}$ kg/s; $F_x = -3{,}59 \times 10^{-3}$ N
9.14 $\dot{m}_{ab} = 4{,}2 \times 10^{-3}$ kg/s; $F_x = -4{,}56 \times 10^{-3}$ N
9.15 $\Delta p = 59{,}0$ Pa
9.16 $U_2 = 81{,}4$ pé/s; $p_1 - p_2 = 0{,}264$ lbf/pé^2
9.17 $U_2 = 18{,}4$ m/s; $\Delta p = 2{,}19$ Pa
9.18 $p_2 = -73{,}1$ Pa (manométrica); $\tau = 0{,}300$ N/m^2
9.19 $U_2 = 24{,}6$ m/s; $p_1 = -43{,}9$ mm H_2O; $p_2 = -44{,}5$ mm H_2O
9.20 $F = 0{,}150$ lbf; $\bar{\tau}_w = 0{,}0188$ lbf/ft^2
9.21 $\delta^* = 2{,}54$ mm; $\Delta p = 107$ N/m^2; $F_D = 2{,}28$ N
9.27 $y = 3{,}28$ mm; Inclinação $= 0{,}00327$; $\theta = 1{,}09$ mm
9.29 $F = 1{,}62$ N
9.30 $\theta = 0{,}283$ mm; $F = 1{,}13$ N
9.31 $F = 10{,}8$ mN
9.33 $\delta/x = 3{,}46/\sqrt{Re_x}$; $C_f = 0{,}577/\sqrt{Re_x}$
9.35 $F_D = 5{,}63 \times 10^{-2}$ N
9.36 $F = 0{,}783$ N
9.38 $F_D = 18{,}9$ N; $x_t = 0{,}145$ m
9.40 $F = 2{,}27$ N
9.42 $F = 2{,}32$ N
9.44 $F = 2{,}37$ N
9.45 $\delta_l = 5{,}40$ mm, $\tau_w = 0{,}0980$ N/m^2; $\delta_t = 23{,}6$ mm, $\tau_w = 0{,}498$ N/m^2
9.46 $\delta = 32{,}4$ mm; $\tau_w = 0{,}433$ N/m^2; $F = 0{,}380$ N
9.47 $W = 80{,}1$ mm
9.48 $\Delta p = 6{,}16$ N/m^2; $\Delta x = 232$ mm
9.49 $H_6 = 321$ mm; $L = 0{,}517$ m; $\Delta x = 242$ mm
9.53 $\text{mf}_a = \rho U^2 w\delta/3$; $\text{mf}_b = 8\rho U^2 w\delta/15$
9.54 $a = b = 0, c = 3, d = -2$; $H = 3{,}89$
9.55 $U_{\text{máx}} = 7{,}82$ pé/s; $\Delta h = 0{,}00340$ pol. H_2O
9.56 Redução de área $= -1{,}59\%$; $d\theta/dx = 0{,}61$ mm/m; $\theta \approx 1{,}10$ mm
9.58 $\mathcal{P} = 3{,}82$ kW
9.59 $Re_L = 1{,}55 \times 10^7$; $x_t = 53{,}2$ mm; $\mathcal{P} = 15{,}3$ kW
9.60 $F = 7{,}87$ kN; $\mathcal{P} = 1{,}79$ MW
9.61 $\bar{L} = 9{,}96$ ft; $F = 2250$ lbf
9.62 $V = 2{,}18$ mph; $x_t = 0{,}0339$ ft; $F_m = 3{,}65$ lbf, $F_p = 4110$ lbf
9.63 $x_t = 74{,}5$ mm; $\delta = 81{,}3$ mm; $F_D = 279$ N
9.64 $V = 11{,}0$ pé/s
9.65 $F = 5{,}49 \times 10^5$ N; $a_x = -0{,}0528$ m/s^2
9.68 $\delta = 1{,}65$ m; $F = 1{,}56$ MN; $\mathcal{P} = 11{,}2$ MW
9.69 $F = 92{,}3$ kN
9.70 $T = 86{,}2$ N · m; $\mathcal{P} = 542$ W
9.71 $D = 6{,}90$ m
9.72 $t = 7{,}06$ s; $a_{\text{máx}} = -10{,}3$ m/s^2
9.73 $\bar{C}_D = 0{,}299$
9.74 $s = 117$ m
9.75 $M = 3{,}29 \times 10^{-3}$ slug
9.76 Horizontal é 20 por cento melhor
9.77 $t = 1{,}30$ mm
9.78 $\mathcal{P}_{\text{máx}} = 243$ W
9.79 $t = 2{,}95$ s; $d = 624$ pé
9.80 $V_t = 43{,}5, 121$ m/s; $t = 8{,}11, 22{,}6$ s; $y = 224, 1730$ m
9.81 $V_{\text{máx}} = 489$ pé/s
9.83 FE $= 6{,}13$ mi/gal; $\Delta Q = 1720$ gal/ano
9.84 $a_{\text{máx}} = 2{,}54$ m/s^2; $V_{\text{máx}} = 60{,}3$ m/s
9.85 $\mathcal{P} = 9{,}86$ hp; $V_{\text{máx}} = 68{,}1$ m/s
9.86 $C_D = 1{,}17$
9.88 $V_{2(rel)} = 15$ m/s; $p_2 = -133$ N/m^2 (manométrica); $M = 0{,}814$ kg
9.90 $\omega_{\text{ot}} = V/3R$
9.92 $F = 0{,}830$ N; $M = 0{,}125$ N · m
9.93 $T = 11{,}9$ N · m
9.94 $D < 0{,}231$ mm
9.95 $C_D = 0{,}479$
9.96 $V = 23{,}3$ m/s; $Re = 48.200$; $F_D = 0{,}111$ N
9.97 $x = 13{,}9$ m
9.98 $V \approx 15{,}4$ m/s
9.99 $V \approx 29{,}8$ pé/s
9.101 $\mathcal{P} = 69{,}3$ kW
9.102 $V = 25{,}9$ m/s; $t = 4{,}83$ s; $y = 79{,}6$ m
9.103 $C_D = 61{,}9$; $\rho = 3720$ kg/m^3; $V = 0{,}731$ m/s
9.105 $M = 0{,}048$ kg
9.106 $M = 519$ kN · m
9.107 $D \approx 6{,}2$ m
9.108 $t = 126$ s
9.109 $V_t = 1{,}24$ pé/s; $h = 0{,}982$ pé

9.110 $V_t = 0{,}952$ m/s; $y = 22$ mm
9.111 $F_D \approx 5{,}54$ N; $\mathcal{P} \approx 359$ W; $V \approx 11{,}7$ m/s
9.113 $D = 7{,}99$ mm; $h = 121$ mm
9.115 $C_D = 1{,}08$
9.116 $t = 22{,}1$ s
9.117 $C_D = 0{,}606$
9.118 $F_D = 12{,}3$ lbf; $\Delta FC = 1{,}15$ lbm/h; FE = 27,5 mpg
9.119 $F_D = 2{,}59$ kN; $d = 8{,}57$ m
9.129 $\Delta\mathcal{P} = 18{,}2$ kW
9.130 $V \approx 10{,}7$ m/s
9.135 $A_p = 7{,}03$ m^2
9.136 $M = 7260$ kg
9.137 $\vec{F} = 4{,}79\hat{i} + 20{,}3\hat{j}$ lbf; $\mathcal{P} = 0{,}388$ hp
9.138 $V = 5{,}62$ m/s; $\mathcal{P} = 31{,}0$ kW; $V = 19{,}9$ m/s
9.140 $V = 144$ m/s; $R = 431$ m
9.141 $V \approx 289$ km/h
9.142 $T = 17.300$ lbf
9.143 $F_D = 2{,}15$ kN; $\mathcal{P} = 149$ kW
9.144 $F_L = -310$ lbf; $\Delta F = 336$ lbf
9.145 $\theta = 3{,}42°$; $L = 168$ km
9.147 $\mathcal{P} = 0{,}302$ hp
9.151 $p = -190$ N/m^2 (manométrica); $V = 149$ km/h
9.152 $F_L = 0{,}00291$ lbf
9.153 $F_L = 50{,}9$ kN; $F_D = 18{,}7$ kN; $\mathcal{P} = 5{,}94$ kW
9.154 $F_L/mg = 0{,}175$; $F_D/mg = 0{,}236$
9.155 $F_L/mg = 3{,}80$, $3{,}40$; $F_D/mg = 4{,}51$, $4{,}07$; $R = 263$ m, 307 m
9.156 $\omega = 11.600$ rpm; $s = 1{,}19$ m

Capítulo 10

10.1 $H = 118$ m; $\dot{W}_m = 116$ kW
10.2 $H = 262$ m; $\dot{W}_m = 1280$ kW
10.3 $H = 487$ m; $\dot{W}_m = 23{,}9$ MW
10.4 $H = 102$ pé; $\dot{W}_m = 3{,}87$ hp
10.5 $\beta_1 = 64{,}2°$; $\delta = 7{,}90°$
10.6 $\omega = 57{,}9$ rad/s; $H = 28{,}7$ m; $\dot{W}_m = 141$ MW
10.7 $Q = 1{,}60$ m^3/s; $H = 269$ m; $\dot{W}_m = 4{,}20$ MW
10.8 $\beta_1 = 47{,}7°$; $H = 476$ m; $\dot{W}_m = 37{,}3$ MW
10.9 $H = 50{,}1$ pé; $\mathcal{P} = 12{,}7$ hp
10.10 $\theta_{cf} = 30{,}4°$
10.11 $H_0 = 77{,}1$ m; $V_{rb_2} = 4{,}10$ m/s; $V_2 = 25{,}7$ m/s; $H = 72{,}0$ m; $\dot{W}_m = 30{,}0$ kW
10.12 $\omega = 224$ rad/s; $\alpha_2 = 80{,}4°$; $H = 325$ pé; $\dot{W}_m = 37{,}8$ hp
10.13 $H = 165$ pé (H_2O), 230 pé (gasolina)
10.15 $\eta = 0{,}445$; $Q = 450$ gpm; $H = 30{,}9$ pé
10.17 $H(\text{pé}) = 156 - 1{,}36 \times 10^{-4}[Q(\text{gpm})]^2$
10.18 $H(\text{pé}) = 91{,}5 - 4{,}01 \times 10^{-7}[Q(\text{gpm})]^2$
10.19 $\eta \approx 0{,}79$; $H \approx 176$ pé para $Q \approx 630$ gpm
10.20 $\eta \approx 0{,}83$; $H \approx 185$ pé para $Q \approx 820$ gpm
10.21 $H_{1t} = 13{,}2$ m; $H_{2t} = 45{,}5$ m; $\mathcal{P}_h = 1{,}01$ kW; $\eta = 0{,}75$; $\mathcal{P}_m = 2$ hp; $\mathcal{P}_{entra} = 1{,}59$ kW
10.24 1 hp (US) = 1,01 mhp; N_s (mhp) = $4{,}39 N_s$ (US)
10.25 $N_s = 1130$; $\mathcal{P}_{entra} = 11{,}6$ hp
10.26 $\eta \approx 0{,}86$ para $Q = 2220$ gpm, $H = 130$ pé: $D = 13$ pol.: $Q = 2800$ gpm, $H = 153$ pé; $D = 11$ pol.: $Q = 1690$ gpm, $H = 109$ pé
10.27 $N_s = 1{,}23$; $\mathcal{P}_{entra} = 350$ kW; $H(\text{m}) = 96{,}4 - 102\,[Q\,(\text{m}^3/\text{s})]^2$; $Q = 0{,}551$ m^3/s; $H = 21{,}1$ m; $\eta = 0{,}82$; $\mathcal{P}_{entra} = 139$ kW
10.28 $n = 5$ bombas/unidades motoras
10.29 $H_{1150} \approx 25{,}9$ pé
10.38 $N_m = 7140$ rpm; $D_m/D_p = 0{,}135$
10.39 Sim; Opera com vazão mássica abaixo do MPE (BEP), velocidade menor.
10.40 $N_m = 214$ rpm; $D_m/D_p = 0{,}172$
10.41 $a = 0{,}0426\,(\text{gpm})^{-1}$, $b = -1{,}56 \times 10^{-9}(\text{gpm})^{-3}$; $r^2 = 0{,}996$
10.42 $T \approx 46°$C; $Q = 0{,}625$ L/s; $H \approx 4{,}65$ m
10.43 $NPSHA = 26{,}4$ pé; $H = 22{,}5$ pé ($p = 9{,}73$ psig)
10.44 $a = 6{,}29$ pé, $b = 2{,}17 \times 10^{-5}$ pé/(gpm)^2; $r^2 = 0{,}992$
10.45 $a = 3{,}55$ pé, $b = 1{,}31 \times 10^{-5}$ pé/(gpm)^2; $r^2 = 0{,}980$
10.46 $Q_{máx} = 948$ gpm
10.49 $H = 30{,}8$ pé; $\mathcal{P}_h = 1{,}17$ hp
10.50 $D = 6$ pol. (nominal); $\mathcal{P}_m = 890$ hp
10.52 $H = 75{,}4$ pé; $\mathcal{P}_h = 303$ hp
10.53 $Q = 620$ gpm
10.54 $Q = 2570$ gpm; $L_e/D = 22.400$
10.55 $Q = 4240$ gpm; $L_e/D = 8770$
10.56 $Q = 3000$ gpm; $L_e/D = 42.700$
10.60 Com 3 bombas, $\eta \approx 0{,}91$; $\mathcal{P}_m = 235$, 361 hp
10.61 $H_p = 295$ pé
10.63 $Q = 2330$ gpm, $H = 374$ pé; Tipo 8AE20G, rotor de 19,5 pol., 1770 rpm
10.64 $Q = 197$ gpm, $H = 116$ pé; Tipo 4AE12, rotor de 11 pol., 1750 rpm
10.65 $Q = 600$ gpm, $H = 778$ pé; Tipo 5TUT-16B, 5 estágios, 1750 rpm
10.68 $Q = 2020$ gpm
10.69 $Q = 898$ gpm, $H = 104$ pé; Tipo 4AE11, rotor de 11 pol., 1750 rpm
10.70 $Q = 11.200$ gpm, $H = 101$ pé; 3 Tipo 10AE12, rotor de 12 pol., 1750 rpm
10.71 $Q = 15.700$ gpm, $H = 654$ pé (gasolina); 4 Tipo 10TU-22C, 2 estágio, 1750 rpm
10.74 $Q_{máx} = 11{,}2$ gpm para $\Delta z = 0$

10.76 $N = 3500$ rpm; $D = 3,18$ pol.; $\eta \approx 0,6$
10.77 $\eta \approx 0,8$ para $Q = 9200$ cfm
10.79 $A_{saída} = 6,29$ pé^2; $\eta \approx 0,85$
10.80 $\omega' = 659$ rpm; $\mathcal{P}' = 32,8$ hp
10.81 $V = 123$ pé/s
10.83 $\mathcal{P}_{perda} = 0,292$ hp
10.84 $F_T = 680$ e 449 lbf
10.85 $D = 1,44$ m; $T = 1,60$ kN e 800 N
10.86 $\eta = 57,1$ por cento
10.87 $D = 18,6$ pé; $n = 241$ rpm; $\mathcal{P}_{entra} =$ 72.700 hp
10.88 $V = 16,0$ pé/s; $J = 0,748$; $C_F = 0,0415$
10.89 $\eta = 50,0$ por cento; $\eta_0 = 0$
10.92 $\mathcal{P}_{sai} = 16.900$ hp; $N = 353$ rpm; $T = 3,22 \times 10^5$ pé · lbf
10.93 $N_s = 35,1$; $Q = 31.800$ m^3/s; $D =$ 27,61
10.94 $N_{s_{cu}} = 55,7$; $Q \approx 34.600$ pé^3/s
10.95 $D = 10,3$ pé; $D_j = 14,5$ pol.; $Q = 310$ pé^3/s
10.96 $N_s = 26,5$; $T = 3,91 \times 10^6$ pé · lbf, $Q = 2570$ cfs para H = 380 pé
10.97 Para um jato, $N = 229$ rpm; $D = 10,5$ pé
10.98 $\mathcal{P} = 1,77$ hp; $\eta = 0,600$
10.99 $H_{líquido} \approx 1050$ pé; $N_s \approx 5$
10.100 $N_{s\ cu} = 4,55$; $D = 6,20$ pé
10.102 $D_j \approx 2,2$ pol.; $\mathcal{P} \approx 60,3$ hp
10.103 $U_t \approx 79,6$ m/s; $C_P = 0,364$
10.104 $\omega \approx 26$ s^{-1}; $\mathcal{P}_{modelo} \approx 0,069$ hp
10.105 $\mathcal{P} \approx 22$ hp; $\omega = 98,9$ rpm
10.106 $Qh \approx 737$ gpm · pé com $\eta_{bomba} = 0,7$

Capítulo 11

11.1 $\Delta u = -574$ kJ/kg; $\Delta h = -803$ kJ/kg; $\Delta s = 143$ J/(kg · K)
11.2 Sim
11.3 $\Delta S = -0,923$ Btu/°R; $\Delta U = -684$ Btu; $\Delta H = -960$ Btu
11.4 < 0; > 0; 0; 0; 0
11.5 > 0; < 0; 0; 0
11.6 $\dot{W} = 392$ kW
11.7 $W = 176$ MJ; $W = 228$ MJ; $T = 858$ K; $Q = -317$ MJ
11.8 $\dot{m} = 36,7$ kg/s; $T_2 = 572$ K; $V_2 =$ 4,75 m/s; $\dot{W} = 23$ MW
11.9 $\Delta t = 828$ s
11.10 $M = 0,533$, 1.08
11.11 $M = 0,776$; $V = 269$ m/s
11.12 $c = 299$ m/s; $V = 987$ m/s; $V/V_b =$ 1,41
11.15 $r = 2030$, 7940 m; $a = 22,2$, 29,6 m/s^2
11.17 $dT/dz = -6,49 \times 10^{-3}$ K/m; $dc/dz = -3,83 \times 10^{-3}$, $-4,36 \times 10^{-3}$ s^{-1}
11.19 $V = 725$ m/s
11.20 $V = 657$ m/s; $\alpha = 31,8°$
11.21 $V = 6320$ pé/s
11.22 $V = 493$ m/s; $\Delta t = 0,398$ s
11.23 $M = 1,19$; $V = 804$ pé/s; $Re/x = 9,84 \times 10^6$ m^{-1}
11.24 $V = 471$ m/s; $t = 5,90$ s
11.25 $t = 8,51$ s
11.26 $\Delta x = 3920$ pé
11.27 $t \approx 48,5$ s
11.29 $M = 0,199$, 0,314
11.30 $M = 0,851$; $V = 255$ m/s
11.31 $p_0 = 546$ kPa; $T_0 = 466$ K; $h_0 - h = 178$ kJ/kg
11.32 $p_0 = 126$, 128 kPa (abs.)
11.33 $M = 0,801$; $V = 236$ m/s; $T_0 = 245$ K
11.34 $c = 295$ m/s; $V = 649$ m/s; $\alpha = 27,0°$; $V/V_b = 1,41$; $T_0 = 426$ K
11.35 $p_0 = 31,1$ kPa; $V = 274$ m/s; 9,2 por cento
11.36 $a_x = -161$ m/s^2; $p_0 = 191$ kPa (abs.); $T_0 = 346$ K
11.37 $T_0 = 1460$°R; $p_0 = 184$ psia; $\dot{m} = 174$ lbm/s
11.38 Sim; Não
11.39 $V = 890$ m/s; $T_0 = 677$ K; $p_0 =$ 212 kPa
11.40 $V = 987$ m/s; $p_0 = 125$ kPa; $p_0 = 31,6$ kPa; $T_0 = 707$ K
11.41 $T_0 = 288$ K; $p_0 = 101$, 39,9 kPa (abs.); $s_2 - s_1 = 267$ J/(kg · K)
11.42 $T_0 = 585$, 1782 K; $p_0 = 1,03$ MPa (abs.), 963 kPa; $s_2 - s_1 = 1140$ J/(kg · K)
11.43 $T_0 = 445$ K; $p_0 = 57,5$, 46,7 kPa (abs.); $s_2 - s_1 = 59,6$ J/(kg · K)
11.44 $T_0 = 2900$, 1870°R; $p_0 = 100$, 4,57 psia; $s_2 - s_1 = 0,107$ Btu/(lbm · °R)
11.47 $\Delta p = 48,2$ kPa
11.48 $\delta Q/dm = 63,0$ Btu/lbm; $p_{0_2} = 56,5$ psia
11.49 $T_0 = 344$ K; $p_0 = 223$, 145 kPa (abs.); $s_2 - s_1 = 0,124$ kJ/(kg · K)
11.50 $M = 0,4$; Sim
11.51 $T^* = 260$ K, $p^* = 24,7$ MPa (abs.); $V^* = 252$ m/s
11.52 $T^* = 1880$ K, $p^* = 2,98$ MPa (abs); $V^* = 2550$ m/s
11.53 $T^* = 3180$ K, $p^* = 22,6$ MPa (abs.); $V^* = 1110$ m/s
11.54 $T^* = 2390$°R, $p^* = 79,2$ kPa (abs.); $V^* = 2400$ pé/s

Capítulo 12

12.1 $V = 1660$ pé/s; $M = 0,787$; $\dot{m} = 0,274$ lbm/s
12.2 $V = 2620$ pé/s; $M = 1,36$; $\dot{m} = 1,76$ lbm/s

12.3 $M = 1{,}35$
12.4 $M_2 = 1{,}20$
12.5 $M_2 = 1{,}20$
12.6 $V = 610$ m/s; $A = 0{,}129$ m^2
12.7 $A = 1{,}49 \times 10^{-3}$ m^2
12.8 $\dot{m} = 8{,}50$ kg/s
12.9 $p_t = 33$ psia; $M_t = 0{,}90$; $V_t = 1060$ pé/s
12.10 $p_t = 112$ kPa
12.11 $\dot{m} = 0{,}548$ kg/s
12.12 $A = 1{,}94 \times 10^{-3}$ m^2
12.13 $A_{mín} = 24{,}1$ mm^2
12.14 $p_0 = 113$ psia; $\dot{m} = 3{,}25$ lbm/s
12.15 $p_0 \geq 191$ kPa; $\dot{m} = 1{,}28$ kg/s
12.16 $\dot{m} = 0{,}0107$ lbm/s
12.17 $A_{mín} = 0{,}842$ pol.^{2}; $p = 20{,}2$ psia
12.18 $t = 68{,}4$ s; $\Delta s = 0{,}0739$ Btu/(lbm · °R)
12.19 $R_x = 1560$ N (para a esquerda)
12.20 $T_0 = 522$°R; $\Delta A = -15{,}9$ por cento; $p = 13{,}5$ psia; $V = 1020$ pé/s
12.21 $p = 803$ kPa (abs.); $\dot{m} = 0{,}113$ kg/s; $a_{rf_x} = 2{,}28$ m/s^2
12.22 $\dot{m} = 2{,}73$ lbm/s; $a_{rf_x} = 99{,}8$ pé/s^2
12.23 $R_x = 304$ lbf, tensão
12.24 $A = 0{,}0173$ m^2; $V = 390$ m/s
12.25 $A_t = 0{,}377$ pol.^{2}
12.26 $M_e = 1{,}00$; $p_e = 381$ kPa; $p_t = 191$ kPa; $T \approx 288$ K
12.27 $t = 23{,}6$ s
12.28 $t = 23{,}5$ s; $\Delta s = 161$ J/(kg · K)
12.29 $\dot{m} = 0{,}856$ lbm/s
12.30 $p = 125$ kPa (abs.); $\dot{m} = 0{,}401$ kg/s
12.31 $V = 1300$ m/s; $\dot{m} = 87{,}4$ kg/s
12.32 $A = 2{,}99$ pol.^{2}; $\dot{m} = 3{,}74$ lbm/s
12.33 $A = 8{,}86 \times 10^{-4}$ m^2, $1{,}50 \times 10^{-3}$ m^2
12.34 $\dot{m} = 6{,}05$ lbm/s; Decresce por um fator de 2
12.35 $R_x = 950$ N
12.36 $\dot{m} = 39{,}4$ lbm/s; $F_x = 9750$ lbf
12.37 $\dot{m} = 32{,}4$ kg/s; $A_e = 0{,}167$ m^2; $A_e/A_t = 19{,}4$
12.38 $p = 88{,}3$ kPa (abs.); $\dot{m} = 0{,}499$ kg/s; $K_x = 1030$ N
12.39 $p_t = 3290$ psia; $\dot{m} = 0{,}0524$ lbm/s; Impulsão = 2,37 lbf; 36,3 por cento
12.40 $\dot{m} = 0{,}0726$ kg/s; $p \leq 33{,}5$ kPa (abs.)
12.41 $M = 0{,}20$; $\dot{m} = 3{,}19 \times 10^{-3}$ kg/s; $p = 47{,}9$ kPa (abs.)
12.42 $p = 477$ kPa (abs.); $\Delta s = 49{,}5$ J/(kg · K)
12.43 $p = 18{,}5$ psia; $V = 1040$ pé/s
12.44 $\dot{m} = 0{,}00321$ kg/s; $p_0 = 33{,}8$ kPa (abs.); $\Delta s = 314$ J/(kg · K)
12.45 $\dot{m} = 0{,}0192$ kg/s; $T^* = 244$ K; $p^* = 53{,}4$, $13{,}6$ kPa (abs.)
12.46 $F = 822$ lbf
12.47 $T = 468$ K; $F = 60$ N; $\Delta s = 149$ J/(kg · K)
12.48 $p_t = 56{,}6$ psia; $T = 433$°R; $p_0 = 27{,}8$ psia; $\dot{m} = 0{,}0316$ lbm/s
12.49 $T = 238$ K; $p = 26{,}1$ kPa (abs.); $\Delta s = 172$ J/(kg · K)
12.50 $M = 0{,}15$; $T = 246$ K, $p_0 = 25{,}6$ kPa; $L = 8{,}41$ m
12.51 $L = 1{,}27$ m
12.52 $T = 459$ K; $L = 34{,}5$ m
12.53 $L = 18{,}8$ pé
12.58 $\bar{f} = 0{,}0122$; $\Delta p = 13{,}0$ psi
12.59 $L = 0{,}405$ m
12.61 $p = 191$ kPa (abs.); $L = 5{,}02$ m; $\Delta s = 326$ J/(kg · K)
12.62 $M = 0{,}25$; Adicionado
12.63 $p = 153$ psia
12.64 $M = 0{,}452$; $L = 603$ pé
12.65 $\Delta p = 16{,}6$, $18{,}2$, $18{,}1$ psia
12.66 $Q = 1{,}84 \times 10^8$ pé^3/dia
12.67 $\delta Q/dm = 145$ kJ/kg; $\Delta p = 405$ kPa
12.68 $\delta Q/dm = 243$ *Btu/lbm*
12.69 $\delta Q/dm = 449$ kJ/kg; $\Delta s = 0{,}892$ kJ/(kg · K)
12.70 $\dot{Q} = 111$ kW; $p_1 - p_2 = 1{,}30$ MPa
12.71 $\delta Q/dm = 18$ kJ/kg; $\Delta s = 53{,}2$ J/(kg · K); $\Delta p_0 = 2{,}0$ kPa
12.72 $T_0 = 483$°R; $p = 13{,}4$ psia; $\Delta p_0 = 0{,}1$ psia
12.73 $V = 1520$ pé/s; $T = 2310$°R; $\dot{Q} = 740$ Btu/s
12.74 $p = 209$ psia; $\dot{Q} = 2270$ Btu/s; $\dot{m}_f = 0{,}126$ lbm/s
12.75 $\delta Q/dm = 330$ Btu/lbm; $\Delta p_0 = -1{,}94$ psia
12.76 $V = 866$ m/s; $p = 46{,}4$ kPa; $M = 1{,}96$; $\delta Q/dm = 156$ kJ/kg
12.77 $M = 0{,}50$; $T_0 = 1560$ K; $\dot{Q} = 1{,}86$ MJ/s
12.78 $\Delta p_0 = -22$ kPa; $\delta Q/dm = 447$ kJ/kg; $\Delta s = 889$ J/(kg · K)
12.79 $\delta Q/dm = 17{,}0$ kJ/kg; $T = 318$ K; $p = 46{,}3$ kPa; $p_0 = 87{,}7$ kPa
12.80 $M = 1{,}0$; $p = 48{,}8$ kPa; $\Delta p_0 = -8{,}60$ kPa
12.81 $\dot{Q} = 5{,}16 \times 10^4$ Btu/s
12.82 $\delta Q/dm = 313$ Btu/lbm; $\Delta p_0 = -34$ psia
12.83 $T_0 = 764$ K; $\dot{m} = 0{,}0215$ kg/s; $A_e/A_t = 4{,}23$
12.84 $T_0 = 966$ K; $M = 0{,}60$; $\delta Q/dm = 343$ kJ/kg; Fração n = 0,616
12.87 $M_2 = 1{,}74$; $p_2 = 4{,}49$ psia
12.89 $V = 536$ m/s
12.90 $p_0 = 7{,}22$ psia; $T_0 = 954$°R
12.91 $\rho = 0{,}359$ lbm/pé^3; $M = 0{,}701$
12.92 $V = 247$ m/s; $T = 670$ K;

Δs = 315 J/(kg · K)
12.93 p = 28,1, 85,7 psia
12.94 T = 520 K; p_0 = 1,29 MPa
12.95 V = 257 m/s; M = 0,493;
Δp_0 = −512 kPa
12.96 V = 255 m/s; Δp = 473, 842 kPa
12.97 T_0 = 426 K; p_0 = 207, 130 kPa
12.98 M = 2,48; V = 2420 pé/s; p = 24,3 psia;
p_0 = 29,1 psia
12.99 T = 414 K; p = 51,9 kPa; p_0 = 57,9 kPa
12.100 M = 0,545; p = 514 kPa; p_0 = 629 kPa;
A = 0,111 m^2
12.101 A = 2,32 pé^2; Δs = 0,0423 Btu/(lbm · °R)
12.102 Δp_0 = −14,1 psi;
Δs = 0,0591 Btu/(lbm · °R)
12.103 M = 2,20; p_0 = 178 kPa;
V_s = 568 m/s
12.104 T_0 = 533 K; Δp = 37,4 kPa;
Δs = 30,0 J/(kg · K); p_0 = 116 kPa
12.105 V = 265, 279 m/s
12.106 p = 33,4 kPa; V = 162 m/s
12.107 M = 1,45; $\dot{m}$ = 0,808 lbm/s
12.108 M = 0,701; p = 167 kPa;
Δs = 20,9 J/(kg · K)
12.109 M = 1,92; p = 89,4, 58,6, 14,5 psia
12.110 M = 2,94; p_0 = 3,39 MPa;
p = 3,35, 1,00 MPa, 101 kPa
12.111 p = 301 kPa
12.112 p = 46,7 psia; A = 1,52 pol.^{2};
$\dot{m}$ = 2,55 lbm/s
12.113 p = 587 kPa; A_e = 756 mm^2;
A = 448 m^2
12.114 M = 1,50
12.115 33,4 $< p_b <$ 99,6 kPa; $\dot{m}$ = 0,121 kg/s
12.116 M = 2,12; V = 2000 pé/s
12.117 $p_{atm} < p_0 <$ 112 kPa e $p_0 >$ 743 kPa
12.118 p = 66,6 psia
12.119 p = 301 kPa (abs.)
12.121 M = 0,475; p_0 = 361 kPa; T_0 = 400 K; A_t = 118 mm^2; $s_2 - s_1$ = −0,320 kJ/(kg · K); M_e = 0,377
12.123 M = 2,14
12.124 V = 2140 pé/s; Δs = 0,0388 Btu/(lbm · °R)

ÍNDICE

A

B

C

D

E

F

S

T

U

V

W

Z

Serviços de impressão e acabamento
executados, a partir de filmes fornecidos,
nas oficinas gráficas da EDITORA SANTUÁRIO
Fone: (012) 565-2140 - Fax (012) 565-2141
http://www.redemptor.com.br - Aparecida-SP

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Tabela G.1 Unidades SI e Prefixos[a]

Unidades SI	Grandeza	Unidade	Símbolo SI	Fórmula
Unidades básicas SI:	Comprimento	metro	m	–
	Massa	quilograma	kg	–
	Tempo	segundo	s	–
	Temperatura	kelvin	K	–
Unidade complementar SI:	Ângulo plano	radiano	rad	–
Unidades derivadas SI:	Energia	joule	J	$N \cdot m$
	Força	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
	Potência	watt	W	J/s
	Pressão	pascal	Pa	N/m^2
	Trabalho	joule	J	$N \cdot m$

Prefixos SI	Fator de Multiplicação	Prefixo	Símbolo SI
	1 000 000 000 000 $= 10^{12}$	tera	T
	1 000 000 000 $= 10^{9}$	giga	G
	1 000 000 $= 10^{6}$	mega	M
	1 000 $= 10^{3}$	quilo	k
	0,01 $= 10^{-2}$	centi[b]	c
	0,001 $= 10^{-3}$	mili	m
	0,000 001 $= 10^{-6}$	micro	μ
	0,000 000 001 $= 10^{-9}$	nano	n
	0,000 000 000 001 $= 10^{-12}$	pico	p

[a]Fonte: Norma ASTM para Prática Métrica E 380±97, 1997.
[b]A ser evitado sempre que possível.

Tabela G.2 Fatores de Conversão e Definições

Dimensão Fundamental	Unidade Inglesa	Valor SI Exato	Valor SI Aproximado
Comprimento	1 pol.	0,0254 m	–
Massa	1 lbm	0,453 592 37 kg	0,454 kg
Temperatura	1 °F	5/9 K	–

Definições:

Aceleração da gravidade:	g = 9,8066 m/s² (= 32,174 pé/s²)
Energia:	Btu (unidade térmica britânica) ≡ quantidade de energia requerida para aumentar a temperatura de 1 lbm de água de 1°F (1 Btu = 778,2 pé · lbf)
	quilocaloria ≡ quantidade de energia requerida para aumentar a temperatura de 1 kg de água de 1 K (1 kcal = 4187 J)
Comprimento:	1 milha = 5280 pés; 1 milha náutica = 6076,1 pés = 1852 m (exato)
Potência:	1 hp (horsepower) ≡ 550 pé · lbf/s
Pressão:	1 bar ≡ 10^5 Pa
Temperatura:	grau Fahrenheit, $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$ (T_C em graus Celsius)
	grau Rankine, $T_R = T_F + 459,67$
	Kelvin, $T_K = T_C + 273,15$ (exato)
Viscosidade:	1 Poise ≡ 0,1 kg/(m · s)
	1 Stoke ≡ 0,0001 m²/s
Volume:	1 gal ≡ 231 pol.³ (1 pé³ = 7,48 gal)

Fatores de Conversão Úteis:

1 lbf = 4,448 N
1 lbf/pol.² = 6895 Pa
1 Btu = 1055 J
1 hp = 746 W = 2545 Btu/h
1 kW = 3413 Btu/h
1 quarto = 0,000946 m³ = 0,946 litro
1 kcal = 3,968 Btu